

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования

Российский государственный педагогический  
университет им. А. И. Герцена

В. Ф. Зайцев, Л. В. Линчук, А. В. Флегонтов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
(СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ)

*Учебное пособие*

*Издание 2-е, исправленное и дополненное*

Часть II

Допущено Учебно-методическим объединением  
по направлению «Педагогическое образование»

Министерства образования и науки РФ

в качестве учебного пособия для высших учебных заведений,  
ведущих подготовку по направлению  
44.04.01 «Педагогическое образование»

1964446  
РГПУ им А.И. Герцена  
Фундаментальная  
библиотека

Санкт-Петербург  
Издательство РГПУ им. А. И. Герцена  
2018

УДК 517.9  
ББК 22.161.6  
З 17

*Печатается по рекомендации кафедры  
математического анализа и решению  
редакционно-издательского совета РГПУ  
им. А. И. Герцена*

**Рецензенты:** д. ф. -м. н. профессор Будаев В. Д.

**З 17 Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А. В.**

Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть II. – СПб.:  
Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. – 139 с.  
ISBN 978–5–8064–2497–7

Учебное пособие предназначено для студентов, магистрантов и преподавателей и может быть использовано при изучении дисциплин, связанных с решением дифференциальных уравнений в самых разнообразных отраслях прикладной науки. Оно также будет полезно при подготовке к семинарам, факультативным занятиям и при самостоятельном изучении вопросов данной тематики. Материал учебного пособия может быть широко использован на лекциях и практических занятиях по курсам дифференциальных уравнений математической физики и группового анализа.

Целью настоящего учебного пособия является изложение основных принципов и методов поиска **точных аналитических решений** различных дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), а также изучение современных направлений развития этой отрасли знаний.

Библиогр. 36 назв.

УДК 517.9  
ББК 22.161.6

ISBN 978–5–8064–2497–7

© Зайцев В. Ф., Линчук Л. В.,  
Флегонтов А. В., 2018  
© Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2018

# СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Предисловие авторов</b> .....                                                                 | 3  |
| <b>Введение</b> .....                                                                            | 5  |
| <b>Глава 1. Группы преобразований на плоскости</b> .....                                         | 8  |
| 1.1. Основные определения .....                                                                  | 8  |
| 1.2. Многообразия .....                                                                          | 9  |
| 1.3. Группы Ли .....                                                                             | 10 |
| 1.4. Инварианты групп Ли. Инфинитезимальный оператор .....                                       | 14 |
| 1.5. Обобщение на многомерный случай .....                                                       | 18 |
| <b>Глава 2. Уравнения первого порядка и допускаемые ими точечные группы</b> .....                | 23 |
| 2.1. Предварительные замечания .....                                                             | 23 |
| 2.2. Преобразования производных. Формулы продолжения .....                                       | 24 |
| 2.3. Уравнения первого порядка, допускающие группу .....                                         | 28 |
| 2.4. Канонический оператор .....                                                                 | 34 |
| 2.5. Уравнение Риккати. Группы эквивалентности .....                                             | 36 |
| 2.6. Существенные произвольные элементы. Специальное уравнение Риккати. Уравнение Бернулли ..... | 40 |
| 2.7. Дифференциальные инварианты. Понижение порядка уравнения .....                              | 46 |
| <b>Глава 3. Уравнения второго порядка и допускаемые ими точечные группы</b> .....                | 49 |
| 3.1. Предварительные замечания .....                                                             | 49 |
| 3.2. Условие инвариантности и определяющая система .....                                         | 50 |
| 3.3. Алгебры Ли .....                                                                            | 51 |
| 3.4. Групповой анализ уравнения $y'' = 0$ . Теорема Ли .....                                     | 54 |
| 3.5. Групповой анализ обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера .....                                 | 57 |
| 3.6. Классическое уравнение Эмдена–Фаулера .....                                                 | 62 |
| 3.7. Ограниченная обратная задача .....                                                          | 65 |
| <b>Глава 4. Интегрирование уравнений, допускающих непрерывную группу</b> .....                   | 67 |
| 4.1. Предварительные замечания .....                                                             | 67 |
| 4.2. Алгоритм понижения порядка. Двумерные алгебры Ли .....                                      | 73 |

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.3. Интегрирование уравнения $y'' = ax^{-15/7}y^2$ .....                       | 76  |
| 4.4. Неалгоритмическое интегрирование с помощью не-<br>кальных операторов ..... | 77  |
| 4.5. Замечания о трёхмерных алгебрах .....                                      | 81  |
| 4.6. Операторы касательных преобразований .....                                 | 84  |
| 4.7. Вариационные (нётеровы) симметрии .....                                    | 89  |
| <b>Глава 5. Уравнения в частных производных</b> .....                           | 96  |
| 5.1. Формулы продолжения .....                                                  | 96  |
| 5.2. Уравнения 1-го порядка .....                                               | 99  |
| 5.3. Инвариантные решения .....                                                 | 101 |
| 5.4. Понятие об оптимальной системе подалгебр .....                             | 103 |
| 5.5. Уравнение теплопроводности .....                                           | 106 |
| <b>Дополнительные задачи</b> .....                                              | 110 |
| <b>Ответы и комментарии</b> .....                                               | 118 |
| <b>Список литературы</b> .....                                                  | 133 |
| <b>EqWorld</b> .....                                                            | 136 |
| <b>Содержание</b> .....                                                         | 137 |