

Оглавление

Предисловие	1
-----------------------	---

ЧАСТЬ I. Общая топология

ГЛАВА 1. Структуры и пространства

§ 1. Теоретико-множественное отступление: множества	13
1.1. Множества и элементы (13). 1.2. Равенство множеств (14). 1.3. Пустое множество (14). 1.4. Основные числовые множества (15). 1.5. Задание множества явным перечнем его элементов (15). 1.6. Подмножества (15). 1.7. Свойства включения (16). 1.8. Доказывая равенство множеств, доказывают два включения (16). 1.9. Включение и принадлежность (16). 1.10. Задание подмножества условием на его элементы (17). 1.11. Пересечение и объединение (17). 1.12. Разные разности (19).	
§ 2. Топология в множестве	20
2.1. Определение топологического пространства (20). 2.2. Простейшие примеры (20). 2.3. Самый важный пример: вещественная прямая (21). 2.4. Дополнительные примеры (21). 2.5. Употребление новых терминов: точки, открытые множества, замкнутые множества (21). 2.6. Теоретико-множественное отступление: формулы де Моргана (22). 2.7. Открытость и замкнутость (22). 2.8. Задание топологии совокупностью замкнутых множеств (23). 2.9. Окрестности (23). 2.10х. Открытые множества на прямой (23). 2.11х. Канторово множество (23). 2.12х. Топология и арифметические прогрессии (24).	
§ 3. Базы	24
3.1. Определение базы (24). 3.2. Какие наборы множеств являются базами (24). 3.3. Базы на плоскости (25). 3.4. Предбазы (25). 3.5. Бесконечность множества простых чисел (26). 3.6. Иерархия топологий (26).	
§ 4. Метрические пространства	26
4.1. Определение и первые примеры (26). 4.2. Дальнейшие примеры (27). 4.3. Шары и сферы (27). 4.4. Подпространства метрического пространства (28). 4.5. Удивительные шары (28). 4.6. Отрезок — это то, что лежит между (28). 4.7. Ограниченные множества и шары (29).	

4.8. Нормы и нормированные пространства (29).	4.9. Метрическая топология (29).	4.10. Открытость и замкнутость шаров и сфер (30).
4.11. Метризуемые пространства (30).	4.12. Эквивалентные метрики (30).	4.13. Действия с метриками (30).
4.14. Расстояние от точки до множества (31).	4.15х. Расстояния между множествами (31).	4.16х. Ультраметрики и p -адические числа (32).
4.17х. Асимметрии (32).		
§ 5. Подпространства		33
5.1. Определение и простейшие примеры (33).	5.2. Относительность открытости (34).	5.3. Транзитивность относительной топологии (34).
5.4. Традиционная неполнота обозначений (34).		
§ 6. Расположение точек относительно множества		35
6.1. Внутренние, внешние и граничные точки (35).	6.2. Внутренность и внешность (35).	6.3. Замыкание (35).
6.4. Замыкание в метрическом пространстве (36).	6.5. Граница (36).	6.6. Внутренность и замыкание при утончении топологии (36).
6.7. Внутренность и замыкание как операции над множествами (36).	6.8. Попеременное применение Cl и Int (37).	6.9. Множества с общей границей (37).
6.10. Выпуклость и операции Int , Cl и Fr (37).	6.11. Задание топологии посредством операций замыкания и внутренности (38).	6.12. Плотные множества (38).
6.13. Нигде не плотные множества (38).	6.14. Предельные и изолированные точки (39).	6.15. Локально замкнутые множества (39).
§ 7. Упорядоченные множества		39
7.1. Строгие порядки (39).	7.2. Нестрогие порядки (40).	7.3. Взаимосвязь между строгими и нестрогими порядками (40).
7.4. Конусы (41).	7.5. Расположение элемента относительно множества (42).	7.6. Линейные порядки (42).
7.7. Топологии линейного порядка (43).	7.8. Топология частичного порядка (44).	7.9. Как нарисовать чум (44).
§ 8. Циклические порядки		45
8.1. Циклические порядки в конечном множестве (45).	8.2х. Циклические порядки в бесконечных множествах (46).	8.3х. Топология циклического порядка (48).
Доказательства и комментарии		48

ГЛАВА 2. Непрерывность

§ 9. Теоретико-множественное отступление: отображения	57
9.1. Отображения и их основные типы (57).	9.2. Образы и прообразы (57).
9.3. Тожественные отображения и включения (58).	9.4. Композиции (59).
9.5. Обратные и обратимые отображения (59).	9.6. Сужения и подотображения (59).
§ 10. Непрерывные отображения	60
10.1. Определение и основные свойства непрерывных отображений (60).	10.2. Переформулировки основного определения (60).
10.3. Дальнейшие примеры (61).	10.4. Поведение плотных множеств при непрерывных отображениях (61).
10.5. Локальная непрерывность (61).	

10.6. Свойства непрерывных функций (62).	10.7. Непрерывность расстояний (62).	10.8. Изометрии (62).	10.9. Сжимающие отображения (63).	10.10. Множества, задаваемые уравнениями и неравенствами (63).	10.11. Теоретико-множественное отступление: покрытия (63).	10.12. Фундаментальные покрытия (63).	10.13х. Монотонные отображения (64).	10.14х. Расстояние Громова–Хаусдорфа (65).	10.15х. Функции на канторовом множестве и кривые Пеано (65).
§ 11. Гомеоморфизмы 66									
11.1. Определение и основные свойства гомеоморфизмов (66).									
11.2. Гомеоморфные пространства (66).									
11.3. Роль гомеоморфизмов (67).									
11.4. Дальнейшие примеры гомеоморфизмов (67).									
11.5. Примеры гомеоморфных пространств (68).									
11.6. Примеры негомеоморфных пространств (71).									
11.7. Проблема гомеоморфизма и топологические свойства (72).									
11.8. Вложения (72).									
11.9. Эквивалентность вложений (73).									
Доказательства и комментарии 74									

ГЛАВА 3. Топологические свойства

§ 12. Связность	79
12.1. Определение связности и первые примеры (79). 12.2. Связные множества (79). 12.3. Свойства связных множеств (80). 12.4. Компоненты связности (80). 12.5. Вполне несвязные пространства (81). 12.6. Связность и граница множества (81). 12.7. Связность и непрерывные отображения (81). 12.8. Связные подмножества числовой прямой (82).	
§ 13. Приложения понятия связности	83
13.1. Теорема о промежуточном значении и её обобщения (83). 13.2. Приложение к проблеме гомеоморфизма (83). 13.3х. Индукция по связности (84). 13.4х. Разрезание блинов на равновеликие части (84).	
§ 14. Линейная связность	85
14.1. Пути (85). 14.2. Линейно связные пространства (85). 14.3. Линейно связные множества (86). 14.4. Свойства линейно связных множеств (86). 14.5. Компоненты линейной связности (86). 14.6. Линейная связность и непрерывные отображения (87). 14.7. Связность и линейная связность (87). 14.8х. Связность посредством ломаных (87). 14.9х. Связность некоторых множеств матриц (88).	
§ 15. Аксиомы отделимости	88
15.1. Аксиома Хаусдорфа (88). 15.2. Пределы последовательностей (89). 15.3. Множество совпадения и множество неподвижных точек (89). 15.4. Наследственные свойства (90). 15.5. Первая аксиома отделимости (90). 15.6. Аксиома Колмогорова (91). 15.7. Третья аксиома отделимости (91). 15.8. Четвёртая аксиома отделимости (92). 15.9х. Пространство Немыцкого (93). 15.10х. Лемма Урысона и теорема Титце (93).	
§ 16. Аксиомы счётности	94

16.1. Теоретико-множественное отступление: счётность (94).	16.2. Вторая аксиома счётности и сепарабельность (94).	16.3. Базы в точке (95).
16.4. Первая аксиома счётности (95).	16.5. Секвенциальный подход к топологии (96).	16.6. Секвенциальная непрерывность (97).
16.7х. Теоремы вложимости и метризуемости (97).		
§ 17. Компактность		9
17.1. Определение компактности (97).	17.2. Терминологические замечания (98).	
17.3. Компактность на языке замкнутых множеств (98).	17.4. Компактные множества (98).	17.5. Компактность и замкнутость (99).
17.6. Компактность и аксиомы отделимости (99).	17.7. Компактность в евклидовом пространстве (99).	17.8. Компактность и непрерывные отображения (100).
17.9. Замкнутые отображения (101).	17.10х. Нормы в $\mathbb{R}^n$ (101).	17.11х. Индукция по компактности (101).
§ 18. Секвенциальная компактность		102
18.1. Секвенциальная компактность и компактность (102).	18.2. Секвенциальная компактность в метрических пространствах (103).	18.3. Компактность и полнота (103).
18.4х. Некомпактность бесконечных шаров (104).	18.5х. p -адические числа (104).	18.6х. Пространства выпуклых фигур (104).
§ 19х. Локальная компактность и паракомпактность		105
19.1х. Локальная компактность (105).	19.2х. Одноточечная компактификация (106).	19.3х. Собственные отображения (106).
19.4х. Локально конечные семейства (107).	19.5х. Паракомпактные пространства (107).	19.6х. Паракомпактность и аксиомы отделимости (108).
19.7х. Разбиения единицы (108).	19.8х. Приложение: составление вложений из кусков (109).	
Доказательства и комментарии		109
 ГЛАВА 4. Топологические конструкции		
§ 20. Перемножение		122
20.1. Теоретико-множественное отступление: перемножение множеств (122).	20.2. Графики (122).	20.3. Перемножение топологий (123).
20.4. Топологические свойства проекций и слоев (123).	20.5. Перемножение отображений (124).	20.6. Свойства диагонали и других графиков (125).
20.7. Топологические свойства произведений (125).	20.8. Представление пространств в виде произведений (126).	
§ 21. Факторизация		127
21.1. Теоретико-множественное отступление: разбиения и отношения эквивалентности (127).	21.2. Фактортопология (128).	21.3. Топологические свойства факторпространств (128).
21.4. Теоретико-множественное отступление: факторотображения (129).	21.5. Непрерывность факторотображений (129).	21.6х. Замкнутые разбиения (130).
21.7х. Открытые разбиения (130).		
§ 22. Зверинец факторпространств		130

22.1. Инструмент распознавания факторпространств (130). 22.2. Живописание разбиений (131). 22.3. Добро пожаловать в зверинец! (132). 22.4. Транзитивность факторизации (133). 22.5. Лента Мёбиуса (133). 22.6. Стягивание подпространств (134). 22.7. Пространства красивых конфигураций (134). 22.8. Бутылка Клейна (134). 22.9. Проективная плоскость (135). 22.10. Понимаете ли вы, что делаете? (135). 22.11. Сумма множеств (135). 22.12. Сумма пространств (135). 22.13. Склеивание пространств (136). 22.14. Основные поверхности (137).

§ 23. Проективные пространства 139

23.1. Вещественные проективные пространства (139). 23.2х. Комплексные проективные пространства (140). 23.3х. Кватернионные проективные пространства (140).

§ 24х. Конечные топологические пространства 142

24.1х. Теоретико-множественное отступление: расщепление транзитивного отношения на эквивалентность и порядок (142). 24.2х. Структура конечного топологического пространства (143). 24.3х. Симплициальные схемы (144). 24.4х. Барцентрическое подразделение частично упорядоченного множества (145).

§ 25х. Пространства непрерывных отображений 146

25.1х. Множества непрерывных отображений (146). 25.2х. Топологии в множестве непрерывных отображений (146). 25.3х. Топологические свойства пространств непрерывных отображений (147). 25.4х. Метризуемый случай (147). 25.5х. Связь с другими конструкциями (148). 25.6х. Отображения $X \times Y \rightarrow Z$ и $X \rightarrow C(Y, Z)$ (149).

Доказательства и комментарии 150

ГЛАВА 5х. Элементы топологической алгебры

§ 26х. Алгебраическое отступление: группы и гомоморфизмы 161

26.1х. Понятие группы (161). 26.2х. Аддитивные и мультипликативные обозначения (162). 26.3х. Гомоморфизмы (163). 26.4х. Подгруппы (164).

§ 27х. Топологические группы 165

27.1х. Определение топологической группы (165). 27.2х. Примеры топологических групп (166). 27.3х. Автогомеоморфизмы, делающие топологическую группу однородной (166). 27.4х. Окрестности (167). 27.5х. Аксиомы отделимости (168). 27.6х. Аксиомы счётности (168).

§ 28х. Конструкции 169

28.1х. Подгруппы (169). 28.2х. Нормальные подгруппы (170). 28.3х. Гомоморфизмы (170). 28.4х. Локальные изоморфизмы (171). 28.5х. Прямые произведения (171). 28.6х. Группы гомеоморфизмов (173).

§ 29х. Действия топологических групп 173

29.1х. Действие группы на множестве (173). 29.2х. Непрерывные действия (174). 29.3х. Пространства орбит (175). 29.4х. Однородные пространства (176).

Доказательства и комментарии 177

ЧАСТЬ II. Элементы алгебраической топологии

ГЛАВА 6. Гомотопии и фундаментальная группа

§ 30. Гомотопии 185

30.1. Непрерывные деформации отображений (185). 30.2. Гомотопия как отображение и как семейство отображений (185). 30.3. Гомотопность как отношение (186). 30.4. Прямолинейная гомотопия (187). 30.5. Отображения в звёздные множества (187). 30.6. Отображения из звёздных множеств (187). 30.7. Простенькие гомотопии (187). 30.8. Два естественных свойства гомотопий (188). 30.9. Связанные гомотопии (188). 30.10. Гомотопии и пути (188). 30.11. Гомотопии путей (189).

§ 31. Гомотопические свойства умножения путей 189

31.1. Умножение гомотопических классов путей (189). 31.2. Ассоциативность (189). 31.3. Единица (190). 31.4. Обратные элементы (190).

§ 32. Фундаментальная группа 191

32.1. Определение фундаментальной группы (191). 32.2. Почему индекс 1? (191). 32.3. Круговые петли (192). 32.4. Самые первые вычисления (192). 32.5. Фундаментальная группа произведения (193). 32.6. Односвязность (193). 32.7х. Фундаментальная группа топологической группы (195). 32.8х. Высшие гомотопические группы (195).

§ 33. Роль отмеченной точки 196

33.1. Предварительное описание роли отмеченной точки (196). 33.2. Перенос вдоль пути (196). 33.3. Свойства отображения T_* (197). 33.4. Роль пути (197). 33.5х. Перенос вдоль пути в топологической группе (197). 33.6х. В высших гомотопических группах (198).

Доказательства и комментарии 199

ГЛАВА 7. Накрытия и вычисление фундаментальной группы

§ 34. Накрытия 205

34.1. Определение накрытия (205). 34.2. Примеры накрытий (206). 34.3. Локальные гомеоморфизмы и накрытия (206). 34.4. Число листов накрытия (207). 34.5. Универсальные накрытия (208).

§ 35. Теоремы о накрывающих путях 208

35.1. Поднятие отображений (208). 35.2. Поднятие пути (208). 35.3. Поднятие гомотопии (209).

§ 36. Вычисление фундаментальных групп 209

36.1. Фундаментальная группа окружности (209). 36.2. Фундаментальные группы проективных пространств (210). 36.3. Фундаментальная группа букета окружностей (210). 36.4. Алгебраическое отступление: свободные группы (211). 36.5. Универсальное накрытие букета двух окружностей (212). 36.6х. Фундаментальные группы некоторых конечных пространств (214).

Доказательства и комментарии 215

Глава 8. Фундаментальная группа и отображения

§ 37. Индуцированные гомоморфизмы и их применения 219

37.1. Индуцированный гомоморфизм (219). 37.2. Основная теорема высшей алгебры (220). 37.3х. Обобщение теоремы о промежуточном значении (221). 37.4х. Степень точки относительно петли (222). 37.5х. Теорема Борсука–Улама (223).

§ 38. Ретракции и неподвижные точки 223

38.1. Ретракции и ретракты (223). 38.2. Фундаментальная группа и ретракции (224). 38.3. Неподвижные точки (225).

§ 39. Гомотопические эквивалентности 226

39.1. Гомотопическая эквивалентность как отображение (226). 39.2. Гомотопическая эквивалентность как отношение (226). 39.3. Деформационные ретракции (227). 39.4. Примеры гомотопических эквивалентностей (227). 39.5. Деформационные ретракции и гомотопические эквивалентности (228). 39.6. Стягиваемые пространства (228). 39.7. Фундаментальная группа и гомотопический тип (229).

§ 40. Накрытия и фундаментальная группа 229

40.1. Гомоморфизм, индуцированный проекцией (229). 40.2. Ещё раз о числе листов накрытия (230). 40.3. Иерархия накрытий (в узком смысле) (230).

§ 41х. Классификация накрывающих пространств 231

41.1х. Существование подчинений (231). 41.2х. Микроодносвязность (231). 41.3х. Существование накрытий (232). 41.4х. Действие фундаментальной группы в слое (233). 41.5х. Автоморфизмы накрытия (233). 41.6х. Регулярные накрытия (234). 41.7х. Подъём и накрытие отображения (235). 41.8х. Индуцированные накрытия (235). 41.9х. Высшие гомотопические группы накрывающих пространств (235).

Доказательства и комментарии 236

Глава 9. Клеточная техника

§ 42. Клеточные пространства 245

42.1. Определение клеточного пространства (245). 42.2. Первые примеры (247). 42.3. Дальнейшие примеры в размерности два (248). 42.4. Вложения в евклидовы пространства (249). 42.5х. Симплициальные пространства (250).

§ 43х. Топологические свойства клеточных пространств 250

§ 44. Клеточные конструкции	252
44.1. Эйлерова характеристика (252). 44.2. Комбинаторное сдвливание и его обобщение (252). 44.3х. Гомотопические эквивалентности клеточных пространств (253).	
§ 45. Одномерные клеточные пространства	255
45.1. Гомотопическая классификация (255). 45.2. Максимальные деревья (256). 45.3х. Разбивающие клетки (256). 45.4х. Деревья и леса (256). 45.5х. Простые пути (257).	
§ 46. Фундаментальная группа клеточного пространства	258
46.1. Одномерные клеточные пространства (258). 46.2. Образующие (258). 46.3. Соотношения (258). 46.4. Выписывание образующих и соотношений (260). 46.5. Фундаментальные группы основных поверхностей (260). 46.6х. Теорема Зейферта-ван Кампена (261). 46.7х. Теоретико-групповое отступление: свободное произведение с объединенной подгруппой (263). 46.8х. Дополнение к теореме Зейферта-ван Кампена (264).	
Доказательства и комментарии	266
Указания, комментарии, советы и ответы	281
Литература	353
Предметный указатель	354