

В. Д. БУДАЕВ, М. Я. ЯКУБСОН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

РГПУ им А.И. Герцена
библиотека № 3
естественно-математической
литературы

Допущено Учебно-методическим объединением
по направлениям педагогического образования
Министерства образования и науки РФ в качестве
учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 050200 —
«Физико-математическое образование»

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
МОСКВА
КРАСНОДАР
2012



ББК 22.161я73

Б 90

Будаев В. Д., Якубсон М. Я.

Б 90 Математический анализ. Функции одной переменной: Учебник. — СПб.: Издательство «Лань», 2012. — 544 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1186-3

Учебник предназначен для студентов математических факультетов педагогических высших учебных заведений. Особое место в изложении материала занимает подробное разъяснение и разбор основных, фундаментальных понятий. Кроме того, большое внимание уделяется тем вопросам, которые имеют непосредственное отношение к школьному курсу математики. Книга является первой из двухтомника «Математический анализ». Первый том посвящен изучению функций одной вещественной переменной.

Наряду со студентами педагогических специальностей и направлений учебник представляет интерес для студентов классических университетов и технических вузов, всех, кого интересует подробно обоснованный и понятный курс математического анализа.

ББК 22.161я73

Рецензенты:

Н. А. ШИРОКОВ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа математико-механического факультета СПбГУ; **В. П. ОДИНЕЦ** — доктор физико-математических наук, профессор КГПИ, лауреат государственной премии Республики Польша.

Зав. редакцией

физико-математической литературы **О. А. Митрофанова**

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10 от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»

lan@lanbook.ru; www.lanbook.com

192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.

Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 15.02.12.

Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 60×90^{1/16}.

Печать офсетная. Усл. п. л. 34,00. Тираж 1500 экз.

Заказ № 1246.

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография», филиал «Дом печати — ВЯТКА» в полном соответствии с качеством предоставленных материалов

610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36

<http://www.gipp.kirov.ru>, e-mail: order@gipp.kirov.ru

Обложка

Л. А. АРНДТ

Охраняется законом РФ об авторском праве. Воспроизведение всей книги или любой ее части запрещается без письменного разрешения издателя. Любые попытки нарушения закона будут преследоваться в судебном порядке.

© Издательство «Лань», 2012
© В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон, 2012
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Количество учебной литературы по математическому анализу, предлагаемой сегодня различными издательствами, достаточно велико. Однако большинство изданий предназначены для студентов либо классических университетов, либо технических вузов. Учебников, созданных непосредственно для студентов педагогических направлений и специальностей, немного. Между тем, обучение математическому анализу (и вообще математике) будущих учителей математики имеет свою ярко выраженную специфику.

Во-первых, объем и глубина математических знаний будущих учителей математики вовсе не обязаны быть такими же, как у студентов математических и физических факультетов классических университетов. Даже студенты технических вузов должны обладать массой сведений «рецептурного», алгоритмического характера, которые могут им пригодиться в практической деятельности, но вряд ли когда-либо пригодятся будущему школьному учителю.

Во-вторых, характер подачи материала в педагогических вузах должен быть принципиально иным по сравнению, например, с техническими вузами. Особую роль должно играть подробное разъяснение и разбор основных, фундаментальных понятий. Кроме того, большое внимание должно уделяться тем вопросам, которые имеют непосредственное отношение к школьному курсу математики (в частности, построение элементарных функций и их свойства, обоснование метода интервалов и т. д.).

Эти и другие особенности курса анализа для будущих учителей авторы старались учесть при написании предлагаемого вашему вниманию учебника. Был использован многолетний опыт и традиции преподавания математического анализа, накопленные на факультете математики Российского государственного педагогического университета (в прошлом — института) им. А. И. Герцена, где имеют честь работать оба автора. Эти традиции восходят к основателю факультета и первому заведующему кафедрой математического анализа — профессору Г. М. Фихтенгольцу, автору знаменитых учебников математического анализа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Множества. Язык математики. Отображения	8
§ 1.1. Множества. Операции над множествами	8
1.1.1. Основные понятия	8
1.1.2. Операции над множествами	10
§ 1.2. Высказывания и предикаты	12
1.2.1. Основные понятия	12
1.2.2. Логические связи	15
1.2.3. Импликация и эквиваленция	18
§ 1.3. О языке математики	19
1.3.1. Кванторы	19
1.3.2. О структуре определений и теорем	21
1.3.3. Некоторые логические законы	25
§ 1.4. Отображения и функции	28
1.4.1. Основные понятия	28
1.4.2. Образ и прообраз множества	30
1.4.3. Суперпозиция отображений	31
1.4.4. Сужение отображения	32
1.4.5. Инъективные, сюръективные и биективные отображения	33
1.4.6. Обратное отображение	34
1.4.7. Монотонные функции. Монотонность и обратимость	36
§ 1.5. Бинарные отношения	37
1.5.1. Декартово произведение. Бинарное отношение	37
1.5.2. Разбиения. Отношение эквивалентности	40
1.5.3. Абстрактное определение отображения	43
Глава 2. Действительные числа	45
§ 2.1. Аксиоматическое построение теории действительных чисел	45
2.1.1. Об аксиоматическом методе в математике	45
2.1.2. Аксиомы действительных чисел	47
2.1.3. Некоторые простейшие следствия аксиом	51
2.1.4. Плотность множества рациональных чисел в \mathbb{R} . Дополнение к аксиоме полноты	56
2.1.5. Существование иррациональных чисел	59
2.1.6. Понятие об изоморфизме различных реализаций множества действительных чисел	62
§ 2.2. Ограниченность	66
2.2.1. Числовые промежутки	66
2.2.2. Максимум и минимум числового множества	67
2.2.3. Ограниченные множества	68
2.2.4. Супремум и инфимум	70
2.2.5. Существование супремума и инфимума	72
2.2.6. Принцип стягивающихся отрезков	74
2.2.7. Некоторые свойства точных верхних и нижних граней	75
2.2.8. Ограниченные функции	77
§ 2.3. Топологические понятия на числовой прямой	80
2.3.1. Окрестности	80

2.3.2. Внутренние, внешние и граничные точки	82
2.3.3. Открытые и замкнутые множества	84
2.3.4. Расширенная числовая прямая	86
2.3.5. Точки сгущения	88
Глава 3. Пределы	92
§ 3.1. Понятие предела	92
3.1.1. Общее определение предела	92
3.1.2. Определения предела на языке неравенств	94
3.1.3. Непрерывность функции в точке	97
3.1.4. Предел числовой последовательности	98
§ 3.2. Общие теоремы о пределах	101
3.2.1. Единственность предела	101
3.2.2. Предел сужения. Односторонние пределы	101
3.2.3. Подпоследовательности	105
3.2.4. Существование конечного предела и ограниченность	106
3.2.5. Предел суперпозиции	108
§ 3.3. Теоремы о пределах, связанные с упорядоченностью \mathbb{R}	111
3.3.1. Теорема о стабилизации знака функции, имеющей предел	111
3.3.2. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах	112
3.3.3. Теорема о пределе промежуточной функции	114
§ 3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие. Операции над пределами	116
3.4.1. Бесконечно малые: определения, примеры	116
3.4.2. Свойства бесконечно малых функций	118
3.4.3. Критерий существования конечного предела	120
3.4.4. Алгебраические операции над пределами	120
3.4.5. Бесконечно большие функции	123
3.4.6. Понятие о неопределенностях	127
3.4.7. О-символика	128
§ 3.5. Эквивалентность	130
3.5.1. Эквивалентные функции, теорема о замене на эквивалентные на бесконечности	130
3.5.2. Поведение многочленов и рациональных функций на бесконечности	132
3.5.3. Сравнение функций	134
§ 3.6. Монотонность и существование предела	136
3.6.1. Теорема о существовании предела монотонной функции	136
3.6.2. Теорема Вейерштрасса	138
3.6.3. Примеры	140
3.6.4. Число « ϵ »	142
§ 3.7. Дополнительные сведения о последовательностях	144
3.7.1. Теорема Больцано–Вейерштрасса	144
3.7.2. Предельные точки	147
3.7.3. Верхний и нижний пределы	149
3.7.4. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши	151
3.7.5. Определение предела по Гейне	155
Глава 4. Непрерывность	159
§ 4.1. Непрерывность функции в точке	159
4.1.1. Определения	159
4.1.2. Непрерывность сужения. Односторонняя непрерывность	162
4.1.3. Локальная ограниченность непрерывной функции	163
4.1.4. Стабилизация знака непрерывной функции	163
4.1.5. Алгебраические действия над непрерывными функциями	164
4.1.6. Непрерывность суперпозиции	164
§ 4.2. Точки разрыва	166
4.2.1. Понятие точек разрыва, их классификация	166
4.2.2. Примеры	168
4.2.3. Доопределение функции по непрерывности	169
§ 4.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке	171
4.3.1. Непрерывность функции на множестве	171
4.3.2. Первая теорема Вейерштрасса	173

4.3.3.	Вторая теорема Вейерштрасса	174
4.3.4.	Теорема Больцано–Коши. Теорема о промежуточном значении	175
4.3.5.	Применения теоремы о промежуточном значении	177
§ 4.4.	Образы и полные прообразы множеств при непрерывных отображениях	180
4.4.1.	Образ отрезка при непрерывном отображении	180
4.4.2.	Образ промежутка при непрерывном отображении	182
4.4.3.	Полные прообразы множеств при непрерывных отображениях	183
§ 4.5.	Непрерывность, монотонность и обратимость	185
4.5.1.	Критерий обратимости непрерывной функции	185
4.5.2.	Теорема о непрерывности обратной функции	187
§ 4.6.	Равномерная непрерывность. Продолжение по непрерывности	188
4.6.1.	Понятие равномерно непрерывной функции	188
4.6.2.	Теорема Кантора	191
4.6.3.	Другая форма определения равномерной непрерывности	192
4.6.4.	Равномерная непрерывность и фундаментальность	194
4.6.5.	Продолжение по непрерывности	195
Глава 5.	Элементарные функции	198
§ 5.1.	Понятие об элементарных функциях	198
§ 5.2.	Построение показательной, логарифмической и степенной функций	200
5.2.1.	Показательная функция с рациональным показателем степени	200
5.2.2.	Продолжение по непрерывности показательной функции	203
5.2.3.	Логарифмическая и степенная функции	206
§ 5.3.	Непрерывность элементарных функций	209
§ 5.4.	Замечательные пределы	212
5.4.1.	Первый замечательный предел	212
5.4.2.	Второй замечательный предел	216
5.4.3.	Поведение логарифмической, показательной и степенной функций в конечных точках	218
5.4.4.	Поведение логарифмической, показательной и степенной функций на бесконечности	220
5.4.5.	Шкала бесконечно больших функций	222
5.4.6.	Предел степенно-показательной функции	224
Глава 6.	Дифференциальное исчисление	226
§ 6.1.	Основные понятия	226
6.1.1.	Линеаризация. Дифференцируемые функции. Производная и дифференциал	226
6.1.2.	Дифференцируемость и непрерывность	229
6.1.3.	Второе определение производной	230
6.1.4.	Механический и геометрический смысл производной. Касательная	233
6.1.5.	Дифференцируемость на промежутке	235
§ 6.2.	Техника дифференцирования	236
6.2.1.	Производная суммы, разности, произведения и частного	236
6.2.2.	Производная суперпозиции	238
6.2.3.	Производные основных элементарных функций	239
6.2.4.	Производные четных и нечетных функций	241
6.2.5.	Производная обратной функции	243
6.2.6.	Производные обратных тригонометрических функций	245
6.2.7.	Дифференцирование элементарных функций. Таблица производных	245
6.2.8.	Логарифмическое дифференцирование. Производная степенно-показательной функции	248
§ 6.3.	Производные и дифференциалы высших порядков	250
6.3.1.	Производные высших порядков	250
6.3.2.	Действия над производными высших порядков. Формула Лейбница	251
6.3.3.	Дифференциалы высших порядков	255

§ 6.4.	Некоторые сведения о дифференциалах	256
6.4.1.	Действия над дифференциалами	256
6.4.2.	Инвариантность первого дифференциала и неинвариантность высших дифференциалов	257
6.4.3.	Приближенные вычисления с помощью дифференциала	258
§ 6.5.	Функции, заданные параметрически	259
6.5.1.	Параметрическое задание кривых. Примеры	259
6.5.2.	Параметрическое задание функций	262
6.5.3.	Производная функции, заданной параметрически	263
6.5.4.	Гиперболические функции	264
Глава 7.	Основные теоремы дифференциального исчисления	266
§ 7.1.	Основные теоремы дифференциального исчисления	266
7.1.1.	Теорема Ферма	266
7.1.2.	Теорема Ролля	267
7.1.3.	Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений	269
7.1.4.	Некоторые следствия из теоремы Лагранжа	271
7.1.5.	Теорема Коши	273
7.1.6.	Теорема Дарбу	275
§ 7.2.	Правило Лопиталья	276
7.2.1.	Правило Лопиталья для неопределенности « $\frac{0}{0}$ »	276
7.2.2.	Правило Лопиталья для неопределенности « $\frac{\infty}{\infty}$ »	278
7.2.3.	Некоторые комментарии к применению правила Лопиталья	281
§ 7.3.	Формула Тейлора	283
7.3.1.	Полином Тейлора	283
7.3.2.	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа	285
7.3.3.	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано	288
7.3.4.	Другие формы записи формулы Тейлора и остаточного члена. Формула Маклорена	290
7.3.5.	Разложение некоторых элементарных функций по формуле Тейлора–Маклорена	291
7.3.6.	Некоторые приложения формулы Тейлора	294
§ 7.4.	Монотонность и экстремумы	298
7.4.1.	Условия монотонности	298
7.4.2.	Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума	301
7.4.3.	Достаточное условие экстремума (по первой производной)	303
7.4.4.	Достаточные условия экстремума (по высшим производным)	306
§ 7.5.	Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	308
7.5.1.	Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	308
7.5.2.	Наибольшее и наименьшее значения функции на интервале	309
§ 7.6.	Выпуклые функции	312
7.6.1.	Понятие выпуклой функции, геометрическая интерпретация	312
7.6.2.	Различные формы определения выпуклой функции	314
7.6.3.	Условия выпуклости дифференцируемой функции	315
7.6.4.	Неравенство Йенсена	319
7.6.5.	Точки перегиба	322
§ 7.7.	Асимптоты	325
7.7.1.	Общие соображения	325
7.7.2.	Вертикальные асимптоты	325
7.7.3.	Невертикальные (наклонные) асимптоты	326
7.7.4.	Схема исследования функций. Построение графиков	329

Глава 8. Интегральное исчисление	336
§ 8.1. Основные понятия	336
8.1.1. Первообразная и неопределенный интеграл	336
8.1.2. Свойства первообразной и неопределенного интеграла	339
8.1.3. Интегралы от основных элементарных функций	340
§ 8.2. Основные методы интегрирования	341
8.2.1. Простейшие методы интегрирования	341
8.2.1.1. Сведение к табличным интегралам с помощью элементарных преобразований	341
8.2.1.2. Разложение на простейшие дроби	342
8.2.1.3. Выделение полного квадрата	342
8.2.1.4. Выделение целой части	343
8.2.2. Метод замены переменной	343
8.2.3. Метод интегрирования по частям	346
8.2.4. Таблица интегралов	348
§ 8.3. Интегрирование рациональных функций	349
8.3.1. Задача интегрирования в конечном виде	349
8.3.2. Интегрирование рациональных функций. Простейшие случаи	350
8.3.3. Разложение рациональных функций на простые дроби	351
8.3.4. Интегрирование простых дробей	353
§ 8.4. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций	356
8.4.1. Интегрирование некоторых тригонометрических функций	356
8.4.2. Интегрирование некоторых иррациональных функций	358
Глава 9. Определенный интеграл	362
§ 9.1. Основные понятия	362
9.1.1. Задача о площади криволинейной трапеции	362
9.1.2. Определенный интеграл. Определение	364
§ 9.2. Условия интегрируемости	366
9.2.1. Необходимое условие интегрируемости	366
9.2.2. Суммы Дарбу	366
9.2.3. Критерии интегрируемости	369
9.2.4. Классы интегрируемых функций	372
§ 9.3. Свойства определенного интеграла	374
9.3.1. Свойства, выражаемые равенствами	374
9.3.2. Свойства, выражаемые неравенствами	376
9.3.3. Теорема о среднем	377
§ 9.4. Основная формула интегрального исчисления. Вычисление определенных интегралов	378
9.4.1. Интеграл с переменным верхним пределом	378
9.4.2. Формула Ньютона–Лейбница	380
9.4.3. Метод замены переменной	380
9.4.4. Метод интегрирования по частям	382
§ 9.5. Несобственные интегралы	383
9.5.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Определение и свойства	383
9.5.2. Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций	385
9.5.3. Сходимость несобственных интегралов от функций произвольного знака	387
9.5.4. Несобственные интегралы от неограниченных функций	389

Глава 10. Приложения определенного интеграла	392
§ 10.1. Площадь плоской фигуры	392
10.1.1. Квадрируемые фигуры	392
10.1.2. Площадь криволинейной трапеции	396
10.1.3. Площадь фигур, ограниченных параметрически заданными кривыми	399
10.1.4. Площадь криволинейного сектора	401
§ 10.2. Объем тела	403
10.2.1. Кубируемые тела	403
10.2.2. Объем тела, имеющего заданные сечения	404
10.2.3. Объем тела вращения	407
§ 10.3. Длина кривой	408
10.3.1. Спрямолинейные кривые	408
10.3.2. Спрямолинейность гладкой кривой. Длина явно заданной кривой	412
10.3.3. Длина кривой, заданной параметрически	414
10.3.4. Длина кривой в полярных координатах	416
§ 10.4. Применение интеграла к физическим задачам	417
10.4.1. Аддитивная функция промежутка	417
10.4.2. Плотность АФП	418
10.4.3. Примеры	420
Глава 11. Числовые ряды	424
§ 11.1. Основные понятия. Простейшие свойства числовых рядов	424
11.1.1. Основные понятия	424
11.1.2. Примеры	427
11.1.3. Простейшие свойства сходящихся рядов	430
§ 11.2. Необходимый признак. Критерий Коши	433
11.2.1. Необходимый признак сходимости рядов	433
11.2.2. Критерий Коши	434
11.2.3. Ряды и последовательности	435
§ 11.3. Положительные ряды. Признаки сравнения	435
11.3.1. Положительные ряды	435
11.3.2. Первый признак сравнения	437
11.3.3. Второй признак сравнения	439
§ 11.4. Признаки Даламбера и Коши	441
11.4.1. Признак Даламбера	441
11.4.2. Признак Коши	443
11.4.3. Интегральный признак Коши–Маклорена	444
§ 11.5. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды	448
11.5.1. Абсолютная и условная сходимость	448
11.5.2. Признаки абсолютной сходимости рядов	450
11.5.3. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница	452
11.5.4. Об исследовании на сходимость знакопеременных рядов	459
§ 11.6. Некоторые свойства сходящихся рядов	460
11.6.1. Закон ассоциативности	461
11.6.2. Закон коммутативности для положительных рядов	462
11.6.3. Закон коммутативности для знакопеременных рядов	464
11.6.4. Закон дистрибутивности. Умножение рядов	468
Глава 12. Функциональные и степенные ряды	472
§ 12.1. Функциональные последовательности и ряды: основные понятия	472
12.1.1. Функциональные последовательности	472
12.1.2. Функциональные ряды	473
12.1.3. Исследование функциональных рядов на сходимость	474
§ 12.2. Равномерная сходимость	477
12.2.1. Поточечная и равномерная сходимость	477
12.2.2. Критерий Коши равномерной сходимости рядов	481
12.2.3. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов	482
§ 12.3. Основные свойства равномерно сходящихся рядов	484

12.3.1. Постановка вопроса	484
12.3.2. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда	485
12.3.3. Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов	488
12.3.4. Почленное дифференцирование равномерно сходящихся рядов	489
§ 12.4. Степенные ряды	491
12.4.1. Понятие о степенных рядах	491
12.4.2. Теорема Абеля	493
12.4.3. Радиус сходимости и интервал сходимости	494
12.4.4. Как найти радиус сходимости степенного ряда?	496
§ 12.5. Основные свойства степенных рядов	498
12.5.1. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда	498
12.5.2. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов	500
§ 12.6. Ряды Тейлора	503
12.6.1. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора	503
12.6.2. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разложимой в ряд Тейлора	506
12.6.3. Условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в ряд Тейлора	508
12.6.4. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора–Маклорена	510
12.6.5. Примеры разложения элементарных функций в ряд Тейлора	517
12.6.6. Некоторые простейшие применения рядов Тейлора	518
§ 12.7. Обобщенные методы суммирования	523
12.7.1. Общие сведения	523
12.7.2. Метод степенных рядов (метод Пуассона–Абеля)	524
12.7.3. Метод средних арифметических (метод Чезаро)	528
12.7.4. Обобщенное суммирование произведения рядов	529
Список литературы	531
Предметный указатель	532
Именной указатель	537