И. И. Костырев

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕДИКАТА АННУЛИРОВАНИЯ ПРОДА

Кафедра алгебры.
Научный руководитель - Н. Л. Гордеев

Предикат аннулирования *a* был рассмотрен в работе[1] *((a,Ь) ea<=>aЬ = Ъa-a).* Результатом стало получение необходимых и достаточных условий финитной аппроксимируемости многообразий полугрупп относительно указанного предиката. Настоящая статья посвящена изучению предиката аннулирования II рода *ia,* получающегося из *a* сужением области определения: *(a, Ъ) e ia <=> ab = Ъa = a,* $Ъ^2$ *= Ъ.*

Несмотря на внешнее сходство, это совершенно другой предикат, и многообразия, финитно аппроксимируемые относительно *ia,* устроены отличным образом по отношению к рассмотренным ранее. В данном исследовании также затронут алгоритмический аспект проблемы.

Определения и обозначения. В настоящей работе будем использовать обозначения, введенные в статье[3].

Кроме того, введем следующие определения.

L\ (R\) - двухэлементная полугруппа левых (правых) нулей с внешне присоединенной единицей.

SQ = {a, Ъ, c, 0\ab=ba = c}, Sn = {a, x, e, 0 \ xe = a, e^2 *-e,ae- a),*

S2I = {x, e, f, g I *ef=/ fe = e, xe = e, ex =e,fx = e, xf =f, xg = g, gx =f, eg = g, ge = e,* *fg=g,gf=f>*e^2 *=* *e,f=f,*g^2*=g,*x^2 *=* *e}.*

S.r- полугруппа, антиизоморфная *S..ii, i* = 1, 2.

Все неуказанные произведения считаем равными 0.

Вспомогательные утверждения. *Лемма!.* Любая полугруппа, финитно аппроксимируемая относительно предиката аннулирования II рода, финитно аппроксимируема относительно предиката вхождения в двусторонний идеал.

Доказательство.

Пусть а *eSua el,*где/-двусторонний идеал полугруппы *S.*

Используем естественный гомоморфизм *(р* из *S* в *S/1.* Имеем:

<р(а) =а, <р(1) =0,прнэтоы<р(а) -<р(1) Ф <р (а) и *<р (I)* - идемпотент, то есть данные элементы не находятся в отношении аннулирования II рода. Следовательно, существует гомоморфизм у в конечную полугруппу:

у/(д>(а)) • *у/(ф (I)) *цг(<р(а)).*

Таким образом, при гомоморфизме *а-у/ф* имеет место *<т(а) - у/(а),* ***ет**(1) = 0* и *а(а) € а(1),* из чего следует финитная аппроксимируемость полугруппы £ относительно предиката вхождения в двусторонний идеал.

***Лемма** 2.* Класс полугрупп, финитно аппроксимируемых относительно предиката аннулирования, замкнут относительно декартова произведения и подполугрупп.

Доказательство.

1. Пусть S^r S^2 *eFia (а, Ъ), (с, d) eS,xS²* и *[(а, Ь), (с, d)]* е *ia.* Тогда *(а, с)<£ ia* или *(b, d)e ia.* Пусть для определённости *(а, с)& ia.* Тогда существует гомоморфизм *фъ* конечную полугруппу, при котором *(<р(а), <р(с)) 0ia.*

Рассмотрим проекцию *у/* из 5ух5, в S^r Получаем:

(у/ ср[(а, Ъ)], у/ (р[(с, d)])£ ia, из чего вытекает справедливость утверждения I.

(данное утверждение справедливо для произведения любого множества полугрупп; доказательство проводится аналогично).

2. Пусть *а, Ъ eS'cS'* и *(a,b)0 ia.* Тогда для *а* и *Ь* (как для элементов *Sf)* существует гомоморфизм *ф*в конечную полугруппу: *(ф (а), ф(Ь))0 а.* Следовательно, *S'eFia.*

***Лемма** 3.* Любая полуструктура финитно аппроксимируема относительно предиката аннулирования II рода.

Доказательство.

Возьмём два произвольных элемента *х* и *у,* таких, что ху *ф* х (а значит *(х, у) g id).* Существует два случая: *х, у* сравнимы или несравнимы.

а) *х* и *у* несравнимы.

Пусть fc> *А = {z е S \z < х* или *z, х* несравнимы} и В = *S\A.* Зададим отображение *у/* в двухэлементную полуструктуру: *у/(а) =0* для всех *а* е *А* и *у/(Ъ) = 1* для всех *ЬеВ.* Очевидно, что *у/* гомоморфизм и *у/(х)-у/(у) = у/(у)-у/(х) = 0Фу/(х).*

б) *у < х* (если *х < у,* то *ху = х).*

Пусть В = { г е 5 ' | х < *z),А= S\(B\j{x)).* Зададим отображение *ф* в трёхэлементную полугруппу *{0, 1, х}: фф) = 1* для всех *be В, ф(А) = 0* для всех *а е А, ф (х) = х.* Далее аналогично случаю (а).

***Лемма** 4.* Всякая прямоугольная связка финитно аппроксимируема относительно предиката аннулирования II рода.

Доказательство.

Пусть *S* - прямоугольная связка. Представим 5" как произведение полугрупп левых и правых нулей: *S =LxR.*

Если *[(а, с), (b, d)] е ia,* то а *ф Ъ* или с *Ф* d. Пусть для определённости *а Ф* Ь. Рассмотрим проекцию *LxR* на *L.*

Ф [(а, с)] = а,ф [(b, d)] = b и *(a, b) 0 ia.*

Зададим отображение *у/т Lb* трёхэлементную полугруппу левых нулей *{а, Ъ,* z}: *у/(а) = а, yAJb) - b, уКх) - z* для всех *xeL\{a, b).*

Очевидно, что *у/* - гомоморфизм, при котором *(уХа), yAJb)) 0 ia.*

Таким образом, ^-гомоморфизм, доказывающий финитную аппроксимируемость *S* относительно предиката аннулирования II рода.

***Лемма** 5.* Любая группа финитно аппроксимируема относительно предиката аннулирования И рода.

Доказательство.

Поскольку в группе единственный идемпотент - *1,* все пары *{а, 1) е ia.* Вследствие отсутствия пар элементов, не находящихся в этом отношении, любая группа оказывается финитно аппроксимируемой относительно і6 по определению, так как во всех случаях посылка ложна.

***Лемма** 6.* Любая вполне простая полугруппа финитно аппроксимируема относительно предиката аннулирования II рода.

Доказательство.

Необходимость. Пусть *S* - вполне простая полугруппа. Тогда *S* является прямоугольной связкой групп[4].

Рассмотрим *x* е *S, у е Es* .

а) *х* е *А, у* е *В,* где *А, В* - различные группы из прямоугольной связки.

Пусть *ср* - гомоморфизм, отображающий все группы в их единицы, то есть *(р(А)* = *1А, (р(В)* = *1В.* Тогда *<р(S)* - прямоугольная связка, которая финитно аппроксимируема относительно *ia* по лемме 4.

б) *х, у* находятся в одной группе. Тогда *у* = 1 и утверждение выполнено согласно лемме 5.

Лемма *7.* Если $xy \,\bar{=}\, x^{n+l}y^{n+l}$ е 7ТЕ), то $xy = (xy)^{n+l}$ е 7ДЕ).

Доказательство.

Из $xy = x^{n+}{*}y^{n+\{}$ *е T(V)* следует, что $x^2 = x^2x^{2n}$ б *р,* то есть элемент $.г^2$ имеет двустороннюю единицу. Следовательно $xy = x^{n+l}y^{n+l}$ имеет левую единицу, обозначим ее как ***е.*** Тогда $x\bar{y}$ - $e(xy)=e^{\prime\prime+,}(xy)^{n+1}$-$(xy)^{\prime\prime+l}$. Лемма доказана.

Лемма *8.* Полугруппа *Sn* не является финитно аппроксимируемой относительно предиката аннулирования **II** рода.

Доказательство.

(а, Ь) <£ *ia,* поскольку *аЪ* = *Ъ* и *Ъа* = *а.* Пусть т - конгруэнция на *Sn* конечного индекса. Тогда *(n, т) е х* для некоторых *п, те. N (п Ф т),* из чего вытекает *[(l,ri)-n,(l,ri)m] е* тто есть *(а, b)* е т. Следовательно, *Su* ё *Fia.*

Лемма 9. Полугруппа *Slr* не является финитно аппроксимируемой относительно предиката аннулирования.

Доказывается аналогично лемме 8.

Лемма 10. Пусть *V* с *Fia.* Тогда $xy = x^{n+}y^{+1}$ € 7(Е).

Доказательство.

Пусть Fez *Fia.* Тогда по лемме ! Ее *FI.* Пользуясь результатами[4], получаем: V с $[xy=(xy)^{n+l}]$, или Vс $[xy=xy?^{+l},axy=ay''xy]$, или V с $[xy=x^{\prime\prime+i}y,yxa=yxy''a]$. Согласно лемме 10, *Sn £ Fia,* поэтому существует тождество *и* = v е Г(Е)\Т(5'Л). Из определения *Su: г2(и) Ф* г2(v), а значит, из *и = v* следует

$txy = sy^2$ *е* 77Е) (1), *t, s е П(х, у).*

Пусть Е е $[xy=(xy)^{n+}Ч,$ *S е V,x,yeS.* Тогда *xyt, ху* лежат в одной вполне простой полугруппе S^5, откуда *ху = wxytxy, w* е *S.* Из полученного равенства и (1) следует

$xoy\text{-}\bar{x}oy^{n*x}$ *е* 7ДЕ) (2).

Из *SJr* g *Fia* двойственным образом получается, что $xoy=x^{n+l}oy$ *е T(V).*

Таким образом, в этом случае мы приходим к $xy=x^{\prime\prime+i}y^{n+l}$ *е* 7ДЕ).

Рассмотрим случай *V cz* $[xy=x^{\prime\prime+1}y,$ *уха=ухy"а].* Воспользуемся тождеством (1), выбрав в качестве *t* слово л:":

$txy = sy^2 = s\text{-}yy = sy^{\prime\prime+l}y \,\bar{=}\, sy^2y'' = txy^{\prime\prime+l};$

$xy = x^{n+l}y = txy = txy^{n+1} = x''xy^{\prime\prime+i} = x^{n+}y^{+1},$

что и требовалось получить. Случай *V* с $[xy=x^{nH},\ axy=ay''xy]$ рассматривается двойственным образом.

Лемма доказана.

Следствие. Отображение $g\colon x \sim> x^{\prime\prime+1}$ является гомоморфизмом *(х, у е S е VczFia).*

Лемма 11. Если 5" - идемпотентная полугруппа, то *S* е *Fia.*

Доказательство.

Идемпотентная полугруппа является полуструктурой прямоугольных связок. Существует два случая.

а) Элементы *а, b е S* лежат в одной прямоугольной связке, которая финитно аппроксимируема относительно предиката аннулирования II рода по лемме 4.

б) Элементы *а, be* Улежат в разных прямоугольных связках.

Тогда воспользуемся гомоморфизмом *<р,* отображающим прямоугольные связки в один элемент: *<p(S) = sр* где *st е St,* при этом *<р(а)*- *а, <рф)* = *Ъ.* Мы получили, что <p(S) - полуструктура, и, пользуясь леммой 3, завершаем доказательство леммы.

Лемма 12. Пусть *S е V.* Тогда полугруппы S/S^2, $\tilde{S}$ е *Fia,* где $\tilde{S} = g(S),$ где $g\colon x \to x^{n+>}$.

Доказательство.

S/S^2-полугруппа с нулевым умножением, поэтому *(а, b) е ia* только в том случае, если *(а, Ь) = (0, 0).* Кроме того, единственным идемпотентом этой полугруппы является 0. Если *(а, 0)* г *ia,* мы можем воспользоваться гомоморфизмом *у/в* двухэлементную полугруппу *{a, 0}* с нулевым умножением: *уЩ ∸ 0, yAS\{0}) = a.* Следовательно, S/S^2 е *Fia.*

Рассмотрим полугруппу^. Она финитно аппроксимируема относительно предиката аннулирования второго рода как подполугруппа *S* (лемма 2).

Лемма 13. Пусть *S е V е Fia и § = g(S),* где *g: x -» x"^{+l}*. Тогда *S a* $S/S^2 x§'$.

Доказательство.

Зададим отображение *цг.* x -> *(f(x), g(x)),* где/- естественный гомоморфизм из *S* в SIS^1.

Покажем, что *ц/* иньективно. Пусть *a, Ъ е Sna^b.*

l)a,be S\ST: Тогда *цАа) = (a, a"^{+l}) * ф, Ь"^{+x}) = уф),* поскольку а * Ъ.

2) *a е* ShS^2, *b е* S^2. В этом случае *цАа) = (a, a"^{+l}), yAЬ) = (O,* Ь^{л+1}). Здесь также *уАг) Ф yj(b),* так как *a * 0.*

3) *a, b* е S^2. Из условия следует, что *a ~ xy, b-ūv* для некоторых *x, y, u, v е S.* Используя тождество *xy ∸x"^{+l}y"*^{x}* тот факт, что *g* - гомоморфизм, получим:

цАа) = (0, a"^{+l}) = (O, (xy)^{n+}>) = (0, x"^{+l}y"^{+)}) = (0, xy) = (0, a) = a.

Аналогично: *уф) ∸ Ъ.*

Таким образом, и здесь для двух неравных элементов мы получили неравные образы. Инъективность проверена для всех случаев, а это и доказывает утверждение леммы.

Лемма 14. *V, R} $ V.*

Доказательство.

Пусть *V ∉ V.* Тогда *Var(L^)* с *V,* из чего по лемме 2 следует, что *Var(L^t) е Fia.* Пользуясь леммой Кублановского[6], получаем, что

axyb = ayxb е *T(Var(LJ).*

Но данное тождество не выполняется в *V,* т. е. мы пришли к противоречию.

Для *R'* рассуждения проводятся аналогичным образом.

Лемма 15. В S выполнено тождество *(axyb)" = (ayxb)".*

Доказательство.

По теореме Петрича[7], $\tilde{S}$ с]J[S,° , где *Sj* - вполне простые полугруппы из *V.* Отсюда следует, что в $\tilde{S}$ выполнено тождество *(axyb)" = (ayxb)".* Это тождество также выполнено в S/S^2, как полугруппе с нулевым умножением. Далее, поскольку 5 <= $S/S^2 x \tilde{S}$, делаем вывод, что указанное тождество выполнено и в S.

Основная теорема. Для многообразия полугрупп *V* следующие условия эквивалентны.

1. *VeFia.*

l.Vcz (Xy = x"^{+}y^{+|}, *(axyb)"= (ayxb)"].*

3. Кфинитно аппроксимируемо относительно предиката вхождения в односторонний идеал.

4. ^не содержит полугруппы: *Sff S!f S2P L^b, R^b, S^{lr}, S^{2r}.*

Доказательство.

1 => 2. Вытекает из лемм 1-15.

2 => 1. Пусть *Vcz [xy = x^{n+l}y"^{+l}, (axyb)" = (ayxb)"] и S е V.*

Рассмотрим гомоморфизм *S-»* $S/S^2 * \tilde{S}$. S/S^2 *е Fia.* Рассмотрим $\tilde{S}$.

Поскольку тождество *(axyb)" ∸ (ayxb)"* выполнено в $\tilde{s}$, но не выполнено в L^1, R^1, то, пользуясь леммой Петрича, делаем вывод о том, что $\tilde{S}$ с П ^5-°, где S, - вполне простые полугруппы, которые финитно аппроксимируемы относительно предиката аннулирования второго рода по лемме 6.

Отсюда следует, что § е *Fia.* Далее, по лемме 2, S с $S/S^2 * \tilde{S}$ е *Fia.*

2 о 3. Доказательство данного утверждения приведено в работе[8].

3 о 4. Вытекает из результатов[9].

Следствие 1. Если многообразие *V* задано конечным набором тождеств, то за конечное число шагов можно проверить, является ли оно финитно аппроксимируемым относительно предиката аннулирования второго рода.

Следствие 2. Если в полугруппе выполнены тождества *xy = x"^{+x}y"^{+}\ (axyb)" = (ayxb)",* то в ней алгоритмически разрешима проблема предиката *ia.*

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] О финитной аппроксимируемости многообразий полугрупп относительно предиката аннулирования [текст] / И. И. Костырсв; М-во образования Рос. Федерации, РГПУ им. А. И. Герцена. М., 2005. 19 с. Библиогр.: с. 19. Деп. в ВИНИТИ, № 1428 - В2005.

[2] Там же.

[3] *Petrich, M.* Introduction to semigroups. Pennsylvania State University. 1973.

[4] *Кублановский С. И.* Финитная аппроксимируемость и алгоритмические вопросы // Современная алгебра: (Группоиды и их гомоморфизмы): Межвуз. сб. науч. тр. / Ленингр. пед. ии-т им. А. И. Герцена: [отв. ред. Е. С. Ляпин]. Л.: ЛГПИ, 1980. 160 с.

[5] Там же.

[6] *Кублановский С. И.* Финитная аппроксимируемость и алгоритмические вопросы // Современная алгебра: 0: Межвуз. Сб. науч. Тр. / Ленингр. пед. ин-т им. А. И. Герцена: [отв. ред. Е. С. Ляпин]. Л.: ЛГПИ, 1983. 160 с.

[7] *Petrich, M.* Introduction to semigroups. Pennsylvania State University. 1973.

[8] *Кублановский С. И.* Финитная аппроксимируемость и алгоритмические вопросы // Современная алгебра: (Полугрупповые конструкции): Межвуз. сб. науч. тр. / Ленингр. пед. ин-т им. А. И. Герцена: [отв. ред. Е. С. Ляпин]. Л.: ЛГПИ, 1983. 160 с.

[9] Там же.