Л. Е. Абрамов

ЭНТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМ

Приведен новый подход к исследованию некоторых математических проблем. Доказаны две теоремы (теорема 1 и теорема 2), применимые в теории чисел. В доказательстве теорем использован энтропийный метод. Одна из теорем применена к исследованию справедливости гипотезы Гольдбаха.

L. Abramov

THE ENTROPY APPROACH TO SOLVING SOME MATHEMATICAL PROBLEMS

A new approach to researching some mathematical problems is suggested. Two theorems (theorem 1 and theorem 2) applicable to the theory of numbers are proven. The entropy method is used for the theorems. One of the theorems is applied to researching the hypothesis of Goldbach.

Энтропийный метод является обобщением метода Больцмана, используемого в статистической физике, и широко применяется в вероятностных задачах различных областей исследований [1]. Энтропийный метод, как и метод Больцмана, до недавнего времени не имел строгого обоснования. Известно, что предположение, выдвинутое в свое время Л. Больцманом для обоснования метода, приводит к противоречиям [2].

Строгое обоснование энтропийного метода приведено в работе [3], согласно которой этот метод вытекает из свойств полиномиального распределения.

Вероятность того, что n попарно несовместных событий $E_1, E_2, ..., E_n$ с вероятностями $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_n$ произойдут $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ раз соответственно в результате Q, ($\sum_{i=1}^{n} Y_i = Q$) независимых повторных испытаний, описывается, как известно, полиномиальным распределением

$$p(\bar{y}) = W(\bar{y}) p_1(\bar{y}), \tag{1}$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ — случайный n — мерный вектор, $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ — значение случайного вектора $\bar{y}$, $W(\bar{y}) = \dfrac{Q!}{y_1! y_2! ..., y_n!}$ — полиномиальный коэффициент,

$$p_1(\bar{y}) = \Theta_1^{y_1} \Theta_2^{y_2} ... \Theta_n^{y_n} .$$

Полиномиальное распределение (1) задаёт также вероятность макросостояния статистической системы с Q произвольными элементами, случайным образом и независимо друг от друга замещающими состояния $E_1, E_2, ..., E_n$ с вероятностями $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_n$ соответственно. Случайный вектор $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ задаёт в этом случае числа элементов $y_1, y_2, ..., y_n$ в состояниях $E_1, E_2, ..., E_n$ соответственно. Значение $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ случайного вектора $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ соответствует макросостоянию системы. Полиномиальный коэффициент $W(\bar{Y})$ равен числу всевозможных размещений Q элементов статистической системы по n состояниям $E_1, E_2, ..., E_n$ для макросостояния $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$. Каждое такое размещение соответствует микросостоянию статистической системы. Таким образом, полиномиальный коэффициент равен числу микросостояний, соответствующих данному макросостоянию.

Теорема, обосновывающая энтропийный метод, доказанная в работе [3], формулируется следующим образом.

Для полиномиального распределения, соответствующего либо Q каким-либо последовательным независимым испытаниям с произвольным числом n исходов, либо статистической системе с какими-либо Q элементами, случайным образом и независимо друг от друга замещающими n состояний, наибольшему значению вероятности $p(\bar{y})$ соответствует асимптотически (если $Q = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $Q \to \infty$) наибольшее значение (на спектре значений $\bar{Y}$ случайного вектора $\bar{y}$) полиномиального коэффициента $W(\bar{y})$.

Функция $H(\bar{y}) = \ln W(\bar{y}) - Q \ln Q$ соответствует определению статистической энтропии и имеет следующий асимптотический вид (при $Q \to \infty$):

$$H(\bar{y}) = -\sum_{i=1}^{n} y_i \ln y_i . \qquad (2)$$

Функцию (2) определим как асимптотический вид энтропии в энтропийном методе.

Перейдя в функции (2) к новым случайным аргументам $p_i = y_i / Q \quad (Q \to \infty)$, преобразуем её к виду

$$H_p = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \tag{3}$$

(учитывая, что значения P_i случайных величин p_i, доставляющие максимум функции $-Q\sum_{i=1}^{n} p_i(\ln p_i + \ln Q) = -Q\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i - Q\ln Q$, доставляют максимум при $Q = const$ также и функции $-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$). Функция (3) соответствует другой форме записи асимптотического вида энтропии.

Условия, используемые при поиске максимума функции H_p, очевидно, соответствуют некоторым заранее известным соотношениям, которым подчиняются вероятности Θ_i.

Вектор $\overline{P}' = (P_1', P_2', ...P_n')$, доставляющий максимум функции (2) с учётом некоторой априорно известной системы условий, которым подчиняются вероятности Θ_i, задаёт оптимальное «распределение вероятностей» относительно используемой системы условий.

Таким образом, одна из форм энтропийного метода состоит в поиске оптимального «распределения вероятностей» при больших значениях Q решением следующей задачи с ограничениями:

$$\max(-\sum_{i=1}^{n} P_i \ln P_i),$$

$$\Phi_r(P_1, P_2, ..., P_n) = 0, \quad (r = \overline{1,k}, k < n).$$

Рассмотрим [3] бесконечную последовательность каких-либо элементов $b_1, b_2, ..., b_i, ...$ с порядковыми номерами $1,2,...,i,...$. Пусть признак r_s может характеризовать множество из k^* произвольно выбранных элементов такой последовательности; R — множество таких признаков, каждым из которых может характеризоваться множество из произвольно взятых k^* элементов последовательности. Последовательность обладает следующими свойствами:

— каждый признак из множества признаков R идентифицируется однозначно;

— из предположения, что какое-либо множество из k^* элементов последовательности с порядковыми номерами $i_1, i_2, ..., i_{k^*}$ характеризуется какой-либо совокупностью признаков из множества признаков R, должно следовать существование множества из k^* элементов последовательности с порядковыми номерами $i_1' > i_1, i_2' > i_2, ..., i_{k^*}' > i_{k^*}$, также характеризующегося той же совокупностью признаков.

Пусть A_k — событие, заключающееся в том, что все k^* элементов, извлечённых случайной выборкой с возвращением объёма k^* из первых

N $(N > k^*)$ элементов последовательности, будут обладать признаком r_k $(r_k \in R)$;

$P\{A_k\} \equiv P_k(N)$ — вероятность события A_k. Случайный выбор любого из элементов последовательности предполагается равновозможным.

Определим события E_{ij} $(i = \overline{1,2}; j = \overline{1,2})$ следующими соотношениями:

$$E_{11} = A_\alpha \cap A_\beta;\ E_{12} = A_\alpha \cap \overline{A}_\beta;\ E_{21} = \overline{A}_\alpha \cap A_\beta;\ E_{22} = \overline{A}_\alpha \cap \overline{A}_\beta,$$

где A_α и A_β — события, соответствующие признакам r_α и r_β из множества признаков R;

$\overline{A}_\alpha, \overline{A}_\beta$ — события, противоположные событиям A_α и A_β соответственно;

Y_{ij} — число исходов, благоприятствующих событию E_{ij} в Q последовательных испытаниях.

В применении к событиям E_{ij} $(i = \overline{1,2}; j = \overline{1,2})$ энтропийный метод позволяет находить оптимальное «распределение вероятностей» $p_{ij} = p_{ij}^*$ [3] для этих событий решением задачи поиска аргументов, доставляющих максимум энтропии при достаточно больших значениях N с использованием априорно известных ограничений:

$$\max(-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} \ln p_{ij}), \tag{4}$$

при ограничениях:

$$\begin{gathered} p_{11} + p_{12} = P_\alpha(N), \\ p_{21} + p_{22} = \left[1 - P_\alpha(N)\right], \\ p_{11} + p_{21} = P_\beta(N), \\ p_{11} = 0 \cup p_{11} > \gamma / N^{k^*}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\gamma > 0$ — некоторое произвольное число. (При больших значениях Q, $Q \to \infty$ значения $p_{ij} = Y_{ij} / Q$, соответствующие случайным величинам y_{ij} / Q, очевидно, можно считать меняющимися непрерывным образом.)

Первые три соотношения в формуле (5) очевидны, последнее соотношение, как показано в работе [3], вытекает из свойства 2 рассматриваемых последовательностей и обосновывается утверждением 1 работы [3]. Вероятности $P_\alpha(N)$ и $P_\beta(N)$ в ограничениях (5) считаем заданными.

Для исследования справедливости гипотезы Гольдбаха потребуется усиленная формулировка обобщенной теоремы 2, приведенной в работе [3]. При-

водим эту усиленную формулировку. В работе [3] доказана лишь достаточность условия (7) приведенной ниже теоремы.

Т е о р е м а 1. Если для бесконечной последовательности, обладающей свойствами 1 и 2, существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} P_\alpha(N);\ \lim_{N\to\infty} P_\beta(N);\ \lim_{N\to\infty}(P_\alpha(N)P_\beta(N)N^{k^*})$$

и выполняется соотношение

$$\lim_{N\to\infty}(1-P_\alpha(N)-P_\beta(N)) = C_1 > 0, \tag{6}$$

то для того, чтобы для любого конечного числа $N \quad (N > k^*)$ первых её членов не существовало бы $k^*,(k^* \geq 1)$ элементов, характеризующихся одновременно признаками $r_\alpha \quad (r_\alpha \in R)$ и $r_\beta \quad (r_\beta \in R)$, необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\lim_{N\to\infty}(P_\alpha(N)P_\beta(N)N^{k^*}) \neq \infty \tag{7}$$

($\lim_{N\to\infty}(P_\alpha(N)P_\beta(N)N^{k^*}) = C;\ \ C \geq 0$, то есть произведение вероятностей $P_\alpha(N)P_\beta(N)$ должно сходиться, при $N \to \infty$, как $1/N^{k^*}$ или быстрее).

*Доказательство теоремы***.** Проведем его в несколько этапов. Докажем сначала лемму 1, соответствующую модификации утверждения 3 работы [3].

*Лемма 1***.** Если существуют пределы $\lim_{N\to\infty} P_\alpha(N)$; $\lim_{N\to\infty} P_\beta(N)$; $\lim_{N\to\infty}(P_\alpha(N)P_\beta(N)N^{k^*})$ и выполняется условие (6), то выполнение условия (7) является необходимым и достаточным для того, чтобы решение задачи (4) с ограничениями (5) приводило при достаточно больших, конечных значениях N к равенству:

$$p_{11}^* = 0. \tag{8}$$

Доказательство леммы 1. Докажем сначала необходимость выполнения условия (7). Так же, как и в работе [3], преобразуем задачу (4) с ограничениями (5) к виду:

$$\max \varphi\,(p_{11}) \tag{9}$$

при ограничении

$$p_{11} = 0 \cup p_{11} > \gamma / N^{k^*}, \tag{10}$$

где

$$\varphi\,(p_{11}) = -p_{11}\ln p_{11} - p_{12}\ln p_{12} - p_{21}\ln p_{21} - p_{22}\ln p_{22}\,, \tag{11}$$

$$p_{12} = P_\alpha(N) - p_{11}\,;\; p_{21} = P_\beta(N) - p_{11}\,;\; p_{22} = 1 - P_\alpha(N) - P_\beta(N) + p_{11}\,. \tag{12}$$

Функция $\varphi\,(p_{11})$ выпукла вверх при $0 < p_{11} < 1$, так как

$$\frac{d^2\varphi(p_{11})}{dp_{11}^2} = -(\frac{1}{p_{11}} + \frac{1}{p_{12}} + \frac{1}{p_{21}} + \frac{1}{p_{22}})\,.$$

Без учёта ограничения (7) максимум функции $\varphi\,(p_{11})$ достигается в точке

$$p_{11(\max)} = P_\alpha(N)P_\beta(N)\,. \tag{13}$$

Предположим, что равенство (8) выполняется. Для того, чтобы в результате решения задачи (9) с ограничением (10) выполнялось равенство (8) при достаточно больших значениях N, очевидно, необходимо, чтобы точка экстремума $p_{11(\max)}$ лежала для этих значений N внутри промежутка $(0;\gamma / N^{k^*})$, исключённого ограничением (10) из области, на которой ищется максимальное значение функции $\varphi\,(p_{11})$.Тогда выполняется неравенство

$$P_\alpha(N)P_\beta(N) < \gamma / N^{k^*}\,, \tag{14}$$

и равенство (8) выполняется при выполнении условия

$$\varphi(0) > \varphi(\gamma / N^{k^*}) \tag{15}$$

для достаточно больших значений *N*.

Запишем разность $\varphi(0) - \varphi(\gamma / N^{k^*})$ в виде

$$\varphi(0) - \varphi(\gamma / N^{k^*}) = (\gamma / N^{k^*})\ln(\gamma / N^{k^*}) + f(\gamma / N^{k^*}) - f(0)\,, \tag{16}$$

где

$$f\,(p_{11}) = p_{12}\ln p_{12} + p_{21}\ln p_{21} + p_{22}\ln p_{22}\,. \tag{17}$$

Асимптотически, при $N \to \infty$, выполняется соотношение

$$f(\gamma / N^{k^*}) - f(0) \cong \left.\frac{df}{dp_{11}}\right|_{p_{11}=0} (\gamma / N^{k^*})\,. \tag{18}$$

С учётом соотношений (12), (17), (18) получим:

$$\frac{dp_{12}}{dp_{11}} = -1\,; \frac{dp_{21}}{dp_{11}} = -1\,; \frac{dp_{22}}{dp_{11}} = 1\,;$$

$$\left.\frac{df}{dp_{11}}\right|_{p_{11}=0} = \ln \left.\frac{p_{22}}{ep_{12}p_{21}}\right|_{p_{11}=0} = \ln \frac{1 - P_\alpha(N) - P_\beta(N)}{eP_\alpha(N)P_\beta(N)}\,;$$

$$f(\gamma / N^{k^*}) - f(0) \cong (\gamma / N^{k^*}) \ln \frac{1 - P_\alpha(N) - P_\beta(N)}{eP_\alpha(N)P_\beta(N)}\,. \qquad (19)$$

Подставив соотношение (19) в (16) и учитывая условие (6), получим:

$$\varphi(0) - \varphi(\gamma / N^{k^*}) = (\gamma / N^{k^*}) \ln \frac{\gamma C_1}{eN^{k^*} P_\alpha(N)P_\beta(N)}, \quad (N \to \infty). \qquad (20)$$

Для выполнения неравенства (15) необходимо, как следует из (20), выполнение соотношения

$$\frac{\gamma C_1}{eN^{k^*} P_\alpha(N)P_\beta(N)} > 1, (N \to \infty)\,. \qquad (21)$$

Из соотношения (21) следует

$$\lim_{N\to\infty}(P_\alpha(N)P_\beta(N)N^{k^*}) < \gamma C_1 / e = C \neq \infty\,.$$

Таким образом, при выполнении равенства (8) должно выполняться условие (7). Необходимость выполнения условия (7) для справедливости равенства (8) доказана.

Доказательство достаточности условия (7) аналогично доказательству, приведённому в работе [3]. Предположим что условие (7) выполняется. Из условия (7) следует асимптотическое равенство

$$P_\alpha(N)P_\beta(N) = C / N^{k^*}, (N \to \infty)\,. \qquad (22)$$

Выберем число γ в ограничении (10) таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\gamma > eC\,, \qquad (23)$$

где e — неперово число,

$$C = \lim_{N\to n}(P_\alpha(N)P_\beta(N)N^{k^*})\,.$$

Тогда из соотношений (22), (23) следует выполнение неравенства (14) для достаточно больших конечных значений N. Отсюда следует, что точка экстремума $p_{11(\max)} = P_\alpha(N)P_\beta(N)$ функции $\varphi(p_{11})$ лежит для достаточно больших конечных значений N внутри промежутка $(0;\gamma / N^{k^*})$, исключённого ограничением (10) из области, на которой ищется максимальное значение функции $\varphi(p_{11})$.

С учётом выпуклости вверх функции $\varphi(p_{11})$ равенство (8) выполняется, если справедливо неравенство (15). Покажем, что оно выполняется. С использованием соотношений (16) — (19) получим

$$\varphi(0) - \varphi(\gamma / N^{k^*}) = (\gamma / N^{k^*}) \ln \frac{\gamma}{eN^{k^*} P_\alpha(N) P_\beta(N)}, \ (N \to \infty). \tag{24}$$

С учётом соотношения (7) и неравенства (23) имеем

$$\frac{\gamma}{eN^{k^*} P_\alpha(N) P_\beta(N)} \cong \frac{\gamma}{eC} > 1, (N \to \infty).$$

Отсюда и из соотношения (24) следует

$$\varphi(0) - \varphi(\gamma / N^{k^*}) > 0, \ (N \to \infty).$$

Следовательно,

$$\varphi(0) - \varphi(\gamma / N^{k^*}) > 0 \tag{25}$$

для достаточно больших, конечных значений N. Из неравенства (25) следует выполнение неравенства (15) и равенства (8). Таким образом, предположив, что условие (7) выполняется, получили равенство (8). Достаточность условия (7) доказана.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2, приведенная ниже, полностью совпадает с утверждением 4 работы [3], доказанным в этой работе. Приводим поэтому только формулировку этой леммы.

Лемма 2. Если оптимальное «распределение вероятностей» $p_{ij} = p_{ij}^*$ $(i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,2})$, полученное решением задачи (4) с ограничениями (5) для достаточно больших конечных значений N таково, что выполняется равенство

$$p_{11}^* = 0,$$

то вероятность $P\{E_{11}\}$ события E_{11} равна 0 при любых конечных значениях N.

Так как событие E_{11} определено (для конечного числа N первых членов последовательности) на конечном множестве элементарных событий и все элементарные события равновероятны, то вероятность $P\{E_{11}\}$ равна отношению

числа благоприятствующих случаев $M(N)$ к общему числу случаев, пропорциональному N^{k^*}, при больших значениях N :

$$P\{E_{11}\} \sim M(N)/N^{k^*}.$$

В этом случае из равенства $P\{E_{11}\} = 0$, вытекающего из лемм 2 и 3, следует: $M(N) = 0$.

Таким образом, для любого конечного числа первых членов последовательности не существует пары элементов, обладающих одновременно признаками r_α и r_β.

Теорема 1 доказана.

Обобщенная теорема 2, приведенная в работе [3], применена в работах [3], [4] к доказательству некоторых теорем теории чисел. В работе [4] приведено доказательство теоремы, уточняющей известную гипотезу Эйлера о возможности представления n-й степени натурального числа в виде суммы s n-х степеней некоторых натуральных чисел, т. е.

$$x_0^n = \sum_{i=1}^{s} x_i^n, \quad (s \geq 2, n > 1 \text{— целое}). \tag{26}$$

Гипотеза Эйлера. Для любого показателя $n \geq 3$ Диофантово уравнение (26) не имеет решений в натуральных числах, если $s \leq n-1$.

Долгое время гипотеза Эйлера, выглядевшая правдоподобной, не была ни доказана, ни опровергнута. Но в 1967 году было получено с использованием компьютера равенство, противоречащее этой гипотезе: $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$.

Ещё один пример, опровергающий гипотезу Эйлера, был найден в 1988 году:

$$20615673^4 = 2682440^4 + 15365639^4 + 187960^4.$$

Теорема, уточняющая гипотезу Эйлера. При любом фиксированном значении показателя степени $n \geq 3$ уравнение (26) не имеет решений $x_0 = a_0;\ x_1 = a_1;...;\ x_s = a_s$ в натуральных числах $a_0;\ a_1;...;\ a_s$, если

$$s \leq n-1, \tag{27}$$

за исключением случая, когда хотя бы одно из значений a_j, $j \in \{1,2,...,s\}$ удовлетворяет равенству $a_j^n = b_j^m$, где b_j, m $(m \geq 2, m < n, n > 3)$ — натуральные числа. В последнем случае уравнение (26) не имеет решений в натуральных числах, если

$$s \leq n(m-1)/m. \tag{28}$$

В случае нескольких значений a_j, $j \in \{1,2,...,s\}$, удовлетворяющих равенству $a_j^n = b_j^m$ с разными значениями m $(m \geq 2, m < n, n > 3)$, в соотношение (28) следует подставить наименьшее из этих значений.

Заметим, что в приведённом выше первом примере, опровергающем гипотезу Эйлера, слагаемое 27^5 в правой части равенства представимо в виде $(3^5)^3$. Согласно неравенству (28) уравнение (26) со значениями: $n = 5$ и $m = 3$ не имеет решения в натуральных числах, если $s \leq 3$, а не $s \leq 4$, как этого требует неравенство (27), соответствующее гипотезе Эйлера. Во втором примере с $n = 4$ и $s = 3$ каждое слагаемое равенства представимо степенью с показателем степени $m = 2$. Из неравенства (28) следует отсутствие решений в натуральных числах уравнения (26) для $n = 4$ и $m = 2$, если $s = 2$, а не $s \leq 3$, как этого требует неравенство (27).

Докажем еще одну теорему для бесконечных последовательностей *без предположения о существовании у последовательностей свойства 2.* Эта теорема будет использована для исследования справедливости гипотезы Гольдбаха.

Т е о р е м а 2. Если для бесконечной последовательности, обладающей свойством 1, существуют пределы:

$$\lim_{N\to\infty} P_\alpha(N);\ \lim_{N\to\infty} P_\beta(N);\ \lim_{N\to\infty}(P_\alpha(N)P_\beta(N)N^{k^*})$$

и выполняется соотношение (6), то для того, чтобы существовало конечное число N_1 такое, что среди элементов последовательности с порядковыми номерами $i > N_1$ не найдётся k^* элементов, характеризующихся одновременно признаками r_α и r_β, необходимо и достаточно выполнения условия (7).

Доказательство теоремы 2. Докажем теорему от противного. Предположим, что такого числа N_1, удовлетворяющего условиям теоремы, не существует и при этом условие (7) выполняется. Тогда для элементов последовательности с порядковыми номерами $i_1, i_2, ..., i_{k^*}$, обладающих одновременно признаками r_α и r_β, найдутся элементы с номерами $i_1' > i_1, i_2' > i_2, ..., i_{k^*}' > i_{k^*}$, также обладающие этими признаками. Таким образом, последовательность обладает свойством 2 последовательности с повторяющимися признаками элементов. Согласно теореме 1, условие (7) является необходимым и достаточным для того, чтобы в последовательности не существовало k^* элементов, одновременно обладающих признаками r_α $(r_\alpha \in R)$ и r_β $(r_\beta \in R)$. Пришли к противоречию со сделанным предположением. Следовательно, при выполнении условия (7) число N_1, удовлетворяющее условиям теоремы, должно существовать.

Выполнение условия (7) является необходимым и достаточным для того, чтобы имело место противоречие со сделанным выше предположением относительно числа N_1 и, следовательно, необходимым достаточным для существования такого числа. Таким образом, доказана необходимость и достаточность вы-

полнения условия (7) для того, чтобы такое число N_1, удовлетворяющее условиям теоремы, существовало.

Теорема 2 доказана.

Применим теорему 2 к исследованию гипотезы Гольдбаха. Приводим эту гипотезу в следующей формулировке.

Гипотеза Гольдбаха. Каждое чётное число 2λ $(\lambda = 1,2,3,4,...)$ представимо суммой двух нечетных простых чисел A и B (то есть простых чисел за исключением числа 2):

$$2\lambda = A + B.$$

Опровержение гипотезы Гольдбаха. Пусть множество признаков R для чисел натурального ряда состоит из двух признаков r_α и r_β, соответствующих $k^* = 1$. Считаем, что число натурального ряда обладает признаком r_α (r_β), если оно удовлетворяет условию u_α (u_β).

Условие u_α: число является четным. Условие u_β: число не представимо суммой нечетных простых чисел.

Пусть $P(N)$ — вероятность извлечь из первых N членов натурального ряда число, обладающее одновременно признаками r_α и r_β. $Q(N)$ — количество таких чисел среди N первых членов натурального ряда. Справедливо соотношение

$$\lim_{N\to\infty}\frac{dP(N)}{dN} = \lim_{N\to\infty}\frac{P(N+1)-P(N)}{\Delta N} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{Q(N+1)}{N+1} - \frac{Q(N)}{N}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{Q(N+1)-Q(N)}{N+1} = 0 \ (\Delta N = 1),$$

из которого следует, что предел вероятности $P(N)$ при $N \to \infty$ существует:

$$\lim_{N\to\infty} P(N) = P^* = const. \tag{29}$$

Справедливы соотношения:

$$P_\alpha(N) = \frac{1}{2};\ P_\beta(N) = \frac{1}{2} + P(N), \tag{30}$$

где $P_\alpha(N)$ — вероятность извлечь четное число из первых N чисел натурального ряда, $P_\beta(N)$ — вероятность извлечь из первых N чисел натурального ряда число, не представимое суммой нечетных простых чисел. (Очевидно, вероятность $P_\beta(N)$ равна сумме вероятности извлечь нечетное число (равной $\frac{1}{2}$) и вероятности $P(N)$ извлечь четное число, не представимое суммой двух простых чисел.)

Таким образом, условие теоремы о существовании пределов $\lim\limits_{N\to\infty} P_\alpha(N)$, $\lim\limits_{N\to\infty} P_\beta(N)$, $\lim\limits_{N\to\infty}(P_\alpha(N)P_\beta(N)N^{k^*})$ удовлетворяется.

Опровергаем гипотезу Гольдбаха от противного. Предположим, что гипотеза Гольдбаха верна. Тогда $P(N)=0$, $P_\alpha(N)+P_\beta(N)=1$, и соотношение (6) не выполняется. Введем вместо признаков r_α и r_β признаки r_α' и r_β, где признаку r_α' соответствует условие u_α': число является целым кратным числу 4. Тогда вероятность $P_\alpha(N)$ в (30) следует заменить вероятностью

$$P_\alpha'(N)=\frac{1}{4}.$$

Теперь выполняется соотношение (6) и доказанная выше теорема 2 применима к признакам r_α' и r_β.

Необходимое и достаточное условие (7) для справедливости утверждения теоремы 2 не выполняется:

$$\lim_{N\to\infty}(P'_\alpha(N)P_\beta(N)N)=\lim_{N\to\infty}(\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+P)N)=\infty.$$

Следовательно, для любого конечного N_1 найдутся числа $i>N_1$ натурального ряда, обладающие одновременно признаками r_α' и r_β, то есть кратные четырем и не представимые суммой простых чисел, и, следовательно, четные и не представимые суммой простых чисел. Пришли к противоречию с исходным предположением, опровергающему гипотезу Гольдбаха.

Гипотеза Гольдбаха опровергнута.

В заключение применим теорему 1 для $k^*=1$ к множеству признаков R (натурального ряда чисел), состоящего из двух признаков r_α и r_β, которым соответствуют следующие условия.

Условие u_α: число является степенью n какого-либо натурального числа ($n.>2$ — целое).

Условие u_β: число представимо суммой двух степеней n каких-либо натуральных чисел.

Очевидно, что свойства 1 и 2 последовательности выполняются. Можно показать, что асимптотический при больших значениях N вид вероятностей $P_\alpha(N)$ и $P_\beta(N)$ извлечения, из первых N чисел натурального ряда, числа с признаком r_α и r_β соответственно следующий:

$$P_\alpha(N)\sim\frac{\sqrt[n]{N}}{N};\ P_\beta(N)\sim\frac{(\sqrt[n]{N})^2}{N}. \qquad (31)$$

Очевидно, выполняется соотношение (6). Докажем, что не существует чисел натурального ряда, обладающих одновременно признаками r_α и r_β.

Подстановка соотношений (31) в условие (7) приводит к следующему результату:

$$\lim_{N\to\infty}(P_\alpha(N)P_\beta(N)N) = \lim_{N\to\infty} N^{\frac{3}{n}-1}.$$

Необходимое и достаточное условие существования чисел, обладающих одновременно признаками r_α и r_β, не выполняется, если $n \geq 3$. Следовательно, натуральный ряд чисел не содержит для любого конечного N числа c^n, удовлетворяющего соотношению $c^n = a^n + b^n$ (где *a, b* — натуральные числа), если $n \geq 3$.

Получили результат, соответствующий доказательству великой теоремы Ферма [3]. (В работе [3] эта теорема доказана с использованием теоремы 1 несколько другим способом.)

Таким образом, показана эффективность применения рассмотренного подхода к ряду теорем теории чисел.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Вильсон А. Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. М., 1978.

2. *Лавенда Б.* Статистическая физика. Вероятностный подход. М.,1999.

3. *Абрамов Л. Е.* Теоремы о бесконечных последовательностях с определенными свойствами. Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах: Международный сборник. Казань, 2003. Вып. 1 (17). Т. 9.

4. *Абрамов Л. Е.* О теореме, уточняющей гипотезу Эйлера. Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах: Международный сборник. Казань, 2005. Вып. 1 (22). Т. 11.