***М. А. Осинцева***

# МАТЕМАТИКА ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ В ОБРАЗОВАНИИ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ

*Работа представлена кафедрой высшей математики*
*Тюменского государственного нефтегазового университета.*
*Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент В. Н. Осташков*

*Рассмотрена актуальная проблема формирования у будущих инженеров нелинейного мышления средствами математики, в частности фрактальной геометрии. Обосновывается необходимость изучения фрактальных структур. В качестве приложения методов фрактальной геометрии в геологии выбрана проблема протекания, которая может быть решена в одних случаях аналитическими средствами, в других – средствами ИКТ.*

***Ключевые слова:*** *фрактальная геометрия, метод, проблема протекания, аналитические средства.*

***M. Osintseva***

# MATHEMATICS OF FRACTAL OBJECTS AND PROCESSES IN FUTURE ENGINEERS' EDUCATION

*The paper covers the relevant problem of forming future engineers' nonlinear thinking by mathematics means, in particular, by means of fractal geometry. The necessity to study fractal structures is justified. The author discusses fractal geometry problems in the process of geological structures study by means of analytical and IT resources.*

***Key words:*** *fractal geometry, method, percolation problem, analytical tools.*

Одной из характерных черт природных объектов является наличие у них самоподобия (в их структуре, динамике, свойствах); любой такой объект называется *фракталом*; он, как целое, подобен любой своей части. Термин «фрактал» (от fractus – дробный [2, с. 18]) предложил в 1975 г. американский геометр Б. Б. Мандельброт [2, с. 11]. Самоподобные структуры стали изучаться сначала в математике (Г. Кантор, Серпинский, Х. фон Кох, Пеано, К. Вейерштрасс) с конца XIX в., а затем в физике в середине XX в.

К середине XVII в. в европейской науке созрели идеи линеаризации структуры природных и технических объектов, детерминированности процессов, познаваемости их свойств, а в недрах математики сформировался мощный аппарат дифференциального и интегрального исчисления. Стал складываться миф о его всемогуществе, однако по истечении 300 лет миф несколько поблек, особенно к концу прошлого столетия, когда стало ясно, что природа скорее нелинейна, чем линейна, как в своей структурированности и динамике самоорганизации, так и в информационности. Перед природой линейные методы порой беспомощны.

Идеи о неравновесности, нелинейности, недетерминированности природы легли в основу синергетики, которая предложила научной общественности язык междисциплинарного общения и под своими знаменами кооперировала исследователей неравновесных систем самых разнообразных областей. В настоящее время на стыке математики, технических дисциплин и синергетики бурно развивается теория фракталов (и мультифракталов) как инструмент установления связей между физикой и геометрией природных объектов (например, береговой линии, горного рельефа, облаков, трещин в заготовке, границы раздела «вода – нефть» и т. п.).

Фракталы существуют. Следовательно, с ними надлежит знакомить будущих инженеров. Однако в университетских учебных планах пока отсутствует дисциплина, изучение которой позволило бы студентам систематически познавать фрактальные структуры. Это можно делать, но лишь частично, внутри математических дисциплин, а систематически – на спецкурсах или семинарах, посвященных основам фрактальной геометрии. Примерная тематика семинарских занятий предложена в табл. 1. В качестве учебного пособия рекомендуется книга [1].

Следует обратить внимание будущих инженеров, что свойство самоподобия как в математике, так и в технике (да и вообще в природе) порождается бесконечным повторением одних и тех же процессов. В математике, информатике, программировании такие повторения называются итерациями. Покажем это на простейших примерах.

**1. *Итерации.*** Возьмем число $a_0$, умножим его на фиксированное число $x \in (-1, 1)$ и прибавим к произведению 1. После такой операции получится число, которое обозначим $a_1 = f(a_0) = 1 + a_0 x$. На втором шаге итерационного процесса проделаем то же самое: последнее число умножим на $x$ и прибавим 1. Получится число

$$a_2 = f(a_1) = 1 + x(1 + a_0 x) = f(f(a_0)) = f^{\circ 2}(a_0).$$

На третьем шаге получится число

$$a_3 = f^{\circ 3}(a_0) = f(f(f(a_0))) = 1 + x + x^2 + x^3 a_0$$

*Таблица 1*

**Тематика семинарских занятий**

| Тема | Часы |
|---|---|
| ***Фракталы*** | |
| Канторово множество | 4 |
| Отображение Хатчинсона и СИФ | 4 |
| Построение модельных фракталов посредством ИКТ | 6 |
| Евклидово и аффинно самоподобные фракталы | 6 |
| Проективно самоподобные фракталы | 4 |
| Инверсно самоподобные фракталы | 4 |
| ***Размерность*** | |
| Фрактальная размерность | 4 |
| Размерности Реньи | 4 |
| Проблемы параметризации фракталов | 2 |
| ***Приложения*** | |
| Протекание | 6 |
| Горные рельефы | 4 |
| Мартенситные структуры | 4 |
| Вейвлет-анализ | 6 |
| Комплексная динамика | 6 |
| Аттракторы квадратичных кремоновых преобразований | 4 |
| **Всего часов** | **70** |

и т. д. После $n$ шагов получится число $a_n = f^{\circ n}(a_0)$, и так до бесконечности. В связи с этим у студентов с исследовательским настроем возникают, например, следующие вопросы.

1. Что представляет собой *орбита* точки $a_0$:

$$a_0 \mapsto a_1 \mapsto a_2 \mapsto \ldots ? \qquad (1)$$

2. Существует ли предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

3. Если такой предел существует, то зависит ли $a$ от $a_0$?

4. Если такой предел существует, то зависит ли $a$ от $x$?

5. Какую роль играет ограничение $x \in (-1, 1)$?

6. Можно ли сформулировать содержательное утверждение относительно характера орбиты (1), отказавшись от этого ограничения?

7. Может ли орбита (1) стать *циклом* (т. е. когда при некотором $k \in N$ число $a_k$ совпадет со стартовым числом $a_0$) и при каких условиях?

Нетрудно видеть, что орбита (1) состоит из частичных сумм функционального ряда $a(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ Следуя Герману Вейлю, который настойчиво советовал: «Ищите симметрию!», будущий инженер может попытаться обнаружить ее (в широком смысле) в виде повторения структуры объекта в некоторой его части. Действительно, после некоторого размышления студенты без труда находят симметрию ряда, но не привычную со школы центральную или зеркальную, а в виде самоподобия ряда. Для этого достаточно увидеть, подметить, догадаться, сообразить, что остаток ряда, полученный отбрасыванием первого члена, подобен всему ряду, т. е.

$$a = 1 + x(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots) = 1 + xa,$$

если выполняется ограничение $x \in (-1, 1)$. Тогда $a = \frac{1}{1-x}$ – сумма ряда (1), которая не зависит от стартовой точки $a_0$, но зависит от знаменателя $x$. Число $a$ являет собой пример *аттрактора* (аттракцион привлекает к себе

любопытных), к которому притягивается орбита (1) при определенных условиях.

**2. *Клеточная размерность.*** Рассмотрим множество

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\}, k \in N \qquad (2)$$

и найдем его клеточную размерность $\dim_B A$. Но сначала дадим определение клеточной размерности. Она вводится по стандартной схеме: *анализ – оценка – синтез* или, другими словами, *разбиение – оценка – суммирование*. По этой же схеме дается понятие определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$, заданной на отрезке $I = [a, b]$.

- Р а з б и е н и е. Отрезок $I$ разбивается на $n$ отрезков $\Delta x_i$.
- О ц е н к а. Вычисляется значение $f(\xi_i)$ функции $f$ в произвольной точке $\xi_I \in \Delta x_i$ для каждого $i = 1..n$.
- С у м м и р о в а н и е. Находится приближенное значение определенного интеграла как интегральная сумма: $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Точное значение интеграла $S$ равно пределу (разумеется, если он существует) интегральной суммы при $n \to \infty$.

Клеточная размерность произвольного множества $M \subset I$ вычисляется почти по тому же алгоритму.

- Р а з б и е н и е. Покроем $I$ отрезками (клетками) длины $\delta$.
- О ц е н к а. Припишем каждой клетке либо 1, либо 0 в зависимости от того, пересекается она $M$ или нет.
- С у м м и р о в а н и е. Пусть сумма всех таких единиц и нулей равна $N(\delta)$, т. е. $N(\delta)$ – число клеток, имеющих непустое пересечение с $M$. Наконец, найдем приближенное значение $D$ клеточной размерности $\dim_B M$ по формуле: $D \approx -\frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}$. Точное значение $D$ определяется как предел: $D = \dim_B M = -\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}$.

Действуя по указанному алгоритму, можно убедиться, что клеточная размерность множества (2) равна $\dim_B A = \frac{1}{2}$. Действительно, покроем отрезок [0, 1] клетками размером $\delta$ и найдем число $N(\delta)$ клеток, покрывающих $A$. Найдем $k$, при котором расстояние между двумя соседними элементами $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k+1} \in A$ меньше $\delta$: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} < \delta \Rightarrow \frac{1}{k(k+1)} < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow k \sim \delta^{-\frac{1}{2}}$. Тогда $N(\delta) = \frac{1}{k\delta} + k - 1 \sim 2\delta^{-\frac{1}{2}}$ и $\dim_B A = -\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\ln(2\delta^{-1/2})}{\ln \delta} = \lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\ln \delta - 2\ln 2}{2\ln \delta} = \frac{1}{2}$. Результат, прямо скажем, неожиданный, непривычный, так как топологическая размерность $A$ равна нулю; но самое удивительное, размерность оказалась дробной.

**3. *Бесконечные множества.*** Следствием последнего результата является тот факт, что размерность множества $N$ натуральных чисел равна $\frac{1}{2}$, как и клеточная размерность множества $Z$ целых чисел [3]. Кроме того, $\dim_B Z \times R = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, $\dim_B Z^n = \frac{n}{2}$, $\dim_B Z^n \times R^k = \frac{n}{2} + k$ [3]. Эти факты являются следствиями формулы $\dim_B A = \frac{1}{2}$ и следующей теоремы, имеющейся в прекрасном учебном пособии Ричарда Кроновера по фрактальной геометрии [2, с. 135–136, следствие 5.1.3].

Т е о р е м а. Пусть $A$ – компакт в $\mathrm{R}^n$, $f: R^n \to R^n$, $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i, j, k = 1..n$ – отображение, ограничение которого $f\big|_A : A \to \widetilde{A}$ на $A$ – биекция. Пусть все частные производные $\partial f_j / \partial x_k$ – непрерывны на $A$, а все частные производные компонент обратного отображения $f^{-1}: \widetilde{A} \to A$ – непрерывны на $\widetilde{A}$. Тогда $\dim_M \widetilde{A} = \dim_M A$.

**4. *Множество Кантора.*** В предусмотренной государственными образовательными стандартами теме «Дискретная математика» обязательно следует познакомить студентов с множеством Кантора, которое строится следующим образом. Сложим пополам отре-

зок $[0, 2]$, перегнув его в точке 1. Продолжим перегибать отрезок последовательно в точках $3^{-1}$, $3^{-2}$, …, $3^{1-n}$, выполнив $n$ шагов и отметив все точки, которые попали в нуль. Таких точек будет ровно $2^n$. При обратном развертывании отрезка отмеченные точки составят множество $C_n$. Предельное множество $C = \lim\limits_{n\to\infty} C_n$ является множеством Кантора. Из процесса построения легко следует, что $\dim_B C = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \log_3 2 \approx 0{,}6309$.

**5. *СИФ.*** Система итерированных функций (СИФ) порождается конечным числом функций для построения фракталов. Покажем на примере множества Кантора, как с помощью СИФ построить фрактал. Пусть $\alpha$ – гомотетия $x \mapsto x/3$, $\beta$ – гомотетия $x \mapsto 1 - x/3$, $T_0 \subset R$ – произвольное множество. На первом шаге итерационного процесса строится множество $T_1 = \alpha(T_0) \cup \beta(T_0)$, на втором шаге – $T_2 = \alpha(T_1) \cup \beta(T_1)$, …, на $n$-м шаге – $T_n = \alpha(T_{n-1}) \cup \beta(T_{n-1})$. Оказывается, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = C$.

По словам Р. Кроновера [1, с. 121], посредством СИФ можно сжимать информацию до 5 порядков. Это важно, например, для телевидения и особенно для передачи фильмов по Интернету. На основе СИФ работает архиватор изображений JPEG.

**6. *ГИС.*** Геофизические исследования скважин (ГИС) проводятся с целью получения данных для составления технологической карты эксплуатации скважины. Студентам, обучающимся на кафедре ГИС, хорошо известно, что путем размельчения керна, взятого из нефтегазоносного коллектора, можно выявить распределение линейных размеров кварцевых частиц, входящих в состав керна, и оценить его проницаемость, пористость и другие перколяционные свойства. Решение обратной задачи: как, зная распределение размеров песчинок, «собрать» из них керн и предсказать его перколяционные свойства, требует разработки серьезных математических методов, поэтому ее решение не является целью данного сообщения. Мы же ограничимся модельными фрактальными структурами, на которых, как правило, средствами ИКТ можно изучать процессы протекания.

**7. *Протекание нефти.*** Пусть дана квадратная сетка размера $L \times L$, $L \in N$, клетки которой с вероятностью $p$ служат *порами* (закрашены в черный цвет). Нефть, инжектированная в любую пору, может оросить соседнюю пору ходом шахматной ладьи. Поры, или «*узлы*», связанные с выбранным центром инжекции, образуют так называемый *кластер*. При некоторых значениях $p$ нефть под действием заводнения может просочиться из нижнего слоя в верхний. В книге Е. Федера [4] показано, что *критическая вероятность* $p_c$, при которой нефтяной кластер простирается от нижнего края до верхнего, равняется $p_c = 0{,}59275 \pm$ $\pm\, 0{,}0003$. Критическая вероятность протекания по треугольной сетке равна $p_c = 0{,}5$.

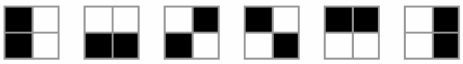
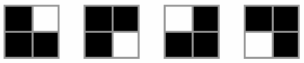
**8. *Малые решетки.*** Для малых решеток студентам полезно решить задачу о нахождении порога протекания аналитическими средствами.

З а д а ч а. Исследовать протекание по решетке размером 2×2.

Р е ш е н и е 1. Будем называть решетку «хорошей», если по ней возможно протекание снизу вверх. Будем говорить, что событие $A$ наступило, если случайная решетка оказалась «хорошей». Выясним, чему равна вероятность $p' = P(A)$ того, что после заполнения узлов решетки с вероятностью $p$ она окажется «хорошей». Пусть $H_i$, $i = 0...4$, – гипотеза, согласно которой при заданной вероятности $p$, заполнено $i$ узлов. В этом случае будем говорить, что решетка имеет вес $i$. Вероятность гипотезы вычисляется по схеме Бернулли: $P(H_i) = C_4^i p^i q^{4-i}$, $q = 1 - p$. Условная вероятность вычисляется по формуле $P(A/H_i) = k/n$, где $k$ – число «хороших» решеток веса $i$, $n$ – число различных решеток веса $i$. Обратим особое внимание на то, что число $k$ мы можем подсчитать непосредственно, опираясь на наглядное изображение решетки. Заполним табл. 2. По формуле полной вероятности находим:

$$p' = p^2(2q^2 + 4pq + p^2) = p^2(2(1-p)^2 + 4p(1-p) + p^2) = 2p^2 - p^4 .$$

*Таблица 2*

| **Решетки** | **Гипотезы** | $P(H_i)$ | $P(A/H_i)$ | $P(H_i)P(A/H_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| | $H_0$ | $C_4^0 p^0 q^4$ | 0 | 0 |
| | $H_1$ | $C_4^1 p^1 q^3$ | 0 | 0 |
|  | $H_2$ | $C_4^2 p^2 q^2$ | $2/C_4^2$ | $2p^2q^2$ |
|  | $H_3$ | $C_4^3 p^3 q^1$ | 1 | $4p^3q$ |
| | $H_4$ | $C_4^4 p^4 q^0$ | 1 | $p^4$ |

Р е ш е н и е 2. Найдем $p'$ другим способом. Прежде всего, заметим, что в «хорошей» решетке по крайней мере есть один столбец заполненных узлов. Для данного столбца такое возможно с вероятностью $p^2$. Тогда $P(\overline{A}) = (1-p^2)^2$ . Следовательно, $p' = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1-p^2)^2$.

Р е ш е н и е 3. Исследуем поведение вероятности $p'$ как функции от $p$, поведя следующий численный эксперимент. Для заданного значения $x \in I = [0, 1]$ вероятности $p$ строятся случайные решетки в количестве iter = 500 штук, и подсчитывается при этом количество blago «хороших» решеток. В качестве значения вероятности $p'$ принимается относительная частота $y$ = blago / iter появления «хороших» решеток. При увеличении числа iter дисперсия $Dy$ функции $y$ уменьшается. Вопрос о зависимости $Dy$ от iter требует отдельного исследования.

На квадратной решетке размером 2×3 вероятность $y$ того, что построенный с вероятностью $x$ кластер простирается снизу до верху, вычисляется по формуле $y = x^3(x^3 - 4x^2 + 2x + 2)$.

Для решеток больших размеров задача отыскания функции $y = f(x)$ аналитическими средствами в настоящее время не решена. Ее решение средствами ИКТ найдено в 80-е гг. прошлого века. В [4] показано, что кластеры, построенные на треугольной решетке, обладают свойством самоподобия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 252 с.
2. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
3. *Осташков В. Н., Коротаева В. А.* Фрактальная размерность неограниченных множеств // Биниология, симметрология и синергетика в естественных науках: матер. междунар. конф. Тюмень: ТюмГНГУ, 2001. С. 115–118.
4. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 256 с.