Н. Н. Яремко

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ

В статье дается трактовка понятий корректных и некорректных задач, рассматриваются различные аспекты их определений. Обосновывается всеобъемлющий характер, четкость и простота применения корректных задач.

N. Yaremko

ILL-DEFINED PROBLEMS IN MATHEMATICS TEACHING AT SCHOOL AND UNIVERSITY

The article presents the interpretation of the notions of correct and ill-defined problems. The author views different aspects of their definitions and proves the comprehensive nature, preciseness and simplicity of correct problems' application.

Теория некорректных задач – активно развивающаяся, современная область научных знаний. Большинство практических задач некорректны, требуют принятия решений в условиях неопределенности, переопределенности или их противоречивости. Однако в сложившейся системе обучения математике некорректным задачам отведено незначительное место, вопреки потребностям практики. Не вызывает сомнений тот факт, что нельзя научиться решать некорректные задачи, обучаясь лишь на корректных.

Разработка и обоснование математических методов решения некорректных задач как практических, так и чисто научных – актуальная проблема. Интерпретация результатов измерений, распознавание образов, решение задач линейного программирования и систем управления; решение обратных краевых задач; дифференцирование функций, заданных приближенно; решение вырожденных или плохо обусловленных систем линейных уравнений; аналитическое продолжение функций – далеко не полный перечень научных направлений, для которых теория корректных и некорректных задач является аппаратом научного исследования[1].

Отметим, что несмотря на большую научную и практическую востребованность теории корректных и некорректных задач, методические аспекты этой теории всесторонне и подробно ранее не рассматривались. Психолого-педагогические исследования по этой тематике находятся в рамках теории учебных задач Пойа-Колягина-Крупича[2] и примыкают к классу задач с неполными, переизбыточными и противоречивыми данными, рассмотренному В. А. Крутецким[3]. Однако теория корректных и некорректных задач имеет более строго определенные математические понятия, востребована и непосредственно применяется в различных научных и практических областях; ее развивающий ресурс в качестве методологической основы предстоит реализовать при обучении студентов и школьников.

Цель исследования – провести анализ предметного содержания теории корректных и некорректных задач и разработать методику непрерывного обучения решению корректных и некорректных задач в школе и вузе.

Задачи исследования:

- исторический обзор, выявление степени разработанности данной проблемы в теории и практике среднего и высшего профессионального образования;
- анализ понятия «корректно поставленная задача» в различных областях: в математике, в методике обучения математике, в психологии, в философии учебного познания;
- разработка теоретических основ пропедевтического изучения основных понятий и фактов теории корректных и некорректных задач в школе и их практическая реализация;
- исследование особенностей методики обучения решению корректных и некорректных задач при подготовке специалистов различного профиля в системе высшего профессионального образования.

Практические результаты исследования:

- разработаны и прочитаны лекции по теории корректных и некорректных задач для учителей школ, проведены факультативные занятия и элективный курс для школьников;
- выделены учебные элементы теории корректных и некорректных задач, которыми целесообразно пополнить содержание учебных предметов математического цикла при обучении будущих учителей математики и информатики и будущих инженеров-программистов, менеджеров;
- апробированы и внедрены в практику спецкурсы по теории корректных и некорректных задач на физико-математическом факультете Пензенского государственного педагогического университета при подготовке учителей математики и информатики;
- изданы учебные пособия: *Баврин И. И., Матросов В. Л., Яремко Н. Н.* Задачник-практикум по высшей математике для экономических специальностей. – М.: Прометей, 2003; *Линьков В. М., Яремко Н. Н.* Высшая математика в примерах и задачах. – М.: ФиС, 2006 (рек. УМО в области прикладной информатики); *Родионов М. А., Яремко Н. Н.* Комбинаторика, теория вероятностей, математическая статистика. – Пенза: Приволжский дом знаний, 2007 (рекомендовано УМО по математике педвузов Волго-Вятского региона);
- практически подтверждено, что обучение студентов и школьников на корректных и некорректных задачах повышает качество образования в отличие от традиционного использования в основном корректных задач.

1. Исторические факты и основные математические определения теории корректных и некорректных задач

Впервые понятие «корректно поставленная задача» было введено Ж. Адамаром[4] в 1923 г. и относилось лишь к краевым задачам математической физики. Корректность постановки задачи обеспечивалась выполнением двух условий: существование решения и его единственность. Требование устойчивости решения было впоследствии присоединено к первым двум. Долгое время по авторитетному мнению Ж. Адамара считалось, что некорректные задачи не могут иметь практического смысла и поэтому нет необходимости в их решении. Первой работой, в которой это мнение было опровергнуто, считается известная работа академика А. Н. Тихонова 1943 г.[5], в которой он впервые дал постановку условно-корректной задачи и решил одну из актуальных задач разведочной геофизики. В дальнейшем теория некорректных задач заняла свое заслуженное место в научных исследованиях, поскольку было многократно подтверждено, что задачи, возникающие в практике, чаще всего некорректны, и математическим аппаратом их решения как раз и является теория корректных и некорректных задач А. Н. Тихонова. В настоящее время ведется активная научно-исследовательская работа по этой тематике, признаны достижения трех научных школ: Московской, Сибирской и Уральской, основателями и руководителями которых являлись академики А. Н. Тихонов, М. М. Лаврентьев и член-корреспондент АН СССР В. К. Иванов.

Приведем определения корректных и некорректных задач, принадлежащие А. Н. Тихонову[6].

Математические задачи чаще всего состоят в том, что по исходным данным u ищется решение z. При этом считается, что u и z связны зависимостью $z = R(u)$. Задача называется *корректной* или *корректно поставленной*, если выполнены условия:

1) задача имеет решение при любых допустимых исходных данных u (существование решения);

2) каждым исходным данным u соответствует только одно решение z (единственность решения);

3) решение устойчиво.

Смысл первого условия заключается в том, что среди исходных данных нет противоречащих друг другу условий, что исключало бы возможность решения задачи. Второе условие означает, что исходных данных достаточно для однозначной разрешимости задачи. Эти два условия обычно называют условиями *математической определенности задачи*.

Третье условие заключается в следующем. Если u_1 и u_2 – два различных набора исходных данных, мера уклонения которых друг от друга достаточно мала, то мера уклонения решений $z_1 = R(u_1)$ и $z_2 = R(u_2)$ меньше любой наперед заданной точности. При этом предполагается, что в многообразии $U = \{u\}$ допустимых исходных данных и в многообразии возможных решений $Z = \{z\}$ установлено понятие меры уклонения $\rho_u(u_1,u_2)$ и $\rho_z(z_1,z_2)$. Третье условие трактуется как физическая определенность задачи. Это объясняется тем, что исходные данные физической задачи, как правило, задаются с некоторой погрешностью; при нарушении третьего условия как угодно малые возмущения исходных данных могут вызвать большие отклонения в решении.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из условий корректности, называются *некорректными* или *некорректно поставленными*.

2. Анализ понятия «корректно поставленная задача»

Определение корректной (или, что то же, корректно поставленной) и некорректной задачи принадлежит Ж. Адамару и академику А. Н. Тихонову (см. п. 1) и относится к широкому классу математических задач. Автор в настоящей статье дает трактовку приведенного определения, рассматривает различные его аспекты, обосновывает его всеобъемлющий характер, четкость и простоту в применении. Исследование задачи на корректность по Адамару-Тихонову предполагает проведение глубокого анализа всех составляющих компонентов задачи.

Толковые словари русского языка дают следующую справку. «Корректный, корректность от *лат.* correctus – исправленный улучшенный: ...2) точность, правильность, четкость. Например, корректность доказательства, корректность перевода».

И с этой точки зрения «корректная задача» может рассматриваться как «правильная задача», а некорректная – соответственно «неправильная». Видимо, отсюда идет представление о некорректной задаче, как о задаче, которая не имеет решения, противоречива и до сих пор бытует мнение, что нет резона в их решении.

В методической науке термины «корректная задача», «корректно поставленная задача» различаются и используются авторами[7], работающими по проблемам теории задач в том смысле, что задача имеет решения (одно или несколько) или не содержит противоречий. Отметим, что при этом строгого определения не дается, смысл уточняется из контекста. Соответственно, некорректная задача – это задача, содержащая противоречие или имеющая недостаточность данных. При этом корректность постановки задачи означает ее однозначную (конечнозначную) разрешимость или полноту и непротиворечивость условий.

Д. Пойа замечает: «Правильно поставленная задача должна содержать все необходимые данные, ни одно из которых не должно быть лишним; ее условие должно быть в точности достаточным, не будучи ни противоречивым, ни чрезмерным». И далее в тексте есть указания на анализ решения с точки зрения его устойчивости.

А. Ф. Эсаулов[8] пишет: «Человек, привыкший видеть перед собой четко и корректно сформулированную задачу, просто теряется в незнакомой ситуации, будь то хоть обычная некорректная математическая задача или некая задача, возникшая как следствие из практики (прикладная)».

Существует взгляд на корректность задачи с точки зрения однозначной определенности множества решения задачи. В этом смысле если множество решений пустое, то решений нет, но задача корректна, так как ее множество решений однозначно определено. В рамках этого подхода задача, имеющая более одного решения, также считается корректной, поскольку множество ее решений однозначно определено. При такой классификации в некорректные задачи попадут лишь те, где, по существу, задача не сформулирована, не определены компоненты задачи. По классификации Ю. М. Колягина, это задачи типа (XYZT) с неизвестными четырьмя компонентами.

Близко по смыслу к корректности задач рассмотрение В. А. Крутецким, М. П. Буловацким задач с неполными, противоречивыми и переизбыточными данными.

Таким образом, в приведенном кратком обзоре корректность задачи фиксируется: а) либо с точки зрения анализа исходных данных на полноту, непротиворечивость, независимость; б) либо с точки зрения разрешимости задачи: существует решение или оно отсутствует в силу каких-то обстоятельств, однозначно ли определено множество решений задачи. Оба эти аспекта имеют место в определении корректности задачи по Адамару-Тихонову и составляют содержание математической определенности задачи (первые два условия корректности). Третье условие корректности задачи по Адамару-Тихонову, не рассматриваемое авторами, – устойчивость решения – предполагает глубокий анализ всех компонентов задачи, выявляет их существенность. Определение корректной задачи по Адамару-Тихонову представляется нам наиболее общим, четким и включает в себя, на наш взгляд, те трактовки, которые встречаются в научно-педагогических исследованиях у других авторов. Возможна ситуация, когда задача некорректная по Адамару-Тихонову, будет корректной в смысле названных выше точек зрения. В дальнейшем, чтобы избежать разночтений, будем всегда оговариваться, что понимаем корректность задачи в смысле Адамара-Тихонова.

Приняв определение корректных и некорректных задач по Адамару-Тихонову в качестве основного, сделаем некоторые выводы.

1. Корректность задачи – понятие относительное, связанное со всеми компонентами задачи. Обратимся к словам Ж. Адамара: «Не стоит понимать некорректность задачи столь абсолютно».

2. Признание задачи некорректной в данных условиях не означает невозможность ее решения в дальнейшем. Некорректная задача часто дает толчок развития науке, приводит к открытиям и новым теориям.

3. Решение задач в условиях неопределенности, переопределенности и противоречивости данных – сегодняшний день науки и практики, при этом математическим аппаратом выступает теория корректных и некорректных задач А. Н. Тихонова. Именно поэтому: решение задач проводится методами А. Н. Тихонова – есть смысл в принятии определения некорректной задачи по Адамару-Тихонову в качестве основного.

Всюду далее в статье корректность задачи понимается в смысле определения Адамара-Тихонова (см. п. 1).

3. Некоторые приемы устранения некорректности задач

Решение некорректных в смысле Адамара-Тихонова задач осуществляется одним из двух способов:

1) перевод задач из разряда некорректных в корректные изменением какого-либо компонента внешней (информационной) структуры задачи и применение стандартных методов решения (см. п. 3.1; 3.2);

2) разработка специальных методов решения некорректных задач (в частности, к ним относится регуляризация по Тихонову, см. п. 3.3).

Следуя определениям корректности задачи по Адамару-Тихонову, будем утверждать, что некорректность задачи возникает, если ее решение или *не существует,* или *неединственно,* или *неустойчиво.* В последующем изложении некорректность задач обусловлена:

в п. 3.1 – *несуществованием* решения,

в п. 3.2 – *неединственностью* решения,

в п. 3.3 – *неустойчивостью* решения .

3.1. Расширение предметной области.

Решить уравнения:

$$2^x = 4;\ 2^x = 3;\ 2^x = -4;\ 2^x = 0.$$

Первое уравнение имеет единственное решение $x = 2$. Задача корректна.

Второе уравнение, рассмотренное на множестве рациональных чисел, не имеет решений и задача на множестве рациональных чисел некорректна в смысле Адамара-Тихонова. Если предметную область расширить, добавив иррациональные числа, то задача становится корректной в смысле Адамара-Тихонова и ее решение $x = \log_2 3$. Переход от некорректной постановки задачи к корректной осуществляется расширением предметной области: добавлением множества иррациональных чисел.

Третье уравнение не имеет решений на множестве действительных чисел и задача некорректна в смысле Адамара-Тихонова. На множестве комплексных чисел задача имеет бесконечное число решений

$$x = Log_2(-4) = \frac{\ln 4 + i\cdot(1+2n)\pi}{\ln 2},\ n \in Z$$

и единственность достигается рассмотрением однозначных ветвей многозначной аналитической функции $w = Log_2 z$.

Четвертое уравнение не имеет решений, устранить некорректность, оставаясь в рамках классической теории аналитических функций, невозможно.

3.2. Переход к полной системе корректных подзадач.

Решить задачу. Вершины B, C равнобедренного треугольника ΔABC, $AB = AC$ лежат на параболе $y = x^2$. Точка A имеет координаты (0,2). Угол A в треугольнике равен 120°, сторона ВС параллельна оси ОХ. Найти площадь треугольника ΔABC.

Задача сводится к полной системе, состоящей из двух корректных подзадач в зависимости от положения ΔABC:

1) сторона ВС лежит *выше* вершины А;

2) сторона ВС лежит *ниже* вершины А.

Рассматривая эти два случая, в каждом из которых задача корректна в смысле Адамара-Тихонова, получаем ответ: задача имеет два решения

$$S_1 = \frac{4}{9}\sqrt{3} \text{ кв. ед.} \qquad S_2 = \sqrt{3} \text{ кв. ед.}$$

3.3. Регуляризация по Тихонову.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 10y = 12; \\ 10x + 101y = 121. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение (2;1). Рассматриваемая система является плохо обусловленной, геометрическая интерпретация решения такой системы сводится к отысканию точки пересечения «почти параллельных прямых». Решение системы с «возмущенной» правой частью

$$\begin{cases} x + 10y = 12; \\ 10x + 101y = 120 \end{cases}$$

равно (12;0). Таким образом, малым изменениям правой части системы соответствуют весьма большие изменения решения, т. е. система не обладает свойством устойчивости. Геометрическая иллюстрация неустойчивости решения состоит в том, что при малых изменениях положения одной из «почти параллельных прямых» их точка пересечения может сместиться как угодно далеко. Устойчивость вычислительного алгоритма в рассмотренной задаче достигается методом регуляризации А. Н. Тихонова. Решение задачи требует большого объема вычислений, которые проводятся применением пакетов компьютерной математики: Mathcad, Maple, Mathematica.

4. Особенности обучения решению корректных и некорректных задач в школе и вузе

Согласно нашим исследованиям, при обучении математике оптимальное содержание некорректных задач следующее:

в школьном курсе – до 5%;

в общих курсах математики – до 20%;

в специальных курсах – возможно от 20 до 80%.

В настоящее время роль некорректных задач в обучении математике явно недооцена. В вузе некорректные задачи изучаются в специальных достаточно узкопрофессиональных курсах, далее обращаются к этой тематике при выполнении научно-практических исследований, написании курсовых и дипломных работ. В школе термин «корректный» используется в смысле «правильный», а корректность задачи понимается в смысле непротиворечивости условий задачи.

Усвоение студентами и школьниками понятий корректной и некорректной задачи в смысле Адамара-Тихонова – важная методическая задача. Она носит методологический характер, принадлежит к мировоззренческим вопросам математики, связана с теорией учебного познания, философской теорией отражения, поскольку в реалиях демонстрирует факт относительности истины и поэтапности познания.

В школьном курсе математики понятие существования и единственности решения должно быть сформировано у учащихся на уровне владения, устойчивость – на уровне интуитивного представления, иллюстрированного примерами.

В вузе в контексте реализации методической системы обучения решению корректных и некорректных задач с учетом специфики будущей профессии можно выделить три направления в математической подготовке специалистов:

- инженеры-программисты,
- школьные учителя математики и информатики,
- менеджеры-экономисты,

Для каждого из направлений определены особенности методики обучения решению корректных и некорректных задач. Коротко остановимся на отборе содержания учебного материала и определим уровень владения понятиями и методами этой теории.

В вузовской математике под некорректными (неустойчивыми) задачами обычно понимаются задачи, в которых малые возмущения исходных данных могут вызывать большие изменения результатов. Такого сорта задачи появляются на старших курсах обучения в вузе при подготовке инженеров-программистов и школьных учителей математики и информатики. На младших курсах при изучении общего курса математики для нематематических специальностей существование и единственность решения задач изучаются раньше устойчивости и отдельно от нее.

Для математических специальностей в курсе линейной алгебры условия разрешимости систем линейных уравнений и условие единственности решения предшествуют изучению плохо обусловленных систем или систем с приближенно равным нулю определителем, т. е. неустойчивых задач. В курсе дифференциальных уравнений вначале изучаются теорема Коши и задача Коши, а затем теория устойчивости решений. В курсе уравнений математической физики все три условия корректной постановки задачи изучаются одновременно, поскольку к этому времени имеется научная основа: понятие метрических пространств введено и студенты им владеют. При численном решении задач возникают вопросы, связанные с устойчивостью результатов относительно возмущений исходных данных и округлений при вычислениях. Такой феномен в вычислительной математике называется устойчивостью вычислительных алгоритмов, его изучение подготовлено предыдущими учебными дисциплинами, легко воспринимается студентами и соответствует логике образовательного процесса.

Три условия корректности задачи возникают логично, естественно, поэтапно и уровень владения этими понятиями у студентов старших курсов вуза достаточно высокий. В процессе изучения вычислительных методов, символьной математики, написания курсовых работ и дипломов три условия корректной постановки задач становятся инструментом исследования, студенты приобретают навыки применения теории некорректных задач на практике. Усвоение студентами методов теории некорректных задач достигает к старшим курсам уровня владения, методы этой теории применяются к исследованию поставленных задач и конструированию новых.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.

[2] *Крупич В. И.* Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. – М.: Прометей, 1995; *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математике. – М., Просвещение, 1977. – Ч. I., II.

[3] *Крутецкий В. А.* Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1968.

[4] *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978.

[5] *Тихонов А. Н.* Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. – 1943. – Т. 39. – № 5. – С. 195–198.

[6] *Арсенин В. Я., Тихонов А. Н.* Некорректные задачи // Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – Т. 3. – С. 930–935.

[7] *Пойа Д.* Как решать задачу. – Львов: Квантор, 1991. – С. 163.

[8] *Эсаулов А. Ф.* Проблемы решения задач в науке и технике. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. – С. 8.