С. Д. Чечебутова

ПОСТРОЕНИЕ НАБОРА ЗАДАЧ, НАПРАВЛЕННОГО НА РАЗВИТИЕ СПОСОБНОСТИ К ОБОБЩЕНИЮ У УЧАЩИХСЯ 5–7 КЛАССОВ НАЦИОНАЛЬНЫХ ШКОЛ КРАЙНЕГО СЕВЕРА

Работа представлена кафедрой методики обучения математике РГПУ им. А. И. Герцена.
Научный руководитель – доктор педагогических наук, профессор Н. Л. Стефанова

В статье приводятся теоретические предпосылки и обоснования отбора задач, направленных на развитие способности к обобщению у учащихся национальных школ Крайнего Севера на внеклассных занятиях по математике. Построение набора задач основано на идее выделения основной задачи и построения вспомогательных задач, содержащих в себе способ решения. Приводится набор задач по теме «Четные и нечетные числа», в котором реализована идея автора.

Ключевые слова: *способность к обобщению, учащиеся 5–7 классов, Крайний Север.*

S. Chechebutova

BUILDING OF THE TASK SET AIMED AT THE DEVELOPMENT OF THE ABILITY TO GENERALISE AMONG 5–7TH-FORM STUDENTS OF NATIONAL SCHOOLS OF THE FAR NORTH

The paper presents the theoretical preconditions and substantiation of the choice of tasks aimed at the development of the ability to generalise among students of national schools of the Far North at out-of-class mathematics lessons. The composition of the task set is based on the allocation of the main task and building of auxiliary problems containing the method of solution. The author presents the task set on the topic "Even and Odd Numbers", in which her idea is realised.

Key words: *ability to generalise, 5–7th-form students, Far North.*

В научной психолого-педагогической литературе установлено, что к этнопсихологическим особенностям детей национальных школ Севера в среднем школьном возрасте относится преобладание образного мышления над аналитическим. Как показывает практика и результаты математических олимпиад, в этом возрасте ими легче решаются задачи геометрического характера (например, на разрезание), или задачи с наглядным условием, где часть условия задана с помощью рисунка, схемы, нежели задачи, условия которых сформулированы на естественном или аналитическом языке и решение которых требует анализа условия, выявления и использования некоторой закономерности (например, теоретико-числовые задачи). Кроме того, затруднения учащихся при самостоятельном решении задач в основной школе вызваны непониманием значений некоторых слов и терминов, поскольку обучение ведется на неродном для них русском языке. Отсутствие своевременной работы со способными к математике учащимися нередко приводит к их «потере» с переходом в старшие классы. Как известно, развитию математических способностей учащихся помимо школьной программы способствует решение нестандартных задач во внеурочное время. При этом методика работы с нестандартными математическими задачами, разработанная для учащихся без учета этнопсихологических особенностей детей национальных школ Крайнего Севера, не эффективна для учащихся этих школ.

В связи с этим появляется необходимость целенаправленной работы с учащимися 5–7-х классов национальных школ Крайнего Севера по развитию математических способностей, важнейшей среди которых по утверждению психологов (Л. С. Выготского, В. В. Давыдова, И. В. Дубровиной, В. А. Крутецкого, С. Л. Рубинштейна, И. С. Якиманской и др.), является способность к обобщению. В связи с тем, что речь идет о детях, испытывающих склонности к математике и успешных в освоении школьной программы по математике, эту работу следует осуществлять в процессе обучения решению нестандартных задач на материале теории чисел. Теоретико-числовой материал отличается абстрактностью, а большинство задач – нестандартностью, что вызывает затруднения в установлении закономерности, а значит, в обобщении у учащихся данного возраста. В то же время для решения теоретико-числовых задач достаточно знаний тех фактов, которые предусмотрены школьной программой, опираясь на которые можно обучить таким общим методам решения нестандартных задач, как использование четности чисел, использование широкого спектра знаний из теории делимости, принцип Дирихле и т. д., кроме того, обобщив результаты решения, можно получить интересные математические факты.

Для того, чтобы разработать методику обучения, направленную на формирование и развитие у учащихся способности к обобщению при решении нестандартных задач, нами были изучены выводы и факты, установленные психологами. Эти выводы показывают, что:

1. Во-первых, в зависимости от пути обобщения различают эмпирическое и теоретическое обобщения. Теоретическое обобщение есть следствие анализа, вскрывающего *существенные* связи. Всякая задача решается посредством анализа ее условий через соотнесение их с требованиями. Поэтому решение всякой задачи предполагает той или иной меры обобщения объектов, их свойств и отношений по существенным для задачи признакам (В. В. Давыдов, А. Н. Леонтьев, С. Л. Рубинштейн и др.).

2. Чтобы овладеть способом решения задач определенного типа, учащимся необходимо помимо структуры способа решения **усвоить и осознать отношения** (математические и логические) между объектами, характерные для задач данного типа (Е. И. Машбиц). Здесь под структурой способа решения задач некоторого типа понимается «совокупность объектов, оперирование которыми приводит к решению задач данного типа, операций, производимых над этими объектами, и объектов, выступающих в качестве результатов таких операций (иначе говоря, в качестве «функций» тех объектов, над которыми произведены операции)» [4, с. 10].

3. Обобщению способа решения новой задачи также могут способствовать своевременно предложенные вспомогательные задачи, содержащие в себе идею решения (А. Н. Леонтьев, С. Л. Рубинштейн, А. К. Славская и др.).

Например, рассмотрим задачу: *Число* $a+1$ *делится на* 3. *Докажите, что число* $2a-1$ *делится на* 3.

Если использовать в качестве идеи решения получение одного выражения из другого, которое делится на 3, то можно дать следующую задачу как вспомогательную:

Выберите из следующих выражений те, которые делятся на 3, *если известно, что* $a+1$ *делится на* 3:

$3(a+1)$; $2(a+1)-2$; $2(a+1)+6$; $2a+8$; $4a-10$; $3a+7$. *Поясните, как это можно определить для любого из заданных выражений.*

4. Успешность решения нестандартной задачи также может зависеть от возможности наглядного выражения условия задачи или от представления реальной ситуации задачи. Так, Н. А. Менчинская указывает, что умение наглядно представить содержание задачи играет решающую роль при установлении нужных соотношений, в тех случаях, когда ученик не может решить задачу, достаточно бывает изменить ее сюжет, сделав его более близким опыту ребенка, как успех решения уже обеспечен. Это положение особенно важно для

учащихся 5–7-х классов национальных школ Севера, поскольку нередко причиной затруднения при решении задач является непонимание ими условия задачи. Например, в качестве вспомогательной задачи к предыдущей можно предложить учащимся следующую задачу:

Первый оленевод поместил x оленей в трех загонах поровну. К ним второй оленевод загнал своих y оленей, и в загонах получилось по-прежнему поровну оленей. Что вы можете сказать про число y ?

5. Поскольку речь идет об обобщении способов решения нестандартных задач, особое место имеют эвристические приемы поиска решения. Как известно, «*эвристика* рассматривает не сами по себе мыслительные акты – анализ, синтез, обобщение и т. п. (она отправляется от них как от данного), а те способы, какими отдельные операции структурируются в сложные образования типа стратегий и тактик, направленных на поиск необходимой информации и выработку решений» [3, с. 3]. В нестандартных задачах часто существенные отношения в явном виде не даются, поэтому задача учителя – научить учащихся использовать эвристические приемы для отыскания еще неизвестных и скрытых отношений, чтобы учащийся мог самостоятельно вырабатывать подобные или новые приемы в незнакомых ситуациях.

Рассмотрим основные приемы, которыми вполне могут овладеть учащиеся 5–7-х классов:

- Обнаружение какой-то общей зависимости на отдельных частных случаях и примерах. Особый интерес в этом отношении представляют «крайние» случаи, поскольку именно в них искомые зависимости могут проявляться наиболее заметно, в своем «критическом виде». Также частные случаи могут навести учащегося на верную гипотезу решения.

Например: *Петя перемножил все числа от 1 до 1000. У полученного числа он вычислил сумму цифр. У вновь полученного числа вновь вычислил сумму цифр, и т. д. В конце концов у него получилось однозначное число. Найдите его.*

Можно предложить учащимся попробовать на небольших числах проделать такие же операции как в условии задачи. Если $n \geq 6$, у них в результате каждой операции получится число, делящееся на 9, и в конце концов само число 9. Учащимся остается обосновать, почему получается данное число.

- Умение переформулировать, упростить условие или требование задачи. Тождественная переформулировка условия или требования задачи во многих случаях оказывается эффективной.

Например: *Верно ли, что 57 599 – простое число?*

Здесь достаточно трудно определить, является ли число простым, проще ответить на вопрос: является ли число 57 599 составным? Тогда у учащегося выбор способа решения уже ограничен: найти какой-нибудь делитель отличный от 1 и самого числа, либо проверить на признаки делимости, либо разложить на множители. В данном случае проще разложить на множители:

$57599 = 57600 - 1 = 240^2 - 1^2 = (240 - 1)(240 + 1) = 239 \cdot 241$ – составное.

Таким образом, содержание набора задач и методика работы будут направлены на обобщение способа решения нестандартной задачи с учетом специфики мышления учащихся. Здесь *под обобщением способа решения задачи будем понимать перенос (применение) способа решения на целый класс задач*, поскольку показателем наличия обобщения является перенос способа решения на решение наиболее «отдаленной» (по условию, ситуации, описанной в нем) задачи.

Как упоминалось выше, нередко учащиеся 5–7-х классов национальных школ сталкиваются с трудностями на первоначальном этапе решения задачи: при работе с текстом условия задачи из-за существующего в данном возрасте языкового барьера. В то же время любая задача может быть решена только в том случае, если учащийся правильно воспринимает условие задачи и, как следствие восприятия, четко представляет ее структуру, т. е. видит, из каких элементов состоит задача и в какой взаимосвязи эти элементы находятся между собой. Поэтому, на наш взгляд, целесообразно на этапе обучения новому способу решения включение функции образного мышления учащихся для получения более продуктивных результатов в процессе усвоения ими математических понятий и овладения способом решения. В этом возрасте «роль наглядного материала в процессе усвоения продолжает оставаться весьма важной, наиболее быстрое и правильное усвоение понятий происходит тогда, когда опирается на правильно методически подобранные наглядные образы» [2, с. 164].

Потому наиболее важную составляющую в нашем наборе задач представляют задачи на использование образного мышления учащихся. В. А. Далингер называет задачу *визуализированной*, если в задаче образ явно или неявно задействован в условии или в ответе, задает метод решения задачи, создает опору каждому этапу решения задачи, либо явно или неявно сопутствует определенным этапам ее решения [1, с. 26]. Если наглядность непосредственно используется в условии или в ходе решения задач в виде графиков, схем, чертежей, рисунков и т. д., то в этом случае образ будет задействован *явно*. Например, при решении геометрических задач или задач, решаемых с помощью кругов Эйлера, построения графов и т. д. Если учащиеся представляют ситуацию задачи мысленно (например, задачи с повседневным содержанием), то в этом случае образ применяется ими *неявно* (также на любом этапе решения). Задачи на использование образного представления в дальнейшем будем также обозначать термином «визуализированные задачи».

Таким образом, набор задач, направленный на обобщение способа решения нестандартной задачи будет содержать:

1. Задачи на выделение существенных признаков понятий, входящих в условие задачи.
2. Задачи на выделение существенных связей и отношений, входящих структуру способа решения; здесь под структурой способа решения будем понимать существенные отношения элементов задачи и операции над ними, приводящие к решению.
3. Визуализированные задачи.

Например: *Ювелиру нужно разделить слитки серебра весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 30 г на две кучки так, чтобы кучки отличались на 10 г. Сможет ли он это сделать?*

В условие задачи входят (явно и неявно) разные понятия. Явно: масса слитков ..., значения которой для слитков образует последовательность натуральных чисел; сумма чисел, выражающих массу нескольких слитков; равенство двух сумм масс. Неявно: последовательность натуральных чисел от 1 до 30, сумма чисел последовательности, четность. Существенным признаком является делимость на две суммы последовательности чисел (четность или нечетность).

В процессе обучения решению задач необходимо учесть два важных направления работы на начальном этапе решения задачи:

1. Упражнения по переводу условия задачи с одного языка на другой, направленные на осмысление учащимися условия задачи. Здесь возможны следующие варианты работы по анализу текста задачи, а также допустимы их комбинации в зависимости от обстоятельств:
   - перевод текста задачи на родной язык;
   - образное представление условия задачи;
   - моделирование условия задачи в виде схемы или геометрическая интерпретация;
   - перевод условия задачи на математический язык (в виде формул, буквенных выражений и т. д.).
2. Выделение свойств основных понятий.

При обучении способам решения задач существенное значение имеют основные математические понятия, входящие в условие задачи, их свойства. Поэтому целесообразно предварительное выполнение упражнений на актуализацию или усвоение основных понятий и их свойств, входящих в предметную область задачи.

Следующие два направления работы с учащимися в ходе решения ими задач связаны с выделением структуры способа решения и его обобщением.

3. Нахождению основной идеи, ведущей к способу решения, способствует умение выделять (находить) существенные свойства или отношения элементов задачи. Умение выделять существенные элементы задачи и их отношения формируется путем решения специальных задач. На этом этапе можно предложить учащимся:

• Вспомогательную (визуализированную) задачу после анализа условия основной задачи, чтобы учащиеся путем соотнесения с основной задачей выделили существенные отношения. Иногда вспомогательная задача может представлять рассмотрение частного случая (более простого), чтобы дальше учащиеся перенесли идею решения на основную задачу. Например, рассмотрим в качестве основной задачу на использование идеи четности:

В ряд стоят 100 фишек, пронумерованных от 1 до 100. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке?

Если учащиеся не могут найти решение, то можно им предложить рассмотреть случай для четырех фишек. Простой перебор покажет, что при указанной перестановке фишек поменяются местами фишки с числами только одной четности. Значит, 100 фишек невозможно таким способом переставить в обратном порядке.

• Составление схемы условия задачи.

В предыдущей задаче можно предложить учащимся нарисовать некоторое количество фишек и раскрасить в один цвет те фишки, которые могут поменяться местами.

• Выделить после решения, где в задаче использованы те или иные данные, перестанет ли утверждение быть верным, если какое-то условие убрать или ослабить. Тем самым учащиеся смогут выделить существенные свойства, отношения или связи, использование которого приводит к нахождению решения задачи. Например, в приведенной выше задаче можно изменить в условии число 100 на другое число (четное или нечетное), попробовать решить задачу, если меняются местами соседние фишки и т. д.

4. Заключительный этап работы – это выделение идеи решения в обобщенном виде.

На данном этапе можно предложить учащимся решить обобщенную задачу, заменив конкретные числа переменными. После решения обобщенной задачи следует сформулировать способ решения как новое правило или утверждение.

Обучающий эксперимент проводился на внеклассных занятиях по математике в национальных школах Республики Саха (Якутия) на материале теории чисел по следующим темам: «Делимость и остатки» (5–6), «Признаки делимости» (5–6), «Четность» (6–7);

Предварительно при проведении математического боя учащимся 6–7-х классов была предложена следующая задача:

Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция (проигравшая сторона) закричала «Это обман!». Почему?

Решение: Из условия следует, что число парламентариев четно. Пусть «против» голосовали x, тогда «за» – $x + 23$, всего $2x + 23$ голоса – нечетное число, а число проголосовавших четно. Следовательно, подсчет голосов неверный.

Из 12 учащихся ни один ученик не справился с данной задачей. Большинство учащихся даже не приступали к решению, поскольку не поняли условия задачи. Поэтому серия 1 была направлена на анализ условия задачи и обобщение способа решения задач на определение четности. В частности, данная серия ориентирована на обучение к анализу условия задачи с помощью составления схем.

Учащиеся были знакомы со следующими математическими фактами:

• Если число нечетных слагаемых четно, сумма четная.

• Если число нечетных слагаемых нечетно, то сумма нечетная.

Поэтому в данной серии задач им нужно было только установить четность суммы и соотнести с требованием задачи.

Серия 1

1. В 6-м «а» классе мальчиков и девочек поровну. Каждый из них хорошист или отличник. Может ли число хорошистов быть на 7 больше, чем отличников?

Подсказка: нарисуйте с помощью схемы следующие предложения:

а) В 6-м «а» классе мальчиков и девочек поровну. Сколько всего учащихся?

б) Число хорошистов на 7 больше чем отличников. Сколько всего хорошистов и отличников?

в) Ответьте на вопрос задачи.

2. Решите задачу № 1, заменив в условии число 7 на: а) 4; б) $2n+1$. Сделайте выводы.

3. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция (проигравшая сторона) закричала «Это обман!». Почему?

4. Ювелиру нужно разделить слитки серебра 1 г, 2 г, 3 г, …, 30 г на две кучки так, чтобы массы кучек отличались на 10. Сможет ли он это сделать?

5. Рассмотрим первые 30 натуральных чисел. Докажите, что сумма никаких 12 из них не равна сумме 18 других.

Структуры задач № 1 и № 3 одинаковы, изменилась только фабула. Подсказки к задаче № 1 были даны после некоторых попыток решения.

Примерная схема решения задачи № 1:

а)

$X = X$ Всего $2x$ учащихся – четное число

б) $$\left.\begin{array}{r} \textit{отличников} - y \\ \textit{хорошистов} - y+7 \end{array}\right\}?$$

Всего учащихся $2y+7$ – нечетное число.

в) Всего в классе четное число учащихся, поэтому хорошистов не может быть на 7 больше, чем отличников.

После решения задач № 1–2 большинство учащихся (13 из 18) справились с задачей № 3. Неделей позже этой же группе ребят была дана контрольная задача:

1. Можно ли разбить числа 1, 2, 3, …, 30 на 10 групп, по 3 числа в каждой так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме двух других?

Решение: Нельзя. Из последнего условия следует, что сумма чисел в каждой группе должна быть четной, а общая сумма 1 + 2 + + 3 + … + 30 – нечетная. Контрольную задачу большинство учащихся решили верно (10 из 18 – 56%), что заметно улучшило предварительные показатели.

Выводы:

1. При обучении математике учащихся национальных школ Крайнего Севера следует учесть особенности их мышления, т. е. способствовать формированию и развитию аналитического мышления на основе образного мышления в младшем и среднем школьном возрасте с помощью наглядного представления математических отношений; использовать наряду с русским языком и родной язык в процессе обучения математике в младшем и среднем школьном возрасте; развивать и совершенствовать математическую речь на русском языке с помощью специально подобранных упражнений.

2. Формированию и развитию способности к обобщению учащихся 5–7-х классов национальных школ Крайнего Севера могут способствовать специальные наборы задач, направленные на анализ условия, на установление существенных связей между элементами задачи.

3. Наличие в этом наборе задачи с повседневным содержанием положительно влияет на понимание структуры задачи при обучении решению задач нового типа, если такая задача дана:

- после анализа условия основной задачи, если основная задача не решена;
- в качестве основной задачи.

4. Овладение учащимися приемами поиска скрытых существенных отношений в задаче способствует самостоятельному нахождению и обобщению новых способов решения в незнакомых ситуациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Далингер В. А.* Наглядные образы как средство решения математических задач // Математика в школе. 2007. № 7. С. 26–28.

2. *Крутецкий В. А.* Психология подростка. М.: Изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1959. 316 с.

3. *Кулюткин Ю. Н.* Эвристические методы в структуре решений. М.: Педагогика, 1970. 231 с.

4. *Машбиц Е. И.* Зависимость усвоения учащимися способа решения математических задач от метода обучения. Киев, 1965. 24 с.

REFERENCES

1. *Dalinger V. A*. Naglyadnye obrazy kak sredstvo resheniya matematicheskikh zadach // Matematika v shkole. 2007. N 7. S. 26–28.

2. *Krutetsky V. A*. Psikhologiya podrostka. M.: Izd-vo Ministerstva prosveshcheniya RSFSR, 1959. 316 s.

3. *Kulyutkin Yu. N*. Evristicheskiye metody v strukture resheniy. M.: Pedagogika, 1970. 231 s.

4. *Mashbits E. I*. Zavisimost' usvoyeniya uchashchimisya sposoba resheniya matematicheskikh zadach ot metoda obucheniya. Kiyev, 1965. 24 s.