А. А. Аксёнов

ВНУТРИПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ КАК РЕСУРС ПРОЦЕССА ПОИСКА РЕШЕНИЯ ШКОЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В статье рассматривается проблема использования внутрипредметных связей в обучении школьников математике. Основная мысль статьи состоит в том, чтобы представить внутрипредметные связи как один из основных ресурсов процесса поиска решения задач. Этот ресурс используется на уровне логики решения задач, а также на уровне различных теорий, средствами которых формулируются и решаются школьные математические задачи. Проблема применения этих теоретических замыслов в реальном обучении школьников рассмотрена на конкретных примерах.

A. Aksyonov

INTRA-SUBJECT TIES AS A RESOURCE OF THE SEARCH PROCESS FOR SOLVING SCHOOL MATHEMATICS TASKS

The article treats the problem of applying intra-subject ties in teaching mathematics to schoolchildren. The main idea of the article is introducing intra-subject ties as one of the main resources of the search process for solving school tasks. This resource is used at the level of logics of tasks solution as well as at the level of different theories by means of which the school mathematics tasks are formulated and solved. The problem of applying these theoretical conceptions to the practical teaching process is considered through the concrete examples.

Внутрипредметные связи играют огромную роль в обучении математике и вполне могут быть теоретической основой решения большинства проблем, рассматриваемых современной методической наукой. В данной статье покажем как внутрипредметные связи могут использоваться для организации целенаправленного обучения поиску решения школьных математических задач. Сами внутрипредметные связи будем понимать предельно широко: и как *логические* связи учебного материала, и как *аналитическое* использование некоторых фактов какой-либо теории для решения данной задачи вне зависимости от того, какими теоретическими средствами она сформулирована и решена. Подробнее об этом изложено в работе автора данной статьи [1].

Важная роль внутрипредметных связей в поиске решения задач объясняется тем, что все теоретические факты, являющиеся базисом данного способа решения конкретной задачи, каким-либо образом связаны друг с другом. Следовательно, намереваясь в процессе поиска решения использовать какой-нибудь теоретический факт, субъект, решающий задачу, отыскивает и другие факты, так или иначе связанные с рассмотренным фактом, или ищет какие-то общие логические закономерности между данной задачей и другими задачами, решенными им ранее.

Поскольку вообще эта проблема очень обширна и достойна отдельного научного изучения, продемонстрируем как внутрипредметные связи можно задействовать в процессе поиска решения некоторых задач на исследование, имеющих место в школьном курсе математики. К сожалению, они представлены в нем очень ограниченно, однако их роль в решении обозначенной проблемы очень велика, так как они требуют от школьников умения выдвигать и проверять гипотезы (в том числе, альтернативные) и рассматривать все возможные ситуации в задаче, связанные с сопоставлением тех или иных свойств объектов, фигурирующих в ней. Последнее обстоятельство – наиболее важное, собственно говоря, именно оно позволяет достаточно четко выделять задачи на исследование из всех остальных задач школьного курса математики.

Вообще в школьном курсе математики долгое время использовались задачи лишь трех видов: задачи на вычисление, задачи на доказательство и задачи на построение, причем последние относились в основном к курсу геометрии. В последнее десятилетие ситуация несколько изменилась и в настоящее время школьники (в основном, учащиеся профильных и специализированных математических классов) на уроках математики, а также на внеурочных занятиях встречаются с задачами, в процессе решения которых требуется: а) найти условия существования (или невозможности существования) некоего факта; б) указать сам факт и условия его существования; в) определить особенности существования (т. е. свойства и качества) какого-либо математического объекта для тех или иных условий, а если требуется, и сами эти условия; г) выяснить, обладает ли данный объект какими-либо качествами (свойствами), причем здесь выдвигаются две противоположные гипотезы, доказываются и по результатам этой работы делается вывод; д) выяснить, какими качествами (свойствами) обладает данный объект, в случае необходимости указать те условия, при которых эти качества имеют место и т. д.

Совершенно очевидно, что они существенно отличаются от задач на вычисление и доказательство, а тем более, от задач на построение. К тому же, такие задачи часто в качестве подзадач содержат и задачи на вычисление, и задачи на доказательство. На одном этапе их решения требуется что-либо вычислить, на другом этапе – что-то доказать, но все это имеет место в контексте реализации некоторой гипотезы, выдвинутой на данном этапе решения задачи. Именно поэтому справедливо утверждать, что массив задач, обладающих указанными характеристиками, целесообразно рассматривать как отдельный вид задач, основным признаком которых является необходимость выдвижения и проверки нескольких гипотез в совокупности с обязательным рассмотрением всевозможных ситуаций, связанных с сопоставлением свойств объектов, содержащихся в задаче. Именно в таком ключе в данной работе будем понимать школьные математические задачи на исследование. В частности, в курсе алгебры таковых много среди задач с параметрами. Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 1. *Решить уравнение* $\log_2^2 x - \log_2 x - \log_2 8x + 4a - a^2 = 0$.

Поскольку $\log_2 8x = \log_2 8 + \log_2 x = 3 + \log_2 x$, то после преобразований получим уравнение с параметром $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 4a - 3 - a^2 = 0$.

Пусть $y = \log_2 x$. Тогда $y^2 - 2y + 4a - 3 - a^2 = 0$. Полученная подзадача также является задачей на исследование. Ее можно расчленить на несколько подзадач, основываясь на том, какой знак будет иметь дискриминант $D = 4 - 16a + 12 + 4a^2 = 4a^2 - 16a + 16 = (2a - 4)^2 \geq 0$ при всех значениях параметра. Итак, возможны всего два случая: дискриминант равен нулю или положителен. В первом случае при $a = 2$ единственный корень $y = 1$, во втором случае при $a \neq 2$ $y_1 = 3 - a$; $y_2 = a - 1$. Предварительные условия существования корней исходного уравнения найдены. Вернемся к подстановке $y = \log_2 x$. При $a = 2$ $\log_2 x = 1$, тогда $x = 2$. При $a \neq 2$ получаем совокупность уравнений: $\log_2 x = 3 - a$ или $\log_2 x = a - 1$. Поскольку логарифмическая функция принимает все действительные значения, то на основании определения логарифма получаем: $x = 2^{3-a}$ или $x = 2^{a-1}$.

Ответ: если $a = 2$, то $x = 2$; если $a \neq 2$, то $x = 2^{3-a}$ или $x = 2^{a-1}$.

В решении этой задачи использовался тот факт, что область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел. Рассмотрим более трудную задачу.

Пример 2. *Решить уравнение* $9^x - (2a + 2)3^x + a^2 + 2a - 3 = 0$.

Выполним подстановку $y = 3^x$ и перейдем к уравнению-следствию $y^2 - (2a + 2)y + a^2 + 2a - 3 = 0$. Вычислим дискриминант полученного уравнения: $D = 4a^2 + 8a + 4 - 4a^2 - 8a + 12 = 16$. Так как дискриминант при всех значениях параметра положителен, это уравнение всегда имеет два различных действительных корня: $y_1 = a - 1$; $y_2 = a + 3$. Очевидно, второй его корень всегда больше первого. В отличие от предыдущей задачи область значений показательной функции представлена положительными действительными числами, поэтому, сопоставляя этот теоретический факт с тем, что уравнение-следствие имеет два различных корня, получим такие варианты для исходного уравнения: два действительных корня в том случае, если $y_1 = a - 1 > 0$; один действительный корень, если $y_1 = a - 1 \leq 0$, $y_2 = a + 3 > 0$; нет действительных корней, если $y_2 = a + 3 \leq 0$. Дальнейшее решение задачи не представляет серьезных затруднений.

Совсем другая ситуация была бы в том случае, если во втором примере вместо 3^x и 9^x использовать x^2 и x^4 соответственно. Функция $y = x^2$ не обладает свойством строгой монотонности и в ее область значений входит еще и 0 (изменяются всего два теоретических факта). Тогда для исходного уравнения возможны уже пять вариантов: корней может быть четыре, три, два, один и ни одного. Подобные задачи можно усложнить, если в уравнении-следствии дискриминант будет принимать любые значения и (или) функция $y = f(x)$ будет ограничена и снизу, и сверху, или будет периодической и т. д.

В рассмотренных примерах внутрипредметные связи, преимущественно, способствовали реализации решения, а не генерации тех или иных его идей. Теперь покажем как внутрипредметные связи могут помочь в нахождении идеи решения задачи. Во-первых, решение задачи, аналогичной недавно (или давно) решенной (это не обязательно должны быть задачи на исследование), представляет собой наиболее простой вариант использования внутрипредметных связей в выполнении поиска идеи решения задачи (т. е. здесь внутрипредметные связи реализованы на логическом уровне). Во-вторых, внутрипредметные связи между различными компонентами или подзадачами одной и той же задачи также способствуют отысканию идей ее решения, что демонстрирует нижеследующий пример.

Пример 3. *Найти площадь трапеции, если ее основания равны 60 и 20 см, а боковые стороны равны 13 и 37 см.*

Очевидно, поиск решения этой задачи нужно выполнять аналитико-синтетическим методом, в частности, здесь используется анализ. Практика показывает, что учащиеся средних школ без особого труда устанавливают, что для ответа на вопрос данной задачи нужно знать высоту трапеции. Однако нахождение высоты здесь вызывает затруднения даже у способных учащихся. В таких случаях учитель должен подвести мысль школьников к тому, что нецелесообразно выполнять поиск решения задач только «по пути наименьшего сопротивления», т. е. в данном случае пытаться использовать стандартную формулу. В задаче требуется найти *площадь*, значит, учащимся нужно задать вопрос: «Что это такое?». Можно предложить учащимся обратиться к соответствующим страницам учебника, причем прочитать не только определение этого понятия, но и свойства. Одним из свойств является то, что площадь фигуры равна сумме площадей всех ее частей. Это может навести на мысль о разделении трапеции на части. Разумеется, учащиеся попытаются различными способами произвести разделение трапеции. Для нахождения площадей ее частей нужно знать либо высоту трапеции (как высоту в треугольниках, на которые она разделяется), либо длину диагоналей и меру угла между ними. К этому же результату школьники смогут прийти, если вспомнят определение трапеции. Поскольку трапеция – частный случай четырехугольника, следовательно, можно вычислить ее площадь, зная длину диагоналей и величину угла между ними. В последнем случае в задаче обнаруживается три неизвестных, нахождение каждого из которых далеко не очевидно, поэтому учащиеся могут прийти к мысли, что лучше все-таки попытаться вычислить высоту трапеции.

Итак, нахождение высоты трапеции либо неизбежный, либо предпочтительный этап в решении данной задачи. Заметим,

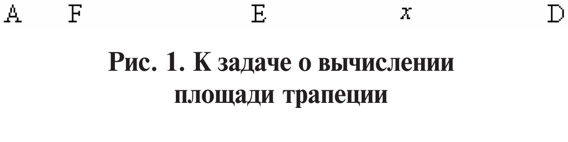

Рис. 1. К задаче о вычислении площади трапеции

что к этому результату учащиеся пришли, опираясь на сущность внутрипредметных связей, поскольку всегда пытались найти какие-либо теоретические факты, связанные с понятиями трапеции и площади фигур. Учителю следует ненавязчиво предложить им выполнить все эти рассуждения. Итак, нужно найти высоту трапеции. Учащиеся, разумеется, знают, что ее нужно изобразить на рисунке. Практика показывает, что школьники обычно проводят ее из вершины меньшего основания трапеции (рис. 1).

При другом ее проведении школьники быстро обнаружат, что это бесперспективно для выполнения поиска решения. Непосредственно из прямоугольного треугольника высоту найти нельзя, так как неизвестен другой катет. Именно здесь учащиеся испытывают затруднения в выполнении поиска решения задачи. Это происходит потому, что рассмотренные ранее теоретические средства и вообще только геометрические средства, известные школьникам к этому моменту, не смогут стать обоснованием решения данной задачи. Предположим, что никто из учащихся не догадался обозначить высоту неизвестной x, т. е. применить алгебраический аппарат. Чтобы учителю не давать им готовой подсказки, ему можно предложить учащимся сделать вывод о том, что только геометрическими средствами задачу решить невозможно. То есть он должен попросить их высказать свое мнение об объективных причинах, по которым им еще не удалось найти решения задачи (заранее учащиеся должны знать, что задача имеет решение). Как показывает практика, в этом перечне практически всегда звучит причина, смысл которой таков: нет средств для решения задачи. Это верно, но лишь в рамках геометрии. Здесь учитель должен задать учащимся вопрос: «А разве вы применили всю известную вам математику?». Как правило, после этого учащиеся стараются активно применять средства других теорий, причем переходят к алгебраическому аппарату достаточно быстро (т. е. здесь сущность внутрипредметных связей проявляется на уровне отдельных теорий школьного курса математики). Обычно далее они проводят вторую высоту в трапеции. Если школьники неизвестной x обозначат высоту трапеции, то придут к уравнению $\sqrt{1369-x^2}+\sqrt{169-x^2}=40$, решать которое еще не умеют. Здесь ими самими ставится под сомнение целесообразность обозначения высоты неизвестной x. Далее они пытаются обозначить буквой x другой катет в любом из прямоугольных треугольников и получают уравнение, которое вполне смогут решить.

В рассмотренном примере представлен не только тот факт, что внутрипредметные связи способствуют отысканию идей решения задачи, но и показано как в реальном обучении учитель может помочь школьникам применить внутрипредметные связи к выполнению поиска решения задачи. Данная задача, строго говоря, не относится к числу задач на исследование, но осуществляя поиск ее решения, учащимся нужно выполнять довольно большую исследовательскую работу.

Пример 4. *При каком целом положительном значении x значение выражения*

$$\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}\cdot\frac{x^2+(2-x)\sqrt{x^2-3x-10}-4}{x^2-(x+5)\sqrt{x^2-3x-10}-25}$$

ближе всего к $-0{,}7$.

Так как первый множитель этого произведения определен на множестве $(-\infty;\,-2)\cup\cup[5;\,+\infty)$, а x – положительное целое число, то ясно, что $x\geq 5$. Далее путем относительно несложных преобразований данную дробь приводят к виду $\dfrac{7}{x+5}-1$. Это выражение равно $-0{,}7$ при $x\in(18;\,19)$. Находя абсолютную величину разности значения этой дроби при $x=18$ и числа $-0{,}7$, а затем абсолютную величину разности значения этой дроби при $x=19$ и числа $-0{,}7$, устанавливают, что модуль разности меньше при $x=18$.

В последнем примере также рассмотрена задача на исследование, которая не содержит параметр, однако и в ней внутрипредметные связи помогают найти решение. Здесь их роль в выполнении поиска решения задачи заключается в том, что они наводят на мысль об использовании понятия модуля числа.

Пример 5. *В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 см вписана окружность. К ней проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсеченного этой касательной треугольника* (рис. 2).

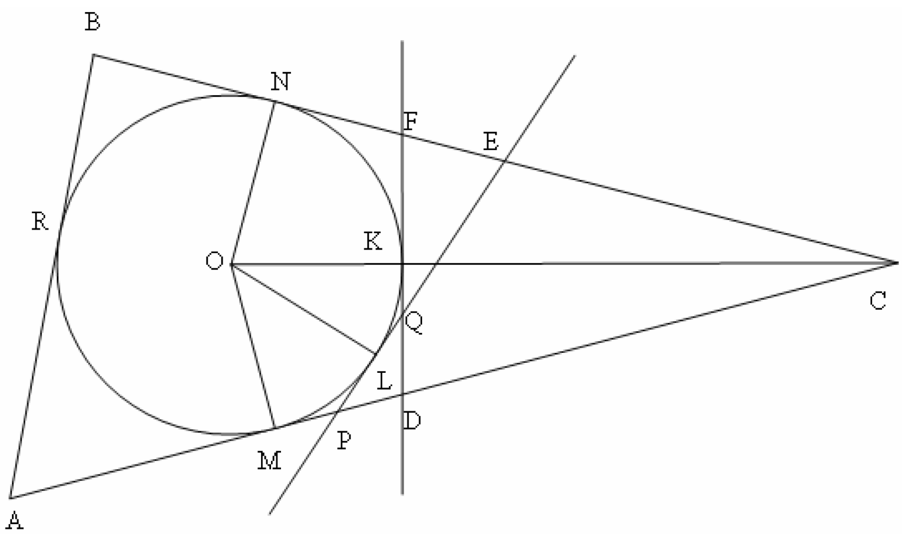

Рис. 2. К задаче о вычислении периметра треугольника

Пусть $AC = 12$, $BC = 10$, $AB = 6$. Выполним дополнительные построения. Пусть касательная FD перпендикулярна OC (О – центр окружности). EP – произвольная касательная. Сам рисунок скорее визуально указывает на то, что периметры двух треугольников, отсекаемых проведенными касательными, не равны. Поскольку в задаче не сказано, какая именно это должна быть касательная, то невольно возникает мысль о том, что она сформулирована некорректно. Но тогда под решением задачи следует понимать доказательство того факта, что периметры этих треугольников не равны и этот факт нужно строго доказать. Но ведь может оказаться, что они равны. Это означает, что нужно просто выяснить этот вопрос. Таким образом, данная задача принадлежит к числу задач на исследование именно благодаря тому, что нужно выяснять вопрос о равенстве или неравенстве периметров треугольников, отсекаемых всевозможными касательными.

Фактически нужно доказать, что $EF + FD = EP + PD$. Доказательство опирается на тот факт, что отрезки двух разных касательных, проведенных из одной точки плоскости (лежащей вне окружности) к данной окружности, равны.

Так, $EN = EL$, $FN = FK$, отсюда следует, что $EF + FK = EL$. Получили первое важное равенство: $DK = DM$, $PL = PM$. Получаем такую цепочку равенств: $DK = DM = PM + PD = PL + PD$, т. е. $DK = PL + PD$. Это второе важное равенство. Складывая это равенство с первым (не меняя местами левую и правую части в каждом из равенств), получаем: $EF + FK + DK = EL + PL + PD$. Так как $FK + DK = FD$, а $EL + PL = EP$, получаем, что $EF + FD = EP + PD$, что и требовалось доказать. Теперь ясно, что периметры всех треугольников, получаемых указанным в условии задачи способом, равны.

Остается найти периметр, например, треугольника CFD. Пусть $MC = x$. Тогда по свойству касательных $CN = x$. Далее легко найти, что $AM = 12 - x$, $AR = 12 - x$, $RB = 6 - (12 - x) = x - 6$, $BN = x - 6$. Тогда, учитывая, что $BC = 10$, получаем уравнение: $x - 6 + x = 10$, решив которое, узнаем, что $x = 8$. Поскольку $FN = FK$, то нетрудно вычислить, что $CF + FK = CN = 8$. Точно также можно сосчитать, что $CD + DK = 8$. То есть искомый периметр равен 16.

В последней задаче внутрипредметные связи непосредственно использовались и для реализации решения, и для поиска соответствующей идеи, причем в выполнении поиска решения было необходимо опираться на их сущность. Этот факт достаточно легко обнаружить, учитывая, что для отыскания периметра использовался аппарат школьного курса алгебры – уравнение.

Приведенные примеры показывают, что задачи на исследование – это довольно эффективное средство обучения школьников поиску решения математических задач. Также об этом свидетельствует работа автора статьи [2]. Процесс поиска их решения представляет собой наиболее полномасштабное использование аналитико-синтетического метода поиска решения задач. Поэтому применение задач на исследование в процессе обучения математике заметно повышает у школьников уровень умения выполнять поиск решения задач. В ходе обучения решению таких задач в значительной степени проявляется реализация внутрипредметных связей, следовательно, играют роль все дидактические функции, которые они выполняют в обучении математике. Помимо этого, школьники учатся, пожалуй, самому главному из того, что им следует освоить в курсе математики – выдвижению идей, их проверке и реализации, поскольку это основа не только решения задач, но и научного познания действительности, а следовательно, и базис любой творческой деятельности, которая выполняется специалистами в рамках своей профессии.

Обучение поиску решения математических задач на основе использования внутрипредметных связей как ресурса процесса поиска требует от учителя некоторых изменений в организации поисковой деятельности школьников. Дело в том, что обычно учитель, помогая учащимся найти способ решения задачи, задает им так называемые наводящие вопросы. Причем зачастую суть их такова, что совокупность ответов на них приводит школьников к нахождению решения задачи. Если в качестве ресурса процесса поиска решения используются внутрипредметные связи, то суть вопросов учителя должна быть совершенно иной. Она должна состоять в том, чтобы помочь школьникам выявить как можно больше информации из условия задачи и найти теоретические средства, которые каким-либо образом связаны с имеющимися в условии фактами (понятиями и их свойствами или признаками, отдельными компонентами задачи и т. д.) Это продемонстрировано в третьем примере. В данном случае задача учителя – помочь школьникам научиться сопоставлять найденные факторы, выводить следствия из их сопоставления и применять полученные выводы в процессе поиска решения задач.

Если речь вести о задачах на исследование, то здесь учителю, выстраивая свой диалог с учащимися в ходе выполнения ими поиска решения задачи, необходимо иметь в виду несколько важных обстоятельств.

Во-первых, школьникам необходимо определить, что данная задача относится именно к числу задач на исследование. В подавляющем большинстве случаев этот факт может быть установлен на первых этапах работы с задачей, поэтому прежде всего учителю нужно помочь школьникам определить принадлежность данной задачи к виду задач на исследование.

Во-вторых, поскольку наиболее характерным признаком таких задач является необходимость рассмотрения всевозможных ситуаций, сопоставления свойств нескольких объектов, фигурирующих в задаче, учителю в первую очередь следует обсудить с учащимися все эти ситуации. Иными словами, необходимо помочь учащимся смоделировать всю структуру процесса решения задачи вне зависимости от того, каким будет решение задачи на каждом из выявленных участков. Чаще всего это имеет место в процессе поиска решения задач с параметрами. Практика показывает, что именно такая стратегия работы с задачами на исследование наиболее эффективна. Объяснить это можно тем, что сразу после того, как учащиеся установят, что данная задача относится к виду задач на исследование, процесс ее решения они основывают непосредственно на главных отличительных особенностях таких задач. Эти отличительные особенности – ключ к решению задач данного вида. К тому же, действуя подобным образом, школьники запоминают особенности работы с такими задачами, что также способствует формированию умения выполнять поиск их решения.

В-третьих, внутрипредметные связи в процессе поиска решения задач на исследование реализуются и тогда, когда учащиеся моделируют структуру решения задачи, и тогда, когда они выполняют решение каждой из подзадач, в своей совокупности составляющих указанную структуру.

В процессе работы с нетривиальной математической задачей внутрипредметные связи реализуются на каждом из этапов ее решения. Как показывают приведенные выше примеры, на одном этапе решения задачи внутрипредметные связи используются лишь для реализации очевидных действий в решении задачи, а на другом этапе они являются той платформой, опираясь на которую субъект, решающий задачу, выдвигает очередную идею в ее решении. Именно это обстоятельство позволяет утверждать, что внутрипредметные связи являются одним из самых основных ресурсов обучения школьников решению задач вообще и поиску их решения, в частности.

Рассмотренные в данной статье примеры также демонстрируют то обстоятельство, что внутрипредметные связи могут использоваться как эффективный ресурс процесса поиска решения (следовательно, и обучения поиску решения) математических задач всех других их видов. Этот факт находит подтверждение и в работах В. А. Далингера [3], Л. С. Капкаевой [4], В. М. Монахова и В. Ю Гуревича [5], А. В. Шевкина [6]. Задача из третьего примера, вообще говоря, является задачей на вычисление, но найти способ ее решения, игнорируя сущность внутрипредметных связей, практически невозможно. Резюмируя изложенное, можно сделать вывод о том, что использование внутрипредметных связей в обучении поиску решения математических задач основывается на двух факторах. Во-первых, учителю нужно соответствующим образом выстраивать диалог с учащимися, помогая им выполнять поиск решения задач. Во-вторых, внутрипредметные связи в процессе обучения математике могут быть реализованы множеством способов, поэтому необходимо следить за тем, чтобы в ходе обучения школьников регулярно и систематически были задействованы все основные способы их реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аксенов А. А.* Теория обучения поиску решения школьных математических задач: Монография [Текст] / А. А. Аксенов. – Орел: ОГУ, Полиграфическая фирма «Картуш», 2007. – 200 с.
2. *Аксенов А. А.* Научно-методические основы обучения учащихся средних школ поиску решения математических задач: Методическое пособие для учителей [Текст] / А. А. Аксенов. – Орел: ООИУУ, 2007. – 96 с.
3. *Далингер В. А.* Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Кн. для учителя [Текст] / В. А. Далингер. – М.: Просвещение, 1991. – 80 с.
4. *Капкаева Л. С.* Интеграция алгебраического и геометрического методов в среднем математическом образовании [Текст]: Дис. ... д-ра пед. наук / Л.С. Капкаева. – Саранск, 2004. – 424 с.
5. *Монахов В. М., Гуревич В. Ю.* Об одном методе системного анализа внутрипредметных связей [Текст] / В. М. Монахов, В. Ю. Гуревич // Математика в школе. – 1980. – № 2. – С. 54–57.
6. *Шевкин А. В.* Об учете и использовании внутрипредметных связей в процессе преподавания математики [Текст] / А. В. Шевкин // Проблемы совершенствования преподавания математики в средней школе / Под ред. С. Б. Суворовой. – М.: Изд-во АПН СССР, 1986. – С. 130–135.