С. Ю. Трофимова

УНИВЕРСАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СТАБИЛИЗАЦИИ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПОНИЖЕНИИ СИММЕТРИИ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ВУЗОВСКИХ КУРСАХ ФИЗИКИ

[Работа поддержана грантом № 2.1.1/3847 программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)»]

Предложена простая универсальная модель стабилизации квантовой системы при понижении симметрии, основанная на анализе квантовых состояний фермионов в потенциальном ящике в виде прямоугольного параллелепипеда. Показано, что минимум энергии системы фермионов в потенциальном ящике при сохранении его объема осуществляется при его кубической форме или деформации вытянутости или сжатия в одном из направлений в зависимости от набора квантовых чисел и конфигурации волновой функции рассматриваемого стационарного состояния. Опыт показывает высокую эффективность использования в физическом образовании простой, основанной на первых принципах наглядной модели стабилизации структуры при понижении симметрии.

Ключевые слова: фундаментальная физика, преподавание физики, симметрия в физике, понижение симметрии, стабилизация структур, простая универсальная модель.

S. Trofimova

A UNIVERSAL MODEL OF QUANTUM SYSTEM STABILISATION WITH THE DECREASE OF SYMMETRY AND ITS APPLICATION IN UNIVERSITY PHYSICS COURSE

A simple universal model of stabilization of quantum system is suggested with downturn of the symmetry based on the analysis of fermion quantum states in a potential box in the form of a rectangular parallepiped. It is shown, that the energy minimum of fermion system in a potential box at preservation of its volume is carried out at its cubic form or deformation of elongation or compression in one of directions depending on a set of quantum numbers and a configuration of wave function of a considered stationary condition. The experiment shows high efficiency of application of the simple, based on the first principles, evident model of structure stabilization at downturn of symmetry.

Keywords: teaching physics, simple universal model.

Закономерности симметрии занимают особое место в системе фундаментальных законов физики. Достаточно отметить, что целые разделы современной физики, например, субатомная физика, физика элементарных частиц, сущест-

венным образом основаны на фундаментальных закономерностях симметрии [13]. Вопросы стабилизации структур при изменении их симметрии занимают существенное место в физике молекул [15; 16; 22], кристаллов [4; 12; 18], физике фазовых переходов [4; 12; 18].

Стабилизируются с понижением симметрии решетки, например, кристаллы V группы таблицы Менделеева. Кристаллическая решетка типа висмута с валентными p-связями является неустойчивой в простой кубической структуре [1; 5; 22]. Она стабилизируется путем понижения симметрии, что проявляется в ромбоэдрической деформации вытянутости кубической ячейки вдоль одной из пространственных диагоналей — ось (111) и смещения двух гранецентрированных подрешеток вдоль этой диагонали [1; 5; 22]. Одним из наиболее важных примеров систем, стабилизирующихся при понижении симметрии и формировании при этом спонтанной поляризации, являются кристаллы сегнетоэлектриков [3; 14].

В связи с вышеизложенным актуальной является задача разработки простых наглядных моделей, демонстрирующих стабилизацию структур при изменении их симметрии, и применения данных моделей в преподавании физики, в частности, физики конденсированного состояния, кристаллов и наноструктур [9].

Исходная модель. Одномерная задача о стационарных состояниях электрона в потенциальном ящике является общепринятой моделью в изложении основ физики квантовых состояний микрообъекта в разделе «квантовая физика» курсов общей физики [20]. Трехмерная задача положена в основу изложения основ теории металлов по Зоммерфельду в курсе физики твердого тела [2]. А. Н. Матвеев [17] использовал результаты решения одномерной задачи о стационарных состояниях электрона для моделирования ковалентной связи при образовании двухатомных молекул типа молекулы водорода.

Дальнейшим развитием рассмотренных подходов является использование в преподавании физики задачи о стабилизации конфигурации потенциального ящика с понижением симметрии и периодической системе устойчивых квантовых состояний в потенциальном ящике при понижении его симметрии в результате деформации с сохранением объема [6, 7, 10, 11, 19]. Простейшей моделью является квантовая система фермионов в трехмерном потенциальном ящике в виде прямоугольного параллелепипеда, форма которого соответствует элементарной ячейке гипотетического кристалла.

Структурные фазовые переходы в кристаллической фазе обычно происходят при незначительном изменении плотности кристалла [4, 12, 18]. Поэтому исследование обсуждаемой квантовой системы осуществляется при изменении формы потенциального ящика в приближении сохранения его объема. Произведем исследование изменения энергии квантовых состояний микрообъекта (электрона) в потенциальном ящике при понижении его симметрии по сравнению с кубической путем изменения длины одного из ребер с сохранением объема.

Такая задача может быть рассмотрена в лекционном курсе, проанализирована на практических занятиях аналитически или численно с применением распространенных математических программных средств типа MathCAD, Maple, Mathematica. Краткий анализ задачи с применением MathCAD для расчетов и графического представления результатов приведен ниже.

В потенциальном ящике с конфигурацией в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами **a, b, c** квантовые энергетические состояния электрона определяются соотношением

$$E(n_1, n_2, n_3) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}\right). \quad (1)$$

Пусть система допускает возможность изменения формы потенциального ящика путем изменения длины одного из ребер **c** при сохранении объема $V = \mathbf{a_0^3} = \mathbf{a*b*c} = \text{const}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{c} = V/\mathbf{a}^2$. Исследуем поведение энергетических состояний электронов (1) при такой деформации потенциального ящика.

$$E(n_1, n_2, n_3) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{a^2} + \frac{n_3^2}{c^2}\right) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{(n_1^2 + n_2^2)\cdot c}{V} + \frac{n_3^2}{c^2}\right). \quad (2)$$

Минимум энергии состояния соответствует (dE/dc) = 0. При указанных условиях из выражения (2) получим

$$\frac{(n_1^2 + n_2^2)}{V} - \frac{2n_3^2}{c^3} = 0, \qquad c = \sqrt[3]{V\frac{2\cdot n_3^2}{n_1^2 + n_2^2}} = a_o\sqrt[3]{\frac{2\cdot n_3^2}{n_1^2 + n_2^2}}, \quad (3)$$

Из выражений (3) следует, что при $n_1 = n_2 = n_3$ минимум энергии соответствует кубической симметрии потенциального ящика $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{a_o}$. Состояния с $n_1 = n_2 = n_3$ не вырождены. Состояния с набором квантовых чисел типа (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), а также (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1) в случае кубической симметрии, при $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{a_o}$, являются трехкратно вырожденными по энергии.

Из выражений (3) следует, что для состояний типа (1,1,2) минимум энергии соответствует

$$c(1,1,2) = a_o\sqrt[3]{\frac{2*4}{1+1}} = 1{,}587\cdot a_o \quad (4)$$

вытянутости параллелепипеда вдоль оси (3) при уменьшении площади перпендикулярного ей основания. Так как энергия состояния зависит от квадратов параметров **a, b, c**, а оси (1), (2), (3) в исходной кубической форме параллелепипеда равноправны, то понижение энергии состояния возможно при удлинении параллелепипеда вдоль одного из шести направлений (положительное или отрицательное направление одной из трех осей). Выбор направления удлинения происходит спонтанно, носит случайный характер или определяется внешним воздействием. Внешнее воздействие также может вызвать переключение уже спонтанно произошедшего удлинения

Для состояний типа (2,2,1) энергия состояния достигает минимума при значениях **c,** равных

$$c(2,2,1) = a_o\sqrt[3]{\frac{2*1}{4+4}} = 0{,}630\cdot a_o, \quad (5)$$

что соответствует сжатию параллелепипеда в одном из эквивалентных шести направлений и увеличению площади перпендикулярного ему основания.

В рассмотренных случаях, отраженных в соотношениях (5) и (6), понижение симметрии, как в случае эффекта Яна—Теллера в молекулах [18], сопровождается снятием вырождения, т. е. расщеплением исходного трехкратно вырожденного состояния на два: невырожденное и двукратно вырожденное.

Для двух заполненных состояний с квантовыми числами типа (1, 1, 1) и (1, 1, 2) минимум энергии системы достигается при

$$c = a_o \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}} = a_o \sqrt[3]{\frac{10}{4}} = 1{,}357 \cdot a_o \,, \qquad (6)$$

что соответствует вытянутости потенциального ящика вдоль одного из ребер (**c**) или любом другом из шести эквивалентных направлений и понижении симметрии параллелепипеда до тетрагональной.

Это иллюстрирует рис. 1, на котором представлен график зависимости энергии системы в единицах ($\pi^2\hbar^2/2m$) при заполнении двух состояний с квантовыми числами (1, 1, 1) и (1, 1, 2) в зависимости от величины **(c)** при a = b, a_o = 10 и V = const. Минимум энергии наблюдается при c = 13,57.

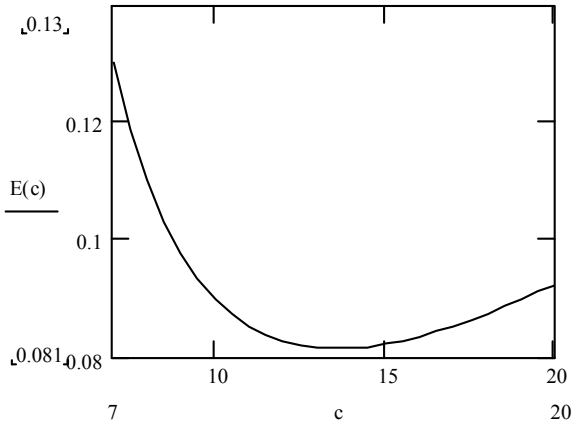

Рис. 1. Энергия электронных состояний с квантовыми числами (1, 1, 1) и (1, 1, 2) в трехмерном потенциальном ящике в зависимости от величины *c*

При последовательном заполнении квантовых состояний в соответствии с принципом Паули энергия системы будет складываться из составляющих (1) для различных сочетаний квантовых чисел. Соответствующее минимуму энергии системы значение параметра (**c**) можно получить аналогично (3), приравняв нулю производную указанной суммы по параметру (**c**) при условии сохранения объема. Для расчетного анализа принято V = 1000, a_0 = 10. Классификация последовательно заполняемых по мере возрастания энергии квантовых состояний приведена в табл. 1. Номеру состояний в верхних рядах таблицы сопоставлено приведенное в нижних рядах сочетание квантовых чисел (n_1, n_2, n_3) заполненного состояния с наибольшей энергией, отделяющего заполненные состояния от незаполненных. Таблица может быть продолжена.

Таблица 1

Номер состояний	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_1, n_2, n_3	111	112	121	211	221	212	122	222	223	232	322
Номер состояний	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
n_1, n_2, n_3	332	323	233	333	334	343	433	443	434	344	444

Параметры потенциального ящика (**c**) и значения энергии системы при заполненных состояниях до номеров, указанных в табл. 1, приведены на рис. 2, 3. Наблюдается четкая периодичность стабилизации системы с минимизацией энергии при понижении симметрии ячейки.

Стабилизация системы при кубической конфигурации соответствует наиболее высокой симметрии заполненных состояний до 1, 4, 7, 8, 11, 14, 15, 18, 21, 22. Стабилизация при деформации вытянутости происходит при наибольшем понижении энергии и соответствует пониженной симметрии заполненных состояний 2, 9, 16; деформации сжатия соответствует меньшее по сравнению с деформацией вытянутости уменьшение энергии состояний 5, 12, 19.

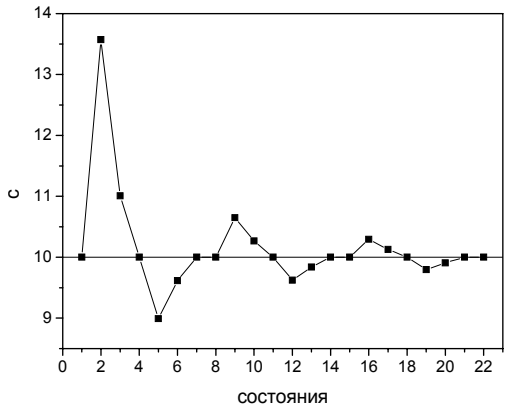

Рис. 2. Значения параметра **c**, которым соответствуют минимумы энергии системы состояний, заполненных до номера из табл. 1, обозначенного на горизонтальной оси, при a_0 =10

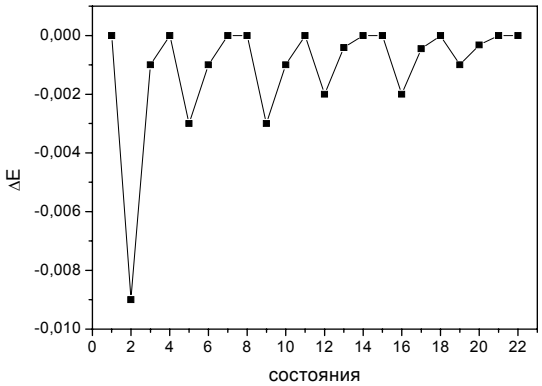

Рис. 3. Уменьшение энергии системы (в усл. ед.) при понижении симметрии ячейки по сравнению с кубической в зависимости от номера заполненного состояния с наибольшей энергией

Произведенный анализ показывает, что в предложенной простейшей модели проявляются фундаментальные закономерности стабилизации квантовой системы при понижении ее симметрии и снятии вырождения состояний, что может быть представлено в разделе «Квантовая физика» вузовского курса общей физики. Проведенный ниже анализ стабилизации кристаллической структуры полуметаллов и сегнетоэлектриков при понижении симметрии решетки может быть эффективно использован в вузовских курсах физики твердого тела и физики конденсированного состояния.

Применение модели к описанию кристаллов полуметаллов V группы таблицы Д. И. Менделеева. Приведем параметры элементарных ячеек кристаллов Bi, Sb, As в сравнении с простой кубической решеткой в псевдокубических (c, θ), и ромбоэдрических (a, α, U) координатах, расстояния между ближайшими r_1 и более удаленными r_2 соседними атомами, углы φ_1 и φ_2 валентных связей, температуры фазового перехода T_k в кубическую конфигурацию [1, 5, 22]. Линейные размеры даны в ангстремах.

Стабильная структура кристаллов типа висмута обеспечивается ромбоэдрической деформацией вытянутости исходной кубической ячейки вдоль одной из пространственных диагоналей и сдвигом двух гранецентрированных подре-

шеток вдоль этой диагонали [1, 5, 22]. Указанная деформация приводит к понижению симметрии кристаллической решетки от кубической до ромбоэдрической. Показателями понижения симметрии по сравнению с кубической служат отличия углов (θ, φ_1, φ_2) от 90°, параметра U от 0,25, а также неравенство расстояний r_1 и r_2, (табл. 2).

Таблица 2

c	Мышьяк	Сурьма	Висмут	Куб
	5,564	6,228	6,568	—
θ	$84^o38'$	$87^o25'$	$87^o32{,}4'$	90°
a	4,131	4,507	4,746	—
α	$54^o10'$	$57^o6{,}5'$	$57^o14{,}2'$	60°
U	0,226	0,233	0,237	0,25
r_1	2,51	2,87	3,10	$r_1 = r_2$
r_2	3,15	3,36	3,47	$r_1 = r_2$
φ_1	97°	96°	93°	90°
φ_2	73°	79°	81°	90°
T_K, K	5830	3210	2810	—

Сравнение данных, приведенных в табл. 2, с результатами анализа предложенной модели показывает, что стабилизация структуры кристаллов типа висмута при понижении их симметрии может быть следствием фундаментальных закономерностей поведения электронов в трехмерном потенциальном ящике [6].

Деформация вытянутости ячейки кристаллов типа висмута со стабилизацией структуры при понижении симметрии происходит вдоль одной из трех пространственных диагоналей исходного куба [1, 5, 22]. В идеальном монокристалле эта деформация происходит когерентно во всем макроскопическом объеме. Внешнее механическое воздействие может привести к переключению направления указанной деформации на другую диагональ, что приводит к двойникованию кристаллов типа висмута [8].

Применение модели к описанию сегнетоэлектрического состояния. Из рис. 3 следует, что наибольшее понижение энергии при деформации вытянутости соответствует состоянию с квантовыми числами (1, 1, 2). Проанализируем систему с двумя заполненными состояниями с квантовыми числами (1, 1, 1) и (1, 1, 2) [19, 21].

В принятой модели есть единственный параметр для выбора — это размер потенциального ящика кубической симметрии, длина ребра куба (a_0). Все получаемые численные результаты и их точность в рамках принятой модели полностью определяются величиной (a_0) и точностью ее задания. Для анализа примем $a_0 = 2{,}500 \cdot 10^{-10}$ м.

Произведем расчет энергии системы при кубической симметрии ячейки $\mathbf{a = b = c = a_o}$:

$$E(1,1,1) + E(1,1,2) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma_0^2}\left((1+1+1)+\left(\frac{1}{0}+\frac{1}{0}+\frac{2^2}{1}\right)\right) \quad (7)$$

Минимум энергии системы достигается при деформации вытянутости при $c = 1{,}357 \cdot a_0$, и $a = b = \sqrt{\frac{V}{c}} = 0{,}858 \cdot a_0$. В этом случае:

$$E(1,1,1)+E(1,1,2)=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma_0^2}\left(\left(\frac{1}{0.858^2}+\frac{1}{0.858^2}+\frac{1}{1.357^2}\right)+\left(\frac{1}{0.858^2}+\frac{1}{0.858^2}+\frac{2^2}{1.357^2}\right)\right). \quad (8)$$

Расчет по формулам (7) и (8) для энергии состояний дает значения

$$E(\text{куб}) = (17{,}936+35{,}872)\ \text{эВ} = 53{,}808\ \text{эВ}. \quad (9)$$

$$E(\text{деф}) = (19{,}490+29{,}23)\ \text{эВ} = 48{,}720\ \text{эВ}. \quad (10)$$

В выражениях (9), (10) приведены два слагаемых соответственно для состояний (1, 1, 1) и (1, 1, 2). Видно, что при деформации вытянутости энергия увеличивается для состояния (1, 1, 1) и уменьшается для состояния (1, 1, 2), что приводит к уменьшению энергии для системы в целом.

Таким образом, при деформации вытянутости, удлинении ребра параллелепипеда на величину $d = (3{,}393 - 2{,}500)\cdot 10^{-10}$ м $= 0{,}895\cdot 10^{-10}$м, энергия системы понижается на величину $\Delta E = E_{(\text{куб})} - E_{(\text{деф})} = 5{,}088$ эВ.

Механизмом разделения зарядов в модели является сама деформация вытянутости с понижением энергии системы. Система стабилизируется с понижением симметрии и разделением зарядов до тех пор, пока увеличение электрической энергии, обусловленное разделением зарядов, остается меньше понижения энергии состояний, обусловленного деформацией вытянутости ячейки.

Если рассматриваемое понижение симметрии сопровождается относительным смещением элементарных положительных и отрицательных зарядов на величину d удлинения ребра c параллелепипеда, то величина возникающего при этом электрического дипольного момента будет равна $P = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}895\cdot 10^{-10} = 1{,}432\cdot 10^{-29}$ Кл·м.

При относительном смещении положительных и отрицательных зарядов увеличивается энергия электрического взаимодействия. Произведем оценку этого увеличения:

$$\Delta E = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_0+d}\right). \quad (11)$$

Подстановка a_0 и d в выражение (11) дает значение $\Delta E = 1{,}513$ эВ для увеличения электростатической энергии, что заметно ниже уменьшения энергии вследствие деформации вытянутости и понижения симметрии $\Delta E = 5{,}088$ эВ. Это делает возможной такую деформацию, сопровождающуюся разделением зарядов и возникновением дипольного момента порядка его величины, приходящейся на ячейку реального сегнетоэлектрика. Например, на ячейку титаната бария приходится дипольный момент, примерно равный $2\cdot 10^{-29}$ Кл·м [14].

В ы в о д ы . Предлагаемая простая модель отражает ряд существенных свойств систем, в частности, реальных кристаллов.

1. Стабилизация структуры кристаллов осуществляется при различной степени симметрии. В зависимости от симметрии волновых функций, от набора

квантовых чисел состояний устойчивой может быть структура кубической симметрии или ромбоэдрической симметрии при деформации вытянутости или сжатия исходного куба.

2. По аналогии с группами в таблице Д. И. Менделеева, элементы которых преимущественно кристаллизуются в структурах одинаковой симметрии, имеет место периодичность устойчивых структур рассматриваемой модели в зависимости от симметрии волновых функций квантовых состояний.

3. Переход в устойчивое состояние с понижением симметрии осуществляется спонтанно при случайном выборе в качестве преимущественного одного из эквивалентных в исходном состоянии направлений, которое может быть изменено под внешним воздействием. Примером может служить двойникование кристаллов типа висмута при механическом напряжении.

4. Если при понижении симметрии ячейки происходит спонтанное разделение электрических зарядов с появлением электрического диполя, то такое состояние будет устойчивым, если увеличение энергии электрического взаимодействия будет меньше понижения энергии системы вследствие понижения симметрии. Возникающий при этом дипольный момент по порядку величины соответствует дипольному моменту, приходящемуся на ячейку типичных сегнетоэлектриков. Внешним воздействием, приводящим к изменению преимущественного направления при понижении симметрии, может быть внешнее электрическое поле, вызывающее изменение направления поляризации ячейки.

Полученные результаты использованы в курсах общей физики при изучении общих вопросов стабилизации систем с понижением симметрии, в курсах физики конденсированного состояния, физики твердого тела, физики молекул и наноструктур при изложении вопросов стабилизации их структуры. Фундаментальный уровень и высокая степень общности модели в сочетании с ее простотой и наглядностью обеспечивает высокую эффективность использования предложенной модели в учебном процессе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрикосов А. А.* Некоторые вопросы теории полуметаллов // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 5. С. 2063–2074.

2. *Ашкрофт Н., Мермин Н.* Физика твердого тела. М.: Мир, 1979. Т. 1. 399 с.

3. *Барфут Дж.* Введение в физику сегнетоэлектрических явлений. М.: Мир, 1970. 352 с.

4. *Вайнштейн Б. К., Фридкин В. М., Инденбом В. Л.* Современная кристаллография. Т. 2. Структура кристаллов. М.: Наука, 1979. 359 с.

5. *Волков Б. А., Фальковский Л. А.* Электронная структура полуметаллов группы V // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. № 6(12). С. 2135–2151.

6. *Грабов В. М.* Стабилизация структуры кристаллов при понижении симметрии решетки // Физика диэлектриков (Диэлектрики—2000): Тез. докл. IX Междун. конф. Т. 1. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2000. С. 34–36.

7. *Грабов В. М.* Стабилизация структуры кристалла при понижении симметрии ячейки // XVII Всерос. конф. по физике сегнетоэлектриков: Тезисы докладов. Пенза, 2005. С. 100.

8. *Грабов В. М., Иванов Г. А., Налетов В. Л., Овсянов В. М., Парахин А. С.* Блочная структура кристаллов висмута, сурьмы и сплавов висмут-сурьма, выращенных методом зонной перекристаллизации // Известия АН СССР. Неорганические материалы. 1982. Т. 18. № 1. С. 33–37.

9. *Грабов В. М., Немов С. А.* Учебный курс «Основы физики конденсированного состояния» для физических специальностей вузов» // Физическое образование в вузах. Т. 12. 2006. № 1. С. 55–66.

10. *Грабов В. М., Сангаджиева Г. А.* Периодическая система устойчивых состояний кристалла при понижении симметрии // Физика диэлектриков (Диэлектрики—2004): Мат-лы X Междунар. конф. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2004. С. 287–290.

11. *Грабов В. М., Трофимова С. Ю.* Стабилизация квантовой системы при понижении симметрии как общее условие реализации сегнетоэлектрического состояния // XVII Всерос. конф. по физике сегнетоэлектриков: Тезисы конференции. СПб., 2008. С. 77–78.

12. *Жданов Г. С.* Физика твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1961. 501 с.

13. *Капитонов И. М.* Введение в физику ядра и частиц. М., 2004. 384 с.

14. *Китель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 791 с.

15. *Леше А.* Физика молекул. М.: Мир, 1987. 228 с.

16. *Мак-Вини Р., Сантклиф Б.* Квантовая механика молекул. М.: Мир. 1978. 380 с.

17. *Матвеев А. Н.* Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989. 439 с.

18. *Нокс Р., Голд А.* Симметрия в твердом теле. М.: Мир, 1970. 424 с.

19. *Сангаджиева Г. А., Трофимова С. Ю.* Задача о стационарных состояниях микрообъекта в потенциальном ящике в преподавании физики // Физика в системе современного образования (ФССО-05): Мат-лы VIII Междун. конф. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2005. С. 355–358.

20. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 5. Атомная и ядерная физика. Ч. 1. Атомная физика. М.: Наука, 1986. 416 с.

21. *Фано У., Фано Л.* Физика атомов и молекул. М.: Наука, 1989. 656 с.

22. *Enders P.* Structure and Bonding in Cubic IV–VI Crystals. II Instability of the TO (Γ) Mode: Unified Universal Parameter Treatment of the Group-V Semimetals and Cubic IV–VI Semiconductors // Phys. Stat. Sol. (b) 1984. V. 121. № 1. P. 39–46.

REFERENCES

1. *Abrikosov A. A.* Nekotorye voprosy teorii polumetallov // ZHETF. 1973. T. 65. № 5. S. 2063–2074.

2. *Ashkroft N., Mermin N.* Fizika tverdogo tela. M.: Mir, 1979. T. 1. 399 s.

3. *Barfut Dzh.* Vvedenie v fiziku segnetoelektricheskih javlenij. M.: Mir, 1970. 352 s.

4. *Vajnshtejn B. K., Fridkin V. M., Indenbom V. L.* Sovremennaja kristallografija. T. 2. Struktura kristallov. M.: Nauka, 1979. 359 s.

5. *Volkov B. A., Fal'kovskij L. A.* Elektronnaja struktura polumetallov gruppy V // ZHETF. 1983. T. 85. № 6(12). S. 2135–2151.

6. *Grabov V. M.* Stabilizacija struktury kristallov pri ponizhenii simmetrii reshetki // Fizika dielektrikov (Dielektriki—2000): Tez. dokl. IX Mezhdun. konf. T. 1. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gercena, 2000. S. 34–36.

7. *Grabov V. M.* Stabilizacija struktury kristalla pri ponizhenii simmetrii jachejki // XVII Vseros. konf. po fizike segnetoelektrikov: Tezisy dokladov. Penza, 2005. S. 100.

8. *Grabov V. M., Ivanov G. A., Naletov V. L., Ovsjanov V. M., Parahin A. S.* Blochnaja struktura kristallov vismuta, sur'my i splavov vismut—sur'ma, vyraschennyh metodom zonnoj perekristallizacii // Izvestija AN SSSR. Neorganicheskie materialy. 1982. T. 18. № 1. S. 33–37.

9. *Grabov V. M., Nemov S. A.* Uchebnyj kurs «Osnovy fiziki kondensirovannogo sostojanija» dlja fizicheskih special'nostej vuzov» // Fizicheskoe obrazovanie v vuzah. T. 12. № 1. 2006. S. 55–66.

10. *Grabov V. M., Sangadzhieva G. A.* Periodicheskaja sistema ustojchivyh sostojanij kristalla pri ponizhenii simmetrii // Fizika dielektrikov (Dielektriki—2004): Mat-ly X Mezhdunar. konf. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gercena, 2004. S. 287–290.

11. *Grabov V. M., Trofimova S. Ju.* Stabilizacija kvantovoj sistemy pri ponizhenii simmetrii kak obschee uslovie realizacii segnetoelektricheskogo sostojanija // XVII Vseros. konf. po fizike segnetoelektrikov: Tezisy konferencii. SPb., 2008. S. 77–78.

12. *Zhdanov G. S.* Fizika tverdogo tela. M.: Izd-vo MGU, 1961. 501 s.
13. *Kapitonov I. M.* Vvedenie v fiziku jadra i chastic. M., 2004. 384 s.
14. *Kitel' Ch.* Vvedenie v fiziku tverdogo tela. M.: Nauka, 1978. 791 s.
15. *Leshe A.* Fizika molekul. M.: Mir, 1987. 228 s.
16. *Mak-Vini R., Santklif B.* Kvantovaja mehanika molekul. M.: Mir. 1978. 380 s.
17. *Matveev A. N.* Atomnaja fizika. M.: Vysshaja shkola, 1989. 439 s.
18. *Noks R., Gold A.* Simmetrija v tverdom tele. M.: Mir, 1970. 424 s.
19. *Sangadzhieva G. A., Trofimova S. Ju.* Zadacha o stacionarnyh sostojanijah mikro-objekta v potencial'nom jaschike v prepodavanii fiziki // Fizika v sisteme sovremennogo obrazovanija (FSSO-05): Mat-ly VIII Mezhdun. konf. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gercena, 2005. S. 355–358.
20. *Sivuhin D. V.* Obschij kurs fiziki. T. 5. Atomnaja i jadernaja fizika. Ch. 1. Atomnaja fizika. M.: Nauka, 1986. 416 s.
21. *Fano U., Fano L.* Fizika atomov i molekul. M.: Nauka, 1989. 656 s.
22. *Enders P.* Structure and Bonding in Cubic IV–VI Crystals. II Instability of the TO (G) Mode: Unified Universal Parameter Treatment of the Group-V Semimetals and Cubic IV–VI Semiconductors // Phys. Stat. Sol. (b) 1984. V. 121. № 1. P. 39–46.