А. М. Калугина

ИНДЕКСЫ ВЛАСТИ И ПАРАДОКСЫ ВЛАСТИ В ЧИТИНСКОЙ ОБЛАСТНОЙ ДУМЕ

Работа представлена лабораторией математической кибернетики Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В. В. Мазалов

В статье рассматривается применение индексов власти в анализе правящих структур разного уровня (индекс Банзафа, индекс Пенроуза – Банзафа, Дигана – Пакела, индекс Холера), понятие парадоксов власти. Используется два подхода к построению индекса власти. Найдены значения индексов власти, исследовано появление парадоксов власти для Читинской Областной Думы 3-го и 4-го созывов.

The article considers the indexes of power application to the analysis of the ruling structures of different levels (Banzhaf index, Penrose–Banzhaf index, Deegan–Packel index, Holer index) and the concept of paradoxes of power. The two approaches to constructing an index of power are used. The values of indexes of power are found; the occurrence of paradoxes of power in the Chita Regional Duma of 3rd and 4th convocations is investigated.

При анализе голосования возникает важный вопрос: кто играет решающую роль в голосовании и как измерить эту меру влияния. В течение последних 50 лет было предложено много так называемых индексов власти. Наиболее важные из тех, которые представлены в литературе, – индекс Шепли – Шубика, нормализованный индекс Банзафа, индекс Пенроуза – Банзафа, индекс Дигана – Паккела и индекс Холера[1].

Индексы власти находят широкое применение в анализе принятия решений правящих структур, состоящих из политических партий. Такую правящую структуру можно представить в виде игры, в которой игроками являются политические партии, принимающие решения путем голосования. Число членов данной партии определяет вес данного игрока. Индексы власти в таком голосовании оценивают распределение власти между партиями. Мы проанализируем структуру Читинской Областной Думы.

Определим игру голосования. Обозначим через $N=\{1, 2, ..., n\}$ непустой конечный набор игроков. Любой поднабор назовем коалицией. Игра голосования G определяется парой $G=(N, W)$, где W – набор коалиций, который удовлетворяет следующим предположениям:

1) $W\neq\varnothing$,
2) $\varnothing\notin W$,
3) если $S\subset T$ и $S\in W$, тогда $T\in W$.

Элемент W называется выигрывающей коалицией. Набор всех коалиций, не принадлежащих W, обозначим L. Элемент L называется проигрывающей коалицией. Коалиция блокирования – это такая проигрывающая коалиция, что ее дополнение также является проигрывающей коалицией.

Игра голосования называется надлежащей, если дополнение любой выигрывающей коалиции – проигрывающая коалиция, и сильной, если дополнение любой проигрывающей коалиции – выигрывающая коалиция. Игра голосования называется решающей, если она одновременно является надлежащей и сильной.

Пусть S – выигрывающая коалиция. Игрок $k\in S$ называется основным, если его удаление превращает S в проигрывающую коалицию. Выигрывающая коалиция, в которой все игроки являются основными, называется минимальной выигрывающей коалицией. Другими словами, минимальная выигрывающая коалиция – это такая выигрывающая коалиция, что любой ее поднабор – проигрывающая коалиция. Болваном называется игрок, который не принадлежит никакой минимальной выигрывающей коалиции. Игрок-вето – это игрок, принадлежащий каждой минимальной выигрывающей коалиции. Наконец, если один игрок составляет единственную минимальную выигрывающую коалицию, то он диктатор. В такой игре диктатор может быть охарактеризован как единственный игрок, который не болван.

Важным классом игр голосования являются игры, в которых вес распределен на каждого игрока и указывает его силу в этой игре.

Используем обозначение $[q;\ w_1,\ ...,\ w_n]$, где q – доля, необходимая для коалиции, чтобы выиграть, и w_k– вес игрока (k=1, ..., n). Доля q и вес голосов $w_1,\ ...,\ w_n$ – положительные целые числа,

$$0 < q \le \sum_{k=1}^{n} w_k.$$

Коалиция S выигрывает, если и только если сумма веса ее членов, по крайней мере, такого размера q, как, т. е.

$$S \in W \Leftrightarrow \sum_{k \in S} w_k \ge q.$$

Индекс власти – это функция φ, которая связывает с каждой игрой (N, W) вектор $\varphi=(\varphi_1,\ ...,\ \varphi_n)$, где φ_k – неотрицательное число – мера влияния, с которой игрок $k\in N$ может повлиять на результат.

В данной статье мы рассмотрим применение следующих индексов:

• Нормализованный индекс Банзафа для игры голосования $G=(N,\ W)$ – это вектор $Bz(G)=(Bz_1(G),\dots,\ Bz_n(G))$, определенный как

$$Bz_k(G) = \frac{\eta_k}{\sum_{j \in N} \eta_j}, \quad (k = 1,2,\dots,n) \qquad (1)$$

где η_k – число выигрывающих коалиций, в которых игрок k является основным.

• Индекс Пенроуза – Банзафа, также называемый ненормализованным индексом Банзафа или абсолютным индексом Банзафа, – это вектор $PBz(G)=(PBz_1(G),\dots,\ PBz_n(G))$, определенный как

$$PBz_k(G) = \frac{\eta_k}{\beta_k} = \frac{\eta_k}{2^{n-1}}, \quad (k = 1,2,\dots,n) \qquad (2)$$

где β_k обозначает общее количество коалиций, содержащих игрока k.

• Индекс Дигана – Пакела для игры голосования $G=(N,W)$ вектор $DP(G)=(DP_i(G),\dots,\ DP_n(G))$, определенный как

$$DP_k(G) = \frac{1}{m} \sum_{\{S \in M;\, k \in S\}} \frac{1}{s} \quad (k = 1,2,\dots,n) \qquad (3)$$

где M набор всех минимальных выигрывающих коалиций, m – общее количество минимальных выигрывающих коалиций, и s – число игроков в S.

• Индекс Холера, также называемый индексом Холера – Пакела или общественно хорошим индексом власти, – это вектор $H(G)=(H_1(G),\dots,\ H_n(G))$, определенный как

$$H_k(G) = \frac{m_k}{\sum_{j \in N} m_j} \quad (k = 1,2,\dots,n) \qquad (4)$$

где m_k обозначает число минимальных выигрывающих коалиций, содержащих игрока k.

Рассмотрим ситуацию в Читинской Областной Думе. По данным на октябрь 2001 г. (выборы – 2001) и май 2005 г. (выборы – 2005) принадлежность к партиям выглядела следующим образом:

Наименование партии		2001	2005
СПС		3	–
Единая Россия		9	21
КПРФ		4	9
Аграрная Партия		3	4
ЛДПР		–	3
не определились (Нигде)		19	3
Итого	партий	5 (23)	5 (7)
	членов	38	40

Рассмотрим два варианта подсчета индексов власти в Читинской Областной Думе. С одной стороны, членов Думы, не примкнувших ни к какой партии, можно рассматривать как единую и неделимую партию; в этом случае число партий будет равно 5 (и в 2001 г., и в 2005 г.). Если же этих членов Думы рассматривать как самостоятельные партии, состоящие из одного человека, то общее число партий будет равно 23 в 2001 г. и 7 – в 2005 г.

Составим таблицу индексов власти для Читинской Областной Думы:

Индекс	Год	Партия		
		Нигде	Единая Россия	КПРФ
Банзафа	2001	0,789473684	0,052631579	0,052631579
		0,025134408	0,296271227	0,087749442
	2005	0	1	0
		0	1	0
Пенроуза–Банзафа	2001	0,9375	0,625	0,625
		0,05706811	0,672688961	0,199236631
	2005	0	1	0
		0	1	0
Дигана – Пакела	2001	0,5	0,125	0,125
		0,044956	0,064735	0,03828
	2005	0	1	0
		0	1	0
Холера	2001	0,5	0,125	0,125
		0,04359	0,0533	0,03747
	2005	0	1	0
		0	1	0

Индекс	Год	Партия	
		СПС/ЛДПР	Аграрная Партия
Банзафа	2001	0,052631579	0,052631579
		0,069212789	0,069212789
	2005	0	0
		0	0
Пенроуза – Банзафа	2001	0,625	0,625
		0,157148838	0,157148838
	2005	0	0
		0	0
Дигана – Пакела	2001	0,125	0,125
		0,042066	0,042066
	2005	0	0
		0	0
Холера	2001	0,125	0,125
		0,0405	0,0405
	2005	0	0
		0	0

Применив индексы власти к нашим данным, в первом случае (2001 г.) получим, что партия «Нигде» имеет самый большой вес; остальные партии поровну поделили оставшееся влияние, несмотря на то что их численность неодинакова. При этом следует отметить, что самая многочисленная партия входит в выигрывающие коалиции всегда, но не во всех случаях это дает ненулевой результат при подсчете составляющих индекса власти, следовательно, партия «Нигде» является игроком-вето, но не диктатором. Здесь остальные партии весьма малочисленны по сравнению с «Нигде», но ни одна из них не является болваном, так как хотя бы один раз входит в минимальную выигрывающую коалицию.

Во втором случае (2001 г.), т. е., когда имеется 23 партии, из которых 19 состоят из 1 члена, расчеты приводят к другим результатам. Здесь у партий, число членов которых одинаково, вес один и тот же, партия, имеющая меньшее число членов, имеет меньший вес, партия, имеющая большее число членов, имеет больший вес.

Пользуясь таблицей, можно сделать вывод, что для 2005 г. в обоих случаях партия Единая Россия, по численности составляющая больше половины от всего количества членов Думы, является диктатором, что и отражается на наших результатах.

Теперь рассмотрим понятия парадоксов власти.

• Парадокс перераспределения. Этот парадокс появляется, когда вес партии в голосовании уменьшается и в то же самое время индекс власти увеличивается.

Пусть $G=[q; w_1, ..., w_n]$ и $G'=[q; w'_1,...,w'_n]$ – две игры голосования такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} w'_k.$$

Парадокс перераспределения означает, что

$$\text{для некоторых} \quad k,\ w'_k < w_k \ и\ \phi_k(G') > \phi_k(G) \quad (5)$$

• Парадокс новых членов. Этот парадокс появляется, когда новая партия присоединяется к собранию и, по крайней мере, одна «старая» партия имеет большую власть в голосовании в этой новой ситуации, чем раньше.

Пусть $G=[q; w_1, ..., w_n]$ – игра голосования, и $G'=[q'; w_1,...,w_n, w_{n+1}]$ – новая игра с новой партией. Парадокс новых членов означает, что

$$\text{для некоторых} \quad k \in N,\ \phi_k(G') > \phi_k(G) \quad (6)$$

В определении парадокса перераспределения требуется, чтобы численность членов правящей структуры при перевыборах не изменялась, что в Читинской Областной Думе не происходит. Условие существования парадокса новых членов также не выполняется, так как при перевыборах веса всех «старых» партий меняются, а определение требует, чтобы они сохранялись. Таким образом, в результате перевыборов Читинской Областной Думы такие парадоксы не наблюдаются.

• Измененный парадокс перераспределения. Пусть $\tilde{w}_t$ – это вес партии, а ϕ_t – индекс власти партии в году t. Индекс власти ϕ показывает измененный парадокс перераспределения, если выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} (P_1)&: \tilde{w}_t > \tilde{w}_{t+k} \quad и \quad \phi_t \le \phi_{t+k} \\ (P_2)&: \tilde{w}_t < \tilde{w}_{t+k} \quad и \quad \phi_t \ge \phi_{t+k} \end{aligned} \quad (7)$$

• Измененный парадокс новых членов. Пусть $\tilde{w}_t$ – вес партии, ϕ_t – индекс власти и P_t – набор всех партий в году t. Индекс власти ϕ показывает измененный парадокс новых членов, если выполнено следующее условие:

$$(P): \tilde{w}_t \ge \tilde{w}_{t+k} \quad и \quad \phi_t < \phi_{t+k} \quad и \quad P_t \subset P_{t+k} \quad (8)$$

Используя определения измененных парадокса перераспределения и парадокса новых членов, можно сделать вывод, что в Читинской Областной Думе наблюдается только парадокс перераспределения. Парадокс новых членов не имеет места, так как в нашей ситуации появляется «новая» партия, но при этом одна из «старых» партий исчезает. Это отображено в таблице.

Индекс	Нигде	Единая Россия	КПРФ	СПС/ЛДПР	Аграрная Партия
Банзафа	–	–	P1	–	P1
	–	–	P1	–	P1
Пенроуза – Банзафа	–	–	P1	–	P1
	–	–	P1	–	P1
Дигана –Пакела	–	–	P1	–	P1
	–	–	P1	–	P1
Холера	–	–	P1	–	P1
	–	–	P1	–	P1

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Rusinowska A., van Deemen A.* The redistribution paradox and the Paradox of new members in the German parliament. Nova Science Publishers, 2004; Петросян Л. А. и др. Теория игр: Учебное пособие для университетов. М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998; Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций. 6-е изд. Перевод с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.