Л. В. Линчук

ДВУМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДОПУСКАЕМЫХ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ 2-го ПОРЯДКА

В работе рассматривается алгоритм редукции обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, допускающих двумерную алгебру альтернативных обобщенных операторов. Результаты работы полностью согласуются с классическими, являясь их обобщением. Дана классификация подалгебр, приведены примеры интегрируемых уравнений.

Ключевые слова: альтернативный обобщенный оператор, двумерная алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения.

L. V. Linchuk

TWO-DIMENSIONAL ALGEBRAS OF THE ALTERNATIVE GENERALIZED OPERATORS THAT ARE ADMITTED BY THE 2nd ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

The paper is devoted to the reduction of the 2nd order ordinary differential equations which are admitted a two-dimensional algebra of the alternative generalized operators. The results correlate with the classical results and generalize the classical algorithms. The classification of the subalgebras is made. The examples of the integrated equations are given.

Keywords: alternative generalized operators, two-dimensional algebra, ordinary differential equations.

Хорошо известно, что групповой анализ является мощным инструментом поиска симметрий и интегрирования дифференциальных уравнений. Широкая востребованность в приложениях стимулирует обобщение его понятий, средств и методов с целью расширения класса решаемых задач. Этим объясняется и многообразие рассматриваемых в групповом анализе симметрий: точечные, касательные, динамические, экспоненциальные нелокальные. В работе [3] предложен другой подход к обобщению классических симметрий и введено понятие альтернативного обобщенного оператора.

Альтернативным обобщенным оператором называется оператор

$$X = \xi(x,y,y')\partial_x + \zeta_0(x,y,y')\partial_y + \zeta_1(x,y,y')\partial_{y'}, \qquad (1)$$

где $\xi = \xi(x,y,y')$, $\zeta_0 = \zeta_0(x,y,y')$, $\zeta_1 = \zeta_1(x,y,y')$ — произвольные функции своих аргументов ($\zeta_0 \neq y'\xi$), k-е продолжение которого строится по формуле

$$\underset{k}{X} = X + \sum_{i=2}^{k} \zeta_i(x,y,y',\ldots,y^{(i)}),$$

где

$$\zeta_i = D_x\zeta_{i-1} - y^{(i)}D_x\xi + \left(\zeta_1 - D_x\zeta_0 + y'D_x\xi\right)\frac{\zeta_{i-1} - y^{(i)}\xi}{\zeta_0 - y'\xi}, \ i = 2,\ldots,k. \qquad (2)$$

Несмотря на отличную от классической формулу вычисления координат продолженного оператора (2) (в классической нет последнего слагаемого), альтернативные обобщенные операторы обладают важными свойствами, позволяющими считать их обобщением классических симметрий: во-первых, точечные и касательные симметрии содержатся в классе альтернативных обобщенных симметрий, а во-вторых, инварианты любого порядка этих операторов можно строить, зная базис инвариантов, с помощью оператора полной производной D_x. Последнее свойство позволяет использовать альтернативные обобщенные операторы для факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) согласно следующей теореме [3]:

Теорема 1. Если ОДУ 2-го порядка

$$y'' = F\left(x,y,y'\right) \qquad (3)$$

допускает альтернативный обобщенный оператор X, т. е. $\underset{2}{X}\left(y''-F\right)\Big|_{y''=F} = 0$, имеющий функционально независимые инварианты $u = u(x,y,y')$ и $v = v(x,y,y')$, т. е. $X(u) = 0$, $X(v) = 0$, причем $D_x v\big|_{y''=F} \neq 0$, то его можно представить в виде фактор-системы:

$$\begin{cases} u = u(x,y,y'), \\ v = v(x,y,y'), \\ G(v,u,u_v) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Но сведение ОДУ (3) к двум ОДУ 1-го порядка, которые следуют из системы (4), еще не гарантирует, что мы сможем проинтегрировать эти уравнения. Отчасти эту проблему удается решить, рассматривая не один, а пару операторов. Так, например, в [2] изложен алгоритм понижения порядка с помощью двумерной алгебры точечных операторов. Построим похожую теорию для класса альтернативных обобщенных операторов.

Пусть ОДУ (3) допускает два линейно независимых альтернативных обобщенных оператора:

$$\begin{aligned} X_1 &= \xi(x,y,y')\partial_x + \zeta_0(x,y,y')\partial_y + \zeta_1(x,y,y')\partial_{y'} \\ X_2 &= \alpha(x,y,y')\partial_x + \beta_0(x,y,y')\partial_y + \beta_1(x,y,y')\partial_{y'}, \end{aligned} \qquad (5)$$

(т. е. $X_1 \ne \lambda(x,y,y')X_2$ ни при какой функции $\lambda=\lambda(x,y,y')$) и

$$\left[\underset{2}{X_1},\underset{2}{X_2}\right]=\lambda_1(x,y,y')\underset{2}{X_1}+\lambda_2(x,y,y')\underset{2}{X_2}. \tag{6}$$

Если X_1 и X_2 — касательные операторы (под касательными операторами далее мы будем понимать точечные и собственно касательные операторы) и $\lambda_1=\mathrm{const}$, $\lambda_2=\mathrm{const}$, то в этом случае говорят, что операторы образуют двумерную алгебру. Альтернативные обобщенные операторы обладают свойством, отличающим их от классических операторов [3]:

$$\underset{k}{\left(\lambda(x,y,y')X\right)}=\lambda(x,y,y')\underset{k}{X}$$

(при таком домножении, например, точечный оператор становится точечным, домноженным на функциональный множитель $\lambda(x,y,y')$; он остается альтернативным обобщенным оператором, но уже не является точечным). Сформулированное свойство оправдывает рассмотрение в соотношении (6) функциональных, а не только числовых множителей λ_1 и λ_2. Это позитивное отличие нивелируется тем недостатком, что сумма двух альтернативных обобщенных операторов не всегда является альтернативным обобщенным оператором, поэтому, с одной стороны, нельзя употреблять термин подалгебра. Но, с другой стороны, если в качестве алгебры рассматривать все множество операторов вида (1), координаты продолжения которых выбираются произвольно, то X_1 и X_2 образуют в этой алгебре подалгебру. На самом деле этот факт с точки зрения применимости пары этих операторов для факторизации уравнения оказывается несущественным в силу следующей теоремы.

Теорема 2. Если линейно независимые альтернативные обобщенные операторы X_1 и X_2 обладают свойством (6), то существуют $\mu_1(x,y,y')\ne 0$, $\mu_2(x,y,y')\ne 0$, такие что

$$\left[\mu_1 X_1,\mu_2 X_2\right]=0. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть μ_1 и μ_2 являются ненулевыми решениями линейных уравнений с частными производными

$$\mu_1\lambda_1-X_2(\mu_1)=0,\quad \mu_2\lambda_2+X_1(\mu_2)=0. \tag{8}$$

Тогда

$$\left[\mu_1\underset{2}{X_1},\mu_2\underset{2}{X_2}\right]=\mu_1\left(\mu_2\underset{2}{X_1}\left(\underset{2}{X_2}\right)+X_1(\mu_2)\underset{2}{X_2}\right)-\mu_2\left(\mu_1\underset{2}{X_2}\left(\underset{2}{X_1}\right)+X_2(\mu_1)\underset{2}{X_1}\right)=$$

$$=\mu_1\mu_2\left[\underset{2}{X_1},\underset{2}{X_2}\right]+\mu_1X_1(\mu_2)\underset{2}{X_2}-\mu_2X_2(\mu_1)\underset{2}{X_1}=$$

$$=\mu_1\mu_2\left(\lambda_1\underset{2}{X_1}+\lambda_2\underset{2}{X_2}\right)+\mu_1X_1(\mu_2)\underset{2}{X_2}-\mu_2X_2(\mu_1)\underset{2}{X_1}=$$

$$=\mu_2\left(\mu_1\lambda_1-X_2(\mu_1)\right)\underset{2}{X_1}+\mu_1\left(\mu_2\lambda_2+X_1(\mu_2)\right)\underset{2}{X_2}=0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим точечные операторы

$$X_1 = x^2\partial_x + xy\partial_y + (y - xy')\partial_{y'}, \quad X_2 = -x\partial_x + y\partial_y + 2y'\partial_{y'},$$

удовлетворяющие коммутационному соотношению $\left[\underset{2}{X_1}, \underset{2}{X_2}\right] = \underset{2}{X_1}$. В нашем случае $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Из формул (6) находим $\mu_1 = x^{-1}$, $\mu_2 = 1$. Непосредственно можно проверить, что действительно $\left[\underset{2}{Y_1}, \underset{2}{Y_2}\right] = 0$, где $Y_1 = x^{-1}X_1$, $Y_2 = X_2$.

На практике достаточно часто приходится иметь дело с касательными операторами. Выполнение соотношения (7) для них означает, что они образуют двумерную алгебру в классическом понимании.

Теорема 3. Если X_1, X_2, — касательные операторы и $\left[\mu_1\underset{2}{X_1}, \mu_2\underset{2}{X_2}\right] = 0.$ при некоторых $\mu_1(x, y, y') \neq 0$, $\mu_2(x, y, y') \neq 0$, то существуют $C_1, C_2 \in \Re$, такие что $\left[\underset{2}{X_1}, \underset{2}{X_2}\right] = C_1\underset{2}{X_1} + C_2\underset{2}{X_2}$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что так как $\left[\mu_1\underset{2}{X_1}, \mu_2\underset{2}{X_2}\right] = 0$ и

$$\left[\mu_1\underset{2}{X_1}, \mu_2\underset{2}{X_2}\right] = \mu_1\mu_2\left[\underset{2}{X_1}, \underset{2}{X_2}\right] + \mu_1 X_1(\mu_2)\underset{2}{X_2} - \mu_2 X_2(\mu_1)\underset{2}{X_1},$$

то

$$\left[\underset{2}{X_1}, \underset{2}{X_2}\right] = \frac{X_2(\mu_1)}{\mu_1}\underset{2}{X_1} - \frac{X_1(\mu_2)}{\mu_2}\underset{2}{X_2}. \tag{9}$$

Во-вторых, коммутатор касательных операторов является касательным. Действительно, если W_1 и W_2 — производящие функции операторов X_1 и X_2, то непосредственными вычислениями можно показать, что производящей функцией для $\left[\underset{2}{X_1}, \underset{2}{X_2}\right]$ будет

$$W = \left(\frac{\partial W_2}{\partial y}\frac{\partial W_1}{\partial y'} - \frac{\partial W_2}{\partial y'}\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)y' + \frac{\partial W_2}{\partial x}\frac{\partial W_1}{\partial y'} - \frac{\partial W_2}{\partial y'}\frac{\partial W_1}{\partial x} + W_2\frac{\partial W_1}{\partial y} - W_1\frac{\partial W_2}{\partial y}.$$

В-третьих, если три касательных оператора X_1, X_2, X_3 связаны соотношением

$$\underset{2}{X_3} = \alpha_1(x, y, y')\underset{2}{X_1} + \alpha_2(x, y, y')\underset{2}{X_2}, \tag{10}$$

причем X_1, X_2 линейно независимы, то $\alpha_1 = \mathrm{const}$, $\alpha_2 = \mathrm{const}$. Доказать этот факт можно, приравняв коэффициенты операторов из левой и правой части равенства (10) и решив эту систему относительно α_1 и α_2. Ввиду громоздкости решения мы его здесь не приводим.

Тогда в соотношении (9) слева стоит касательный оператор, справа линейная комбинация касательных операторов с коэффициентами, которые должны быть равны константам, т. е.

$$\frac{X_2(\mu_1)}{\mu_1}=C_1, \quad -\frac{X_1(\mu_2)}{\mu_2}=C_2, \quad C_1, C_2. \tag{11}$$

Таким образом, теорема доказана.

Домножая операторы X_1 и X_2 на μ_1 и μ_2 мы, как отмечалось выше, оставляем их в классе альтернативных обобщенных операторов. Более того, операторы $\mu_1 X_1$ и $\mu_2 X_2$ имеют те же инварианты, что и соответственно X_1 и X_2. Поэтому, так как далее операторы нас будут интересовать только с точки зрения их инвариантов, не ограничивая общности, будем считать, что вместо соотношения (6) они удовлетворяют равенству

$$\left[\underset{2}{X_1}, \underset{2}{X_2}\right]=0. \tag{12}$$

Заметим, что при выполнении соотношения (12) выполняется более слабое условие $[X_1, X_2]=0$.

Свойство (12) отражается на структуре множества инвариантов этих операторов и на действии операторов на инварианты друг друга, а именно имеет место следующие две теоремы.

Теорема 3. Если линейно независимые альтернативные обобщенные операторы X_1 и X_2 удовлетворяют соотношению (12), то они имеют нетривиальный общий инвариант не выше 1-го порядка $u=u(x,y,y')$ и общий инвариант 2-го порядка $w=w(x,y,y,y'')$ ($w_{y''}\neq 0$), причем любой их общий инвариант не выше 2-го порядка $J=J(x,y,y',y'')$ можно представить в виде

$$J=H(u,w). \tag{13}$$

Доказательство. Общий инвариант не выше 1-го порядка u должен удовлетворять уравнениям $X_1(u)=0$ и $X_2(u)=0$, т. е. системе линейных уравнений с частными производными 1-го порядка:

$$\begin{cases}\xi u_x+\zeta_0 u_y+\zeta_1 u_{y'}=0,\\ \alpha u_x+\beta_0 u_y+\beta_1 u_{y'}=0.\end{cases}$$

Соотношение (12) означает, что это — якобиева система двух линейно независимых уравнений [1]. Она имеет только одно функционально независимое решение $u=u(x,y,y')$. Таким образом, существование u доказано.

Общий инвариант 2-го порядка w должен удовлетворять уравнениям $\underset{2}{X_1}(w)=0$ и $\underset{2}{X_2}(w)=0$, т. е. системе

$$\begin{cases}\xi w_x+\zeta_0 w_y+\zeta_1 w_{y'}+\zeta_2 w_{y''}=0,\\ \alpha w_x+\beta_0 w_y+\beta_1 w_{y'}+\beta_2 w_{y''}=0.\end{cases} \tag{14}$$

Соотношение (12) означает, что это — якобиева система двух линейно независимых уравнений. Она имеет два функционально независимых решения, в качестве одного из них можно взять $u=u(x,y,y')$. Второе решение будет содержать y'' (иначе бы существовало два функционально независимых общих инварианта не выше 1-го порядка). Таким образом, существование w доказано. Все общие инварианты не выше 2-го порядка $J = J(x, y, y', y'')$ операторов X_1 и X_2 удовлетворяют системе (14), а следовательно, выражаются через фундаментальную совокупность решений этой системы. Таким образом, имеет место формула (13) и теорема доказана.

Теорема 4. Если линейно независимые альтернативные обобщенные операторы X_1 и X_2 удовлетворяют соотношению (12), то они являются операторами инвариантного дифференцирования инвариантов не выше второго порядка друг друга. При этом инвариант не выше 1-го порядка переходит в инвариант не выше 1-го порядка, инвариант 2-го порядка переходит в инвариант не выше 2-го порядка.

Доказательство. Пусть $u = u(x, y, y')$ — инвариант не выше 1-го порядка оператора X_1. $X_2(u)$ — зависит только от x, y, y'. Тогда, учитывая, что $\left[X_1, X_2\right] = 0,$ получаем

$$X_1\left(X_2(u)\right) = X_2\left(X_1(u)\right) = X_2\left(0\right) = 0.$$

Следовательно, $X_2(u)$ — инвариант не выше 1-го порядка оператора X_1.

Пусть $w = w(x, y, y', y'')$ — инвариант 2-порядка оператора X_1. $\underset{2}{X_2}(w)$ зависит только от x, y, y', y''. Тогда из соотношения (8), получаем

$$\underset{2}{X_1}\left(\underset{2}{X_2}(u)\right) = \underset{2}{X_2}\left(\underset{2}{X_1}(u)\right) = \underset{2}{X_2}\left(0\right) = 0.$$

Следовательно, $\underset{2}{X_2}(w)$ — инвариант не выше 2-го порядка оператора X_1.

Замечание. По теореме 3 такие операторы и имеют общие инварианты, поэтому действие одного из операторов на общий инвариант дает инвариант, ождественно равный нулю. В остальных случаях результатом будет нетривиальный инвариант.

Пример 2. Рассмотрим операторы Y_1 и Y_2 из примера 1, имеющие общий инвариант $u = (xy' - y)^2 xy^{-1}$. Выражение $t_1 = x^{-2}y$ является инвариантом оператора Y_1 и не является инвариантом оператора Y_2, а $t_2 = xy$ является инвариантом оператора Y_2 и не является инвариантом оператора Y_1. Вычислим действие этих операторов на инварианты, которые не являются общими:

$$Y_2(t_1) = 2x^{-1}y = 2t_1, \quad Y_1(t_2) = 2xy = 2t_2.$$

Для применения двумерной алгебры операторов к факторизации уравнения, допускающего эти операторы, нам потребуется следующая теорема.

Теорема 5. Если уравнение $y'' = F(x, y, y')$ допускает альтернативный обобщенный оператор (1), $w = w(x, y, y', y'')$ является его инвариантом, то $w\big|_{y''=F}$ является инвариантом не выше 1-го порядка этого же оператора.

Доказательство. Очевидно, что $w\big|_{y''=F}$ зависит только от x, y, y'. Вычислим действие оператора X на $w\big|_{y''=F}$.

Так как

$$\underset{2}{X}(w)=0\,,\ \ \underset{2}{X}\left(y''-F\right)\Big|_{y''=F}=0\,,$$

то

$$\xi w_x+\zeta_0 w_y+\zeta_1 w_{y'}+\zeta_2 w_{y''}=0,\quad \zeta_2\big|_{y''=F}-\xi F_x-\zeta_0 F_y-\zeta_1 F_{y'}=0\,.$$

Тогда:

$$X\left(w\big|_{y''=F}\right)=\xi\left(w\big|_{y''=F}\right)_x+\zeta_0\left(w\big|_{y''=F}\right)_y+\zeta_1\left(w\big|_{y''=F}\right)_{y'}=$$

$$=\xi(w_x\big|_{y''=F}+w_{y''}\big|_{y''=F}F_x)+\zeta_0(w_y\big|_{y''=F}+w_{y''}\big|_{y''=F}F_y)+\zeta_1(w_{y'}\big|_{y''=F}+w_{y''}\big|_{y''=F}F_{y'})=$$

$$=\left(\xi w_x+\zeta_0 w_y+\zeta_1 w_{y'}+\zeta_2 w_{y''}\right)\Big|_{y''=F}-(\zeta_2 w_{y''})\big|_{y''=F}+w_{y''}\big|_{y''=F}(\xi F_x+\zeta_0 F_y+\zeta_1 F_{y'})=$$

$$=\underset{2}{X}(w)\Big|_{y''=F}-w_{y''}\big|_{y''=F}\underset{2}{X}(y''-F)\Big|_{y''=F}=0.$$

Следовательно, $w\big|_{y''=F}$ является инвариантом не выше 1-го порядка оператора *X*.

Итак, если уравнение $y''=F(x,y,y')$ допускает операторы X_1 и X_2 вида (5), удовлетворяющие условию (12), то, согласно теореме 3, они имеют общие нетривиальные инварианты $u=u(x,y,y')$, $w=w(x,y,y',y'')$. Согласно теореме 5, выражение $w\big|_{y''=F}$ также является общим инвариантом не выше 1-го порядка этих операторов. Тогда по теореме он будет функционально зависим с u, т. е. будет существовать функция *H*, такая что

$$w\big|_{y''=F}=G(u)\,.$$

Таким образом, исходное уравнение $y''=F(x,y,y')$ можно представить в виде системы:

$$\begin{cases} u=u(x,y,y'), \\ w=w(x,y,y',y''), \\ w=G(u). \end{cases} \tag{15}$$

Если найдется функция $t=t(x,y,y')$, такая что

$$w=\frac{D_x u}{D_x t}=u_t\,, \tag{16}$$

тогда систему (15) можно записать в виде:

$$\begin{cases} u=u(x,y,y'), \\ t=t(x,y,y'), \\ u_t=G(u). \end{cases} \tag{17}$$

Система (16) является фактор-системой уравнения $y'' = F(x, y, y')$, причем последнее уравнение системы (17) является автономным. Таким образом, в этом случае внешнее уравнение фактор-системы решается всегда.

Найдем условия существования функции $t = t(x, y, y')$. Из формулы (16) следует, что выражение $D_x u / D_x t$ должно быть общим инвариантом 2-го порядка операторов X_1 и X_2, т. е.

$$\underset{2}{X_1}\left(\frac{D_x u}{D_x t}\right) = 0, \quad \underset{2}{X_2}\left(\frac{D_x u}{D_x t}\right) = 0. \tag{18}$$

Заметим, что t и u должны быть ***функционально независимы***. Для альтернативных обобщенных операторов (1) имеет место формула [3]:

$$(D_x t)^2 \underset{2}{X}\left(\frac{D_x u}{D_x t}\right) = D_x\left(X(u)\right) D_x t - D_x\left(X(t)\right) D_x u +$$

$$+\frac{\zeta_1 - D_x\zeta_0 + y' D_x\xi}{\zeta_0 - y'\xi}\left(X(u) D_x t - X(t) D_x u\right).$$

Подставим в эту формулу соотношения (18), тогда, так как $X_1(u) = X_2(u) = 0$, получаем систему:

$$\begin{cases} D_x\left(X_1(t)\right) + \dfrac{\zeta_1 - D_x\zeta_0 + y' D_x\xi}{\zeta_0 - y'\xi} X_1(t) = 0, \\ D_x\left(X_2(t)\right) + \dfrac{\beta_1 - D_x\beta_0 + y' D_x\alpha}{\beta_0 - y'\alpha} X_2(t) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Совместность системы (19) зависит от структуры коэффициентов:

$$p_1(x, y, y', y'') = \frac{\zeta_1 - D_x\zeta_0 + y' D_x\xi}{\zeta_0 - y'\xi}, \; p_2(x, y, y', y'') = \frac{\beta_1 - D_x\beta_0 + y' D_x\alpha}{\beta_0 - y'\alpha}. \tag{20}$$

Отметим сначала следующие важные свойства коэффициентов (20), влияющие на дальнейшие рассуждения.

Свойство 1. Если альтернативный обобщенный оператор X с коэффициентами (1) обладает свойством

$$p = \frac{\zeta_1 - D_x\zeta_0 + y' D_x\xi}{\zeta_0 - y'\xi} = 0, \tag{21}$$

то он является оператором касательной симметрии.

Доказательство. Числитель в дроби (21) обращается в ноль, поэтому $\zeta_1 = D_x\zeta_0 - y' D_x\xi$. Более того, координаты продолженного оператора $\underset{k}{X}$ будут вычисляться по формулам (2), которые примут вид:

$$\zeta_i = D_x\zeta_{i-1} - y^{(i)} D_x\xi, \quad i = 2, \ldots, k,$$

а сама координата ζ_1 будет зависеть только от x, y, y' (по определению альтернативного обобщенного оператора). Эти свойства характеризуют касательные операторы.

Свойство 2. Если альтернативный обобщенный оператор X с коэффициентами (1) обладает свойством

$$p = \frac{\zeta_1 - D_x\zeta_0 + y'D_x\xi}{\zeta_0 - y'\xi} = D_x P, \tag{22}$$

при некоторой функции $P = P(x, y, y') \neq \mathrm{const}$, то существует касательный оператор X^* и множитель $\mu = \mu(x, y, y')$, такие, что $X = \mu X^*$.

Доказательство. Положим:

$$\mu(x, y, y') = \mathrm{e}^{-P(x,y,y')},$$

$$X^* = \frac{1}{\mu} X = \mathrm{e}^P \xi \partial_x + \mathrm{e}^P \zeta_0 \partial_y + \mathrm{e}^P \zeta_1 \partial_{y'}.$$

Оператор X^* — альтернативный обобщенный оператор. Проверим выполнение для него свойства (21), учитывая (22):

$$\mathrm{e}^P\zeta_1 - D_x\left(\mathrm{e}^P\zeta_0\right) + y'D_x\left(\mathrm{e}^P\xi\right) = \mathrm{e}^P\left(\zeta_1 - D_x\zeta_0 + y'D_x\xi - (\zeta_0 - y'\xi)D_xP\right) =$$
$$= \mathrm{e}^{-P}\left(\zeta_1 - D_x\zeta_0 + y'D_x\xi - (\zeta_0 - y'\xi)\frac{\zeta_1 - D_x\zeta_0 + y'D_x\xi}{\zeta_0 - y'\xi}\right) = 0$$

Следовательно, согласно свойству 1, оператор X^* является касательным.

Замечание. Очевидно, что утверждения, обратные к сформулированным в свойствах 1 и 2, будут также верны.

Перейдем теперь к анализу системы (19). При решении ее возможны три случая в зависимости от того, сколько из параметров p_1 и p_2 обращаются в ноль.

I. Если $p_1 = p_2 = 0$, тогда, согласно свойству 1, оба оператора являются касательными и система (19) принимает вид

$$\begin{cases} D_x\left(X_1(t)\right) = 0, \\ D_x\left(X_2(t)\right) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X_1(t) = C_1, \\ X_2(t) = C_2, \end{cases} \tag{23}$$

$C_1, C_2 \in \Re,\ C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ (последнее условие необходимо для того, чтобы функция t была функционально независима с общим инвариантом u). Заметим, что система (23) выглядит проще, если перейти к новым переменным

$$(x, y, y') \to (t_1, t_2, u), \tag{24}$$

где $t_1 = t_1(x, y, y')$ — инвариант оператора X_1, не являющийся инвариантом X_2 ($X_1(t_1) = 0$, ($X_2(t_1) \neq 0$), $t_2 = t_2(x, y, y')$ — инвариант оператора X_2, не являющийся инвариантом X_1 ($X_2(t_2) = 0$, $X_1(t_2) \neq 0$), $u = u(x, y, y')$ — их общий инвариант ($X_1(u) = 0$, $X_2(u) = 0$). Совокупность (t_1, t_2, u) функционально независима, иначе t_1 и t_2 тоже были бы общими инвариантами. Тогда система (23) примет вид

$$\begin{cases} X_1(t_2)\dfrac{\partial t}{\partial t_2} = C_1, \\ X_2(t_1)\dfrac{\partial t}{\partial t_1} = C_2. \end{cases}$$

Напомним, что, согласно теореме 4, операторы X_1 и X_2 являются операторами инвариантного дифференцирования, поэтому $X_1(t_2)$ зависит только от t_2 и u, а $X_2(t_1)$ — только от t_1 и u. Тогда общим решением системы будет

$$t = C_1\int \frac{dt_2}{X_1(t_2)} + C_2\int \frac{dt_1}{X_2(t_1)} + c(u), \tag{25}$$

где $c(u)$ — произвольная функция. Результат формулы (25) можно трактовать следующим образом: если X_1 и X_2 — касательные операторы, коммутатор их равен нулю, то возможно получение двух принципиально различных фактор-систем вида (17):

$$\begin{cases} u = u(x, y, y'), \\ t = t(x, y, y') = t(t_1, u) = C_2\displaystyle\int \frac{dt_1}{X_2(t_1)}, \quad (C_2 \neq 0), \\ u_t = G_1(u) \end{cases} \tag{26}$$

и

$$\begin{cases} u = u(x, y, y'), \\ t = t(x, y, y') = t(t_2, u) = C_1\displaystyle\int \frac{dt_2}{X_1(t_2)}, \quad (C_1 \neq 0), \\ u_t = G_2(u). \end{cases} \tag{27}$$

Общее решение внешнего уравнения фактор-системы (26) будет иметь вид

$$\Phi\big(u(x, y, y'), t_1(x, y, y')\big) = C,$$

а следовательно, будет допускать оператор X_1 (так как оно записано в его инвариантах). Это обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка можно попробовать привести к автономному виду, используя оператор X_1, и проинтегрировать. Аналогичные рассуждения будут и в случае системы (27).

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$2\left(a(y')^k - xy' + y\right)y'' + (y')^2 = 0,\ \ a,k \in \Re,\ a \neq 0.$$

Это уравнение не имеет точечных симметрий, но допускает касательные операторы, удовлетворяющие условию (12):

$$X_1 = y'(2\partial_x + y'\partial_y + 0\cdot\partial_{y'}),$$
$$X_2 = (y')^{-2}(\partial_x + 2y'\partial_y + 0\cdot\partial_{y'}).$$

Найдем фактор-систему вида (27):

$$u = y',\ t_1 = xy' - 2y,\ t = -3\int\frac{dt_1}{X_2(t_1)} = \int u\,dt_1 = ut_1.$$

Тогда

$$\begin{cases} u = y', \\ t = (xy' - 2y)y', \\ 2au^k u_t = 1. \end{cases}$$

Решая внешнее уравнение фактор-системы, понижаем порядок исходного уравнения:

$$x(y')^2 - 2yy' + C = \begin{cases} \dfrac{2a}{k+1}(y')^{k+1}, & \text{при } k \neq -1, \\ 2a\ln|y'|, & \text{при } k = -1. \end{cases}$$

II. Если $p_1 = 0,\ p_2 \neq 0$ (аналогично $p_2 = 0,\ p_1 \neq 0$), тогда, согласно свойству 1, оператор X_1 является касательным, а X_2 не является таковым. Система (19) принимает вид

$$\begin{cases} D_x\left(X_1(t)\right) = 0, \\ D_x\left(X_2(t)\right) + \dfrac{\beta_1 - D_x\beta_0 + y'D_x\alpha}{\beta_0 - y'\alpha}X_2(t) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Решим первое уравнение системы (28), используя замену (24):

$$X_1(t) = C_1 \ \Rightarrow\ X_1(t_2)\frac{dt}{dt_2} = C_1$$

$$t = C_1\int\frac{dt_2}{X_1(t_2)} + \varphi(t_1,u), \tag{29}$$

где $C_1 \in \Re$, $\varphi = \varphi(t_1,u)$ — произвольная функция. Первое слагаемое, согласно теореме 4, зависит только от t_2 и u, поэтому подстановка (29) преобразует второе уравнение (28) к виду

$$D_x\left(X_2(\varphi)\right)+\frac{\beta_1-D_x\beta_0+y'D_x\alpha}{\beta_0-y'\alpha}X_2(\varphi)=0\,. \tag{30}$$

Независимо от координат оператора X_2 любая φ, такая, что $\partial\varphi/\partial t_1=0$, будет решением этого уравнения. Найдем условия, при которых φ может зависеть от t_1. Тогда уравнение (30) можно преобразовать следующим образом:

$$D_x\left(\ln|X_2(\varphi)|\right)=-\frac{\beta_1-D_x\beta_0+y'D_x\alpha}{\beta_0-y'\alpha}\equiv-p_2\neq 0\,. \tag{31}$$

Таким образом, все зависит от того, будет ли p_2 полной производной.

Если p_2 не является полной производной (т. е. X_2, согласно свойствам 1 и 2, не является ни касательным, ни касательным с некоторым функциональным множителем), то $\partial\varphi/\partial t_1=0$ и общее решение системы (28) имеет вид

$$t=C_1\int\frac{dt_2}{X_1(t_2)}+\varphi(u)\,,\ C_1\neq 0$$

Если существует $P_2=P_2(x,y,y')\neq\text{const}$ такая, что $p_2=D_x(P_2)$, то, согласно свойству 2,

$$X_2=\mu(x,y,y')X_2^*\,,\quad \mu=\mathrm{e}^{-P_2}\,, \tag{32}$$

где X_2^* — касательный оператор. Решим уравнение (31)

$$X_2(\varphi)=C_2\mathrm{e}^{-P_2}\,,\ C_2\in\Re\ \Rightarrow\ X_2(t_1)\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}=C_2\mathrm{e}^{-P_2}\,,$$

$$\varphi=C_2\int\frac{\mathrm{e}^{-P_2}dt_1}{X_2(t_1)}+c(u)=C_2\int\frac{\mu\,dt_1}{X_2(t_1)}+c(u)=C_2\int\frac{dt_1}{X_2^*(t_1)}+c(u)\,,$$

где $c=c(u)$ — произвольная функция. Так как φ не зависит от t_2, то должно выполняться условие $\partial\mathrm{e}^{-P_2}/\partial t_2=0$ или $X_1(P_2)=X_1(\mu)=0$.

Таким образом,

a) если X_2 имеет вид (32) и $X_1(\mu)=0$, то

$$t=C_1\int\frac{dt_2}{X_1(t_2)}+C_2\int\frac{\mu\,dt_1}{X_2(t_1)}+c(u)=C_1\int\frac{dt_2}{X_1(t_2)}+C_2\int\frac{dt_1}{X_2^*(t_1)}+c(u), \tag{33}$$

b) если X_2 отличен от (32) или $X_1(\mu)\neq 0$, то:

$$t=C_1\int\frac{dt_2}{X_1(t_2)}+c(u),\quad C_1\neq 0\,. \tag{34}$$

Заметим, что случай IIa можно было свести к I и получить формулу (33). Действительно, если X_1 и X_2 удовлетворяют соотношению (12), то X_1 и X_2^* обладают этим же свойством:

$$0=\left[\underset{2}{X_1},\underset{2}{X_2}\right]=\left[\underset{2}{X_1},\mu\underset{2}{X_2^*}\right]=X_1(\mu)\underset{2}{X_2^*}+\left[\underset{2}{X_1},\underset{2}{X_2^*}\right]=\left[\underset{2}{X_1},\underset{2}{X_2^*}\right].$$

Рассмотрим примеры, соответствующие случаю IIb.

Пример 4. Уравнение

$$\left(x+(xy'-x-y)^2\right)y''=1$$

допускает пару операторов

$$X_1=0\cdot\partial_x+x\partial_y+\partial_{y'},\quad X_2=\mathrm{e}^{y'-y/x}\left(\partial_x+(y'-1)\partial_y+0\cdot\partial_{y'}\right),$$

удовлетворяющих условию (12). Их инварианты равны: $u=xy'-x-y$, $t_1=x$, $t_2=y'$. Оператор X_1 является точечным, а оператор $X_2=\mathrm{e}^{y/x}X_2^*$, где X_2^* — касательный (значит, $p_1=0$, $p_2\neq 0$), но

$$X_1(\mu)=X_1(\mathrm{e}^{y/x})=\mathrm{e}^{y/x}\neq 0,$$

поэтому имеем случай b. Вычислим по формуле (34) при $C_1=1$, $c(u)=0$ функцию t

$$t=\int\frac{dt_2}{X_1(t_2)}=\int dt_2=t_2=y'$$

и построим фактор-систему

$$\begin{cases}u=xy'-x-y,\\ t=y',\\ u_t+u^2=0.\end{cases}$$

Решая внешнее уравнение фактор-системы, понижаем порядок исходного уравнения:

$$u(t+C)=1\quad\Rightarrow\quad(xy'-x-y)(y'+C)=1,\ \ C\in\Re.$$

Заметим, что полученное уравнение будет допускать оператор X_2.

Пример 5. Уравнение

$$y''+(y')^2+\frac{y-1}{xy}y'=0$$

допускает единственный точечный оператор

$$X_1=x\partial_x+0\cdot\partial_y-y'\partial_{y'}$$

и альтернативный обобщенный оператор, который не связан множителем ни с каким касательным оператором (не имеет вида (32)),

$$X_2=0\cdot\partial_x+y\partial_y-\left(yy'-x^{-1}\right)\partial_{y'},$$

т. е. $p_1=0$, а $p_2=(y+1)y^{-1}y'-(xy)^{-1}\neq D_x(P_2)$ ни при какой $P_2=P_2(x,y,y')$. Коммутатор этих операторов равен нулю. Их инварианты равны

$$u = x\mathrm{e}^{y}y' - \int y^{-1}\mathrm{e}^{y}dy\,,\ t_1 = y\,,\ t_2 = x\,.$$

Вычислим по формуле (34) при $C_1 = 1$, $c(u) = 0$ функцию t:

$$t = \int \frac{dt_2}{X_1(t_2)} = \int \frac{dt_2}{t_2} = \ln|t_2| = \ln|x|$$

и построим фактор-систему

$$\begin{cases} u = x\mathrm{e}^{y}y' - \int y^{-1}\mathrm{e}^{y}dy, \\ t = \ln|x|, \\ u_t = 0. \end{cases}$$

Решая внешнее уравнение фактор-системы, получаем первый интеграл

$$x\mathrm{e}^{y}y' - \int y^{-1}\mathrm{e}^{y}dy = C_1\,.$$

Так как первый интеграл записан через общий инвариант u операторов X_1 и X_2, то он допускает оба этих оператора, в частности, точечный оператор X_1, который обеспечивает дальнейшее интегрирование:

$$\ln|x| = \int \frac{\mathrm{e}^{y}}{\int y^{-1}\mathrm{e}^{y}dy + C_1} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \Re\,.$$

III. Пусть $p_1 \neq 0$, $p_2 = 0$. Согласно свойству 1, операторы X_1 и X_2 не являются касательными. Покажем, что хотя бы одно из выражений p_1 или p_2 должно оказаться полной производной некоторой функции. Не ограничивая общности, будем считать, что $\partial t / \partial t_1 \neq 0$ (так как либо $\partial t / \partial t_1 \neq 0$, либо $\partial t / \partial t_2 \neq 0$). Тогда второе уравнение системы (19) примет вид

$$D_x\big(\ln|X_2(t)|\big) = -p_2\,.$$

Из этого равенства следует, что p_2 является полной производной. Из этого следует также, что если p_2 не является полной производной, то $\partial t / \partial t_1 = 0$. Значит, возможно два случая: либо оба выражения p_1 и p_2 являются полными производными, либо только одно из них.

а) Пусть $p_1 = D_x(P_1)$ при некоторой $P_1 = P_1(x, y, y')$, а p_2 этим свойством не обладает. Тогда X_1 имеет вид

$$X_1 = \mu(x, y, y')X_1^*, \quad \mu = \mathrm{e}^{-P_1}\,, \tag{35}$$

где X_1^* – касательный оператор. Как мы только что отметили, в этом случае $\partial t / \partial t_1 = 0$. Если искать t в виде $t = t(t_2, u)$ ($\partial t / \partial t_2 \neq 0$), то от системы (19) останется только первое уравнение, которое примет вид

$$D_x\left(\ln|X_1(t)|\right) = -p_1 = -D_x P_1\,.$$

Следовательно,

$$X_1\left(t(t_2, u)\right) = C_1\mathrm{e}^{-P_1} = C_1\mu\,.$$

Но тогда по теореме 4 коэффициент μ должен зависеть только от t_2 и u, т. е.

$$X_2(\mu)=0.$$

Это означает, что этот случай можно свести к IIb. Действительно:

$$0=\left[\underset{2}{X_1},\underset{2}{X_2}\right]=\left[\mu\underset{2}{X_1^*},\underset{2}{X_2}\right]=\left[\underset{2}{X_1^*},\underset{2}{X_2}\right]-X_2(\mu)\underset{2}{X_1^*}=\left[\underset{2}{X_1^*},\underset{2}{X_2}\right].$$

Тогда $p_1^*=0$, $p_2\neq 0$, p_2 не является полной производной. Поэтому имеет место формула (34), в которой вместо X_1 нужно подставить X_1^*.

b) Пусть существуют функции $P_1=P_1(x,y,y')$, $P_2=P_1(x,y,y')$, такие, что $p_1=D_x(P_1)$, $p_2=D_x(P_2)$. Значит, оба оператора X_1 и X_2 можно получить из касательных

$$X_1=\mu_1(x,y,y')X_1^*,\quad \mu_1=\mathrm{e}^{-P_1},$$
$$X_2=\mu_2(x,y,y')X_2^*,\quad \mu_2=\mathrm{e}^{-P_2},$$

где X_1^*, X_2^* – касательные операторы. Тогда по теореме существуют константы $C_1,C_2\in\Re$, такие, что

$$\left[\underset{2}{X_1^*},\underset{2}{X_2^*}\right]=C_1\underset{2}{X_1^*}+C_2\underset{2}{X_2^*}.$$

Известно, что можно выбрать новый базис $Y_1^*=a_1X_1^*+a_2X_2^*$, $Y_2^*=b_1X_1^*+b_2X_2^*$, ($a_1,a_2,b_1,b_2\in\Re$) так, чтобы было выполнено одно из трех условий:

$$\left[\underset{2}{Y_1^*},\underset{2}{Y_2^*}\right]=0,\quad \left[\underset{2}{Y_1^*},\underset{2}{Y_2^*}\right]=\underset{2}{Y_1^*},\quad \left[\underset{2}{Y_1^*},\underset{2}{Y_2^*}\right]=\underset{2}{Y_2^*}.$$

Тогда для операторов Y_1 и Y_2 по теореме 2 можно подобрать ненулевые коэффициенты $\mu_1=\mu_1(x,y,y')$, $\mu_2=\mu_2(x,y,y')$ такие, что будет выполнено соответственно:

$$\left[\underset{2}{Y_1^*},\underset{2}{Y_2^*}\right]=0,\quad \left[\mu_1\underset{2}{Y_1^*},\underset{2}{Y_2^*}\right]=0,\quad \left[\underset{2}{Y_1^*},\mu_2\underset{2}{Y_2^*}\right]=0.$$

Значит, случай IIIb сводится:

– к случаю I (при выполнении первого соотношения);

– к случаю II (при выполнении второго и третьего соотношений).

Все варианты, образующиеся при рассмотрении пары операторов X_1 и X_2, удовлетворяющей условию (12), можно свести в следующую таблицу.

№	X_1	X_2	Формула для t или способ сведения к известным случаям
I	X_1^*	X_2^*	$t = C_1\int\frac{dt_2}{X_1(t_2)} + C_2\int\frac{dt_1}{X_2(t_1)} + c(u)$, $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$
IIa	X_1^*	$\mu_2 X_2^*$ $X_1^*(\mu_2) = 0$	$\left[\underset{2}{X_1^*}, \underset{2}{X_2^*}\right] = 0 \Rightarrow$ случай I для X_1^* и X_2^*
IIb	X_1^*	$\mu_2 X_2^*$ $X_1^*(\mu_2) \neq 0$	$t = C_1\int\frac{dt_2}{X_1(t_2)} + c(u), \quad C_1 \neq 0$
	X_1^*	X_2	
III	$\mu_1 X_1^*$	$\mu_2 X_2^*$	$Y_1^* = a_1X_1^* + a_2X_2^*$, $Y_2^* = b_1X_1^* + b_2X_2^*$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \Re$ 1) $\left[\underset{2}{Y_1^*}, \underset{2}{Y_2^*}\right] = 0 \Rightarrow$ случай I для Y_1^* и Y_2^* 2) $\left[\mu_1 \underset{2}{Y_1^*}, \underset{2}{Y_2^*}\right] = 0 \Rightarrow$ случай IIa (IIb) для Y_2^* и $\mu_1 Y_1^*$ 3) $\left[\underset{2}{Y_1^*}, \mu_2 \underset{2}{Y_2^*}\right] = 0 \Rightarrow$ случай IIa (IIb) для Y_1^* и $\mu_2 Y_2^*$

Замечание. Знак звездочка (*) означает, что оператор является касательным, если ее нет, то оператор – собственно альтернативный обобщенный оператор (не является касательным с некоторым функциональным множителем). Коэффициенты $\mu_1 = \mu_1(x, y, y')$, $\mu_2 = \mu_2(x, y, y')$, $\mu_1, \mu_2 \neq \mathrm{const}$.

Из приведенной таблицы видно, что внешнее уравнение фактор-системы можно сделать автономным, если хотя бы один из операторов X_1 и X_2 является либо касательным, либо касательным с некоторым функциональным множителем, причем если один из операторов представляет собой собственно альтернативный обобщенный оператор, то второй может быть только касательным.

Таким образом, введение понятия альтернативного обобщенного оператора позволяет с единых позиций описать процедуру понижения порядка и интегрирования уравнений второго порядка при наличии двумерной подалгебры операторов. Полученные результаты полностью согласуются с классическими результатами, изложенными в [2], и обобщают метод редукции уравнения в случае, когда допускаются альтернативные обобщенные операторы. Аналогичный подход применим для уравнений любого порядка и при наличии допускаемых подалгебр более высоких размерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.; М.: ОНТИ, ГТТИ, 1934. 360 с.

2. *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа. М.: Знание. Сер. Математика и кибернетика. 1991. № 7. 48 с.

3. *Линчук Л. В.* Альтернативные обобщенные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции «Герценовские чтения-2010» (12–17 апреля 2010 г.). СПб.: Изд-во БАН, 2010.С. 46–53.

REFERENCES

1. *Gjunter N. M.* Integrirovanie uravnenij pervogo porjadka v chastnyh proizvodnyh. L.; M.: ONTI, GTTI, 1934. 360 s.

2. *Ibragimov N. H.* Opyt gruppovogo analiza. M.: Znanie. Ser. Matematika i kibernetika. 1991. № 7. 48 s.

3. *Linchuk L. V.* Al'ternativnye obobwennye simmetrii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij 2-go porjadka // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija. Materialy nauchnoj konferencii «Gercenovskie chtenija-2010» (12–17 aprelja 2010 g.). SPb.: Izd-vo BAN, 2010. S. 46–53.