rialy 57 Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii himikov s mezhdunarodnym uchastiem, 7–10 aprelja 2010 g. Sankt-Peterburg. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gercena, 2010. S. 263–265.

8. *Shmatov Ju. N.* Gipermedijnaja tehnologija lekcionnogo kursa organicheskoj himii i razvitie samostojatel'nosti // Izv. Volgogr. gos. ped. un-ta. Ser. «Pedagogicheskie nauki». 2010. № 7(51). S. 70–73.

И. А. Иванов

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

В статье рассматривается содержание обучения по теме «Приближенные вычисления» и методика реализации этого содержания в модели обучения алгебре и началам анализа в профилях естественнонаучного направления.

Ключевые слова: логика прикладной математики, рациональная логика, теория погрешностей, математическое моделирование.

I. Ivanov

THE LEMENTS STUDYING OF THE THEORY OF ERRORS DURING THE COURSE OF ALGEBRA AND PRINCIPLES OF ANALYSIS IN NATURAL SCIENCE FORMS

The article dwells on the essence of "Approximate calculation" teaching. And the realization methods of this essence are described in the model of teaching algebra and principles of analyses in natural science forms

Key words: logic of applied mathematics; the rational logic; the theory of errors; mathematical modelling

В настоящее время в условиях дифференциации и профилизации среднего математического образования в соответствии со стандартом среднего (полного) общего образования по математике на профильном уровне изучение математики направлено на достижение следующих целей: формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов; овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения школьных естественнонаучных дисциплин, формирования алгоритмической культуры, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности; понимание значимости математики для научно-технического прогресса.

Для достижения указанных выше целей образования в профилях естественнонаучного направления автором предлагается изучение содержания образования в *логике прикладной математики*, т. е. в логике, которая характеризуется *определенным* снижением уровня «строгости» рассуждений и преимущественно используется при построении математических моделей различных явлений и процессов [4; 5].

Одной из важнейших тем курса алгебры и начал анализа для будущих специалистов в естественнонаучных областях, построенной в логике прикладной математики и отвечающей обозначенным выше целям образования, является тема *приближенные вычисления*, которая является разделом *теории погрешностей*. Основные понятия теории погрешностей пронизывают всю вычислительную и прикладную математику. Мы полагаем, что содержание темы *приближенные вычисления* не должно ограничиваться только изучением арифметических операций над приближенными числами, а должно быть существенно расширено за счет изучения *прямой* и *обратной задачи теории погрешностей*. Такое расширение содержания обучения по теме обусловлено, во-первых, необходимостью демонстрации ученикам как будущим специалистам в естественнонаучных областях методов прикладной математики, которые существенно отличаются от методов теоретической математики и, во-вторых, имея выраженную практическую направленность и непосредственное отношение к выработке навыков рациональных рассуждений, потребностями иных школьных предметов в этом содержании, в частности, химии, физики и географии.

Рассмотрим элементы методики и методические особенности изучения расширенной темы *приближенные вычисления*. В курсе основной школы учащиеся получили представление об арифметических действиях с приближенными числами. Там же были введены определения абсолютной и относительной погрешности. Кроме того, в курсе физики во втором полугодии 9–11-х классов предусматривается лабораторный практикум, в котором учащиеся снимают экспериментальные данные с приборов, имеющих заданную погрешность измерения величин, обрабатывают полученные результаты с применением простейших правил работы с приближенными числами. В 10–11-х классах профильной школы программой по физике предусматривается дальнейшее углубление представлений об окружающем мире с применением математического аппарата как основного инструмента описания и познания физических процессов на основе математического моделирования, поэтому в профильной старшей школе следует расширить представления учащихся об основных понятиях теории погрешностей, в частности, ввести понятия о *предельной абсолютной* и *предельной относительной погрешностях* приближенного числа, значащих цифрах в десятичной записи приближенного числа и о верных десятичных знаках (в узком и широком смысле); познакомить с прямой и обратной задачей теории погрешностей, имеющей важное практическое значение. Изучение арифметических операций с приближенными числами позволяет получить ряд методических возможностей для пропедевтики изучения достаточно важных понятий математического анализа и получения обобщений. Во-первых, интерпретируя приближенные числа как *аргументы*, например, x_1, x_2, а результат арифметической операции как *функцию* f, мы получаем фактически *функцию двух переменных*, т. е. $f(x_1, x_2)$, соответственно, в случае n операндов мы получаем функцию n переменных $f(x_1, x_2, \dots x_n)$. Такое обобщение «ведет» к формулировке прямой задачи теории погрешностей (*ПЗТП*). Во-вторых, на рациональном уровне можно получить обобщение правила построения формул для вычисления предельной абсолютной погрешности на случай функциональных зависимостей. Необходимость изучения этого содержания определяется, прежде всего, целями образования на профильном уровне (формирование представлений об идеях и методах математики и овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения школьных естественнонаучных дисциплин). Кроме этого, такое содержание позволяет получить дополнительный материал для построения упражнений для отработки навыков дифференцирования в курсе алгебры и начал анализа, причем результаты этих упражнений применяются в дальнейшем в практике приближенных вычислений в физике, химии, географии, биологии [2; 5; 6].

Прежде всего отметим два определения, не используемых в настоящее время в школьном курсе алгебры и начал анализа, но необходимость изучения которых вполне очевидна. Это определения *предельной абсолютной погрешности* и *предельной относительной погрешности*. Эти понятия и их определения вполне типичны для прикладной математики и полностью не соответствуют «формату» определений, принятому в теоретической математике. Например, в прикладной математике часто не различают понятия «величины» и «значения величины», отождествляя эти понятия; совершенно естественным считается понятие «приближенное число», что с точки зрения теоретической математики лишено всякого смысла, так как понятие «число» — как одно из основных понятий теоретической математики — элемент какого-либо «числового множества», по существу, не имеет определения и по смыслу не совпадает с представлениями о числе, принятыми в прикладной математике. В контексте приведенных выше рассуждений рассмотрим определение *предельной абсолютной погрешности приближенного числа*. В учебном пособии А. А. Амосова [1, с. 26] и В. М. Вержбицкого [3, с. 8] *предельной абсолютной погрешностью приближенного числа* (*оценками*, *границами*) Δ_{a^*} называется величина, не меньшая абсолютной погрешности, но возможно меньшая в каждом конкретном случае, т. е. если a и a^* — соответственно точное и приближенное значения некоторой величины, то $\Delta_{a^*} \geq \left|a - a^*\right|$. Такое «размытое» и некорректное с точки зрения теоретической математики определение — типичное в теории погрешностей. Аналогичное определение *предельной относительной погрешностью приближенного числа* $\delta_{a^*} \geq \dfrac{\left|a-a^*\right|}{a}$. При этом возможно и такое определение $\delta_{a^*} \geq \dfrac{\left|a-a^*\right|}{a^*}$. Необходимость применения именно этих понятий обусловлена тем, что *в реальной практике* точное значение a некоторой величины *неизвестно*. Очевидно, что с такого рода определениями школьников в курсе математики не знакомят, но им постоянно приходится сталкиваться с приближенными вычислениями в курсе физики, химии и биологии, при этом вопросам оценки погрешности получаемых приближенных результатов практически не уделяется внимания, что ведет к дезориентации учащихся относительно необходимости оценки погрешности приближенного результата. Процедура назначения предельной абсолютной погрешности приближенного числа является весьма специфичной. В прикладной математике имеется три возможных варианта: 1) если приближенное число — результат измерения, то предельная абсолютная погрешность приближенного числа принимается равной половине цены деления измерительного прибора; 2) если о числе вообще ничего не известно, то предельная абсолютная погрешность приближенного числа принимается равной половине удерживаемого десятичного разряда в десятичной записи приближенного числа; 3) «исходя из соображений здравого смысла и соответствия физической реальности». Эти «рекомендации» более чем сомнительны с точки зрения теоретической математики, но вполне естественны в прикладной математике. Это одно из проявлений рациональной логики. Несомненным дидактическим потенциалом обладают и *процедуры получения формул* для вычисления предельных абсолютных погрешностей суммы (разности) и произведения (частного) приближенных чисел, а также *интерпретация* получаемых формул. Например, при выводе формулы для вычисления предельной абсолютной погрешности суммы (разности) приближенных чисел приходится использовать известные ученикам из 7–8-х классов свойства числовых неравенств, причем вывод формулы предельной абсолютной погрешности *разности* приближенных чисел приводит, как показывают наши исследования, учеников старших классов к *предварительной* убежденности, что предельная абсолютная погрешность разности приближенных чисел равна разности предельных абсолютных погрешностей приближенных чисел, что оказывается неверным. Кроме этого, в рамках этого же содержания ученики приходят к важному рациональному выводу о зависимости предельной абсолютной погрешности суммы от порядка следования слагаемых, если их больше 2, т. е. в прикладной математике «от перестановки мест слагаемых сумма изменяется» (точнее, ее предельная абсолютная погрешность, например, $\Delta_{a_1^*+a_2^*+...+a_n^*} \neq \Delta_{a_n^*+a_2^*+...+a_1^*}$). Другим, не менее важным результатом, является вывод о том, что при вычитании близких по значению приближенных чисел $a_1^* \approx a_2^*$ может быть «катастрофическая потеря точности», т. е. операция вычитания может быть *не всегда выполнима*, так как величина, характеризующая точность результата арифметической операции вычитания $\delta_{a_1^*-a_2^*} = \dfrac{\Delta_{a_1^*-a_2^*}}{a_1^*-a_2^*}$, может достигать больших значений. В процессе вывода формул для вычисления *предельных относительных погрешностей* произведения и частного приближенных чисел учащиеся убеждаются, что эти операции с точки зрения определения предельных относительных погрешностей совпадают, т. е. $\delta_{a_1^*\cdot a_2^*} = \delta_{a_1^*} + \delta_{a_2^*}$ и $\delta_{\frac{a_1^*}{a_2^*}} = \delta_{a_1^*} + \delta_{a_2^*}$, так же как совпадают операции суммы и разности приближенных чисел с точки зрения определения предельных абсолютных погрешностей суммы и разности приближенных чисел, т. е. $\Delta_{a_1^*+a_2^*} = \Delta_{a_1^*} + \Delta_{a_2^*}$ и $\Delta_{a_1^*-a_2^*} = \Delta_{a_1^*} + \Delta_{a_2^*}$. Эти примеры свидетельствуют о существовании внутренней, достаточно глубокой, логики прикладной математики.

Рассмотрим *прямую задачу теории погрешностей.* Пусть даны предельные абсолютные погрешности $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots \Delta_{x_n}$ приближенных величин $x_1, x_2, \ldots x_n$ и функция $y=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, тогда предельная абсолютная погрешность значения функции y может быть определена по формуле:

$$\Delta_y \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\Delta_{x_1} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\Delta_{x_2} + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\Delta_{x_n} = \sum_{i=1}^{i=n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}.$$

Эта формула получена в логике прикладной математики *при достаточно большом числе допущений*: 1) предполагается, что при малых Δ_{x_i}, $i = \overline{1,n}$ получается малое приращение Δy, вычисляемое по формуле $\Delta y \approx dy;$ 2) в соответствии с определением абсолютной погрешности приближенного числа приращение функции заменяется ее модулем; 3) в соответствии с определением предельной абсолютной погрешности приближенного числа абсолютная погрешность приближенного числа заменяется предельной абсолютной погрешностью приближенного числа, т. е. $|\Delta y| \approx \Delta_y$. Все логические переходы при получении формулы имеют рациональную природу.

В соответствии с определением предельная относительная погрешность функции вычисляется по известным предельным абсолютным погрешностям аргументов

$\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots \Delta_{x_n}$ по формуле:

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{y} \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \frac{\Delta_{x_1}}{|f|} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \frac{\Delta_{x_2}}{|f|} + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \frac{\Delta_{x_n}}{|f|} = \sum_{i=1}^{i=n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \frac{\Delta_{x_i}}{|f|}.$$

В этом состоит сущность *прямой задачи теории погрешностей* — по известным значениям предельных абсолютных погрешностей аргументов Δ_{x_i}, $i = \overline{1, n}$ определить предельную абсолютную Д$_y$ (относительную ∂_y) погрешность значения функции.

В школьном курсе алгебры и начал анализа, как показывают наши исследования [4; 5], эти темы можно эффективно изучать, если будет привлечена логика прикладной математики. Действительно, учащиеся изучают аналог частного случая *ПЗТП*: они находят приближенные значения функции одной переменной, используя линейный член разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Заметим, что при решении задач в этой теме имеются дополнительные возможности, с одной стороны, демонстрации применения производной для построения математических моделей реальных объектов, а с другой стороны, дальнейшей отработки навыков дифференцирования и получения содержательных учебных результатов, необходимых в других школьных предметах (физике, химии, географии). Например, рассмотрим случай функции *одной* переменной, тогда $\Delta_y \approx |f'(x_0)|\Delta_x$. При решении задач определяющим является использование логики прикладной математики, в соответствии с которой для задач данного типа прежде всего строится аналитическая зависимость $f(x)$, вычисляется производная $f'(x_0)$ и применяется формула $\Delta_y \approx |f'(x_0)|\Delta_x$ с последующей интерпретацией. Рассмотрим пример решения ***задачи***: ребро куба измерено миллиметровой линейкой и приближенно равно 20 мм, требуется оценить абсолютную погрешность, получаемую при вычислении его объема. *Решение* состоит из этапов: 1) построение аналитической зависимости $V(x)$, где V и x — объем и ребро куба соответственно: $V(x) = x^3$; 2) нахождение производной $V'(x) = 3x^2$ и далее формирование формулы для $\Delta_V(x) \approx 3x^2\Delta_x$. При $x = 20$ мм и $\Delta_x = 1/2$ мм (так как погрешность определения величины с помощью измерительных инструментов, как знают учащиеся из курса физики, принимается равной половине цены деления измерительного инструмента) получаем, что $\Delta_V(20) \approx 3\cdot 20^2\cdot 1/2 = 600$ мм^3. Более выразительной для практических оценок является предельная относительная погрешность результата $\delta_V\% = \frac{\Delta_V}{V}100\%$, поэтому, используя эту формулу, получим: $\delta_V = 7{,}5\%$ — результат вполне удовлетворительный для широкого круга практических задач.

Случай функции *многих* переменных для школьного курса алгебры и начал анализа в рамках рассматриваемой темы является вполне естественным, так как ученики уже подготовлены к восприятию изучаемого материала изученным содержанием курсов физики и геометрии.

Задача. Определите погрешность вычисления длины окружности, если ее радиус, измеренный сантиметровой линейкой, равен 10 см. *Решение* этой задачи, на первый взгляд, не отличается от решения предыдущей задачи. Действительно, пусть C — длина окружности, а R — ее радиус, тогда $C(R) = 2\cdot\pi\cdot R$ и погрешность вычисления длины окружности можно определить по общей формуле $\Delta_C(R) = C'(R)\cdot\Delta_R = 2\cdot\pi\cdot\Delta_R$ (дифференцирование по R

выглядит вполне убедительным, так как измеренное значение радиуса окружности — приближенное число, т. е. «аргумент», по которому можно дифференцировать). Однако оказывается, что $\Delta_C(R)$ от R *не зависит*, а зависит от цены деления измерительного инструмента Δ_R. Но и это еще не все — учащиеся *вынужденно* приходят к мысли, что Δ_C зависит так же и от π, т. е. π в формуле для $\Delta_C(R)$ — *не число* (в понимании этого объекта в теоретической математике), *а переменная величина*. В соответствии с известным *рациональным принципом* «погрешности только накапливаются» (этот факт уже «обоснован» при изучении предельной абсолютной погрешности суммы и *разности* приближенных чисел), учтем тот факт, что «число» π — *аргумент* функции $C(\pi, R)$, теперь уже функции двух переменных, и получим формулу для вычисления $\Delta_C(\pi, R)$, *добавив слагаемое следующего вида* $|C_\pi'(\pi,R)|\Delta_\pi$, т. е. приходим к окончательной формуле для определения предельной абсолютной погрешности определения длины окружности:

$$\Delta_C(\pi, R) = |C_R'(\pi, R)|\Delta_R + |C_\pi'(\pi, R)|\Delta_\pi.$$

Таким образом, можно прийти к общей формулировке правила составления формулы для вычисления предельной абсолютной погрешности значения функции n переменных при заданных погрешностях аргументов, а также к понятию *частной производной* на основе идеи независимости каждого из слагаемых друг от друга при определении общей погрешности и ввести ее обозначение.

Подчеркнем, что при таком подходе благодаря логике прикладной математики, мы получаем весьма важный *содержательный результат*, не обращаясь к теории функций нескольких переменных и не используя ни формулы дифференциала функции многих переменных, ни понятия частной производной. Полученный результат решает ряд проблем, которые не могут быть решены в курсах физики и химии. Это видно на примере следующей ***задачи***: вычислите погрешность определения периода колебаний T^* математического маятника длины l. Эту задачу учащиеся «пытаются» решить в школьном курсе физики, и на ее основе построена работа лабораторного практикума в 9-м классе. *Решение* этой задачи полностью аналогично решению задачи, рассмотренной выше. Период T колебаний математического маятника определяется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, где T — период колебаний маятника [с], l — длина маятника [м], g — ускорение свободного падения [м/с^2]. Анализ формулы для периода T приводит к выводу, что все перечисленные выше величины, т. е. l, g, p, — *переменные*, а период колебания математического маятника — функция трех переменных: $T = T(l, g, p)$, поэтому формула для предельной абсолютной погрешности периода колебаний будет состоять из *трех* слагаемых, т. е.

$$\Delta_T = \Delta_{T_l} + \Delta_{T_g} + \Delta_{T_\pi} \approx \left|\frac{\partial T}{\partial l}\right|\Delta_l + \left|\frac{\partial T}{\partial g}\right|\Delta_g + \left|\frac{\partial T}{\partial \pi}\right|\Delta_\pi = T_l'\Delta_l + T_g'\Delta_g + T_\pi'\Delta_\pi .$$

Далее определяем производные $T_l'(\pi, l, g)$, $T_\pi'(\pi, l, g)$, $T_g'(\pi, l, g)$:

$$T_\pi' = 2\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{T}{\pi}, \quad T_g' = -\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}} = -\frac{T}{2g}, \quad T_l' = \frac{\pi}{\sqrt{gl}} = \frac{T}{2l}$$ и находим ΔT:

$$\Delta_T = \left|\frac{T}{\pi}\right|\Delta_\pi + \left|-\frac{T}{2g}\right|\Delta_g + \left|\frac{T}{2l}\right|\Delta_l = T\left(\frac{\Delta_\pi}{\pi} + \frac{\Delta_g}{2g} + \frac{\Delta_l}{2l}\right).$$

Окончательно ответ получим в виде $T \approx T^* \pm \Delta_T$.

Из формулы для Δ_T также следует формула для предельной относительной погрешности периода колебаний математического маятника в виде: $\delta_T = \frac{\Delta_T}{T} = \frac{\Delta_\pi}{\pi} + \frac{\Delta_g}{2g} + \frac{\Delta_l}{2l} = \delta_\pi + \frac{1}{2}\delta_g + \frac{1}{2}\delta_l$, которая может также стать источником для выдвижения гипотез и последующей их проверки.

Еще более специфичной, отражающей особенности логики прикладной математики, является *обратная задача теории погрешностей* (*ОЗТП*), сущность которой заключается в определении предельной абсолютной погрешности аргументов $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots \Delta_{x_n}$ по известной предельной абсолютной погрешности функции $\Delta_f\,(x_1, x_2, ..x_n)$. В отличие от *ПЗТП*, как известно, в случае функции многих переменных эта задача *не имеет единственного решения*, т. е. считается поставленной некорректно и в рамках теоретической математики вообще не решается. Вместе с тем в прикладной математике эта задача *решается.* В обучении математике такая задача *имеет важное мировоззренческое значение*, так как при ее решении демонстрируются *принципиально иные* подходы к решению практических задач, и именно на таких задачах у учеников формируются навыки прикладного математического исследования, связанные с формированием ключевых компетенций (несмотря на очевидную «нелепость» не только самой постановки задачи, но и методов ее решения с точки зрения теоретической математики).

На первом этапе работы с этими задачами наиболее близкими для восприятия оказываются задачи, сформулированные в следующем виде: какой линейкой (сантиметровой, миллиметровой, метровой и т. д.) надо пользоваться, чтобы достичь необходимой точности измерения линейного размера для определения какой-либо величины.

В случае *функции одной переменной*, как следует из *ПЗТП*, предельная абсолютная погрешность определения значения функции имеет вид $\Delta_f \approx \left|f'(x_0)\right|\Delta_x$, тогда решение этой задачи очевидно: $\Delta_x \approx \frac{\Delta_f}{\left|f'(x_0)\right|}$. Рассмотрим ***задачу*** на применение полученной формулы: какой линейкой надо воспользоваться для измерения ребра куба $a \approx 3$ см, чтобы получить значение величины объема с точностью до *а*) 20%, *б*) 5%? Для *решения* воспользуемся формулой для вычисления объема куба $V(a) = a^3$. Из условия задачи ясно, что измерение ребра куба имеет некоторую предельную абсолютную погрешность Δ_a. Выразим Δ_a через предельную относительную погрешность δ_V и величину ребра куба a, $a>0$. В данном случае $\Delta_V(a) \approx \left|V'(a)\right|\Delta_a$, $V'(a) = 3a^2$, $\Delta_a \approx \frac{\Delta_V}{\left|V'(a)\right|} = \frac{\delta_V V}{3a^2} = \frac{\delta_V a}{3}$.

При $a \approx 3$ см, получаем при $\delta_V = 0{,}2$, что $\Delta_a = 0{,}2$ см. Это означает, что необходима линейка с делениями через 0,2 см. Таких линеек, как правило, нет, поэтому будем использовать линейку с делениями через 0,1 см, а это — обычная линейка с миллиметровыми делениями. При этом мы получим точность результата заведомо выше точности, требуемой в задаче. При $\delta_V = 0{,}05$ цена деления линейки составит $\Delta_a = 0{,}05$ см, т. е. $\Delta_a = 0{,}5$ мм. Это уже специальный измерительный прибор — микрометр. Полезный вывод для учеников из решения этой задачи может быть следующим: при решении практических задач следует внимательно задавать параметры по точности, характеризующие искомые величины, так как это может привести к применению качественно иных средств измерений (микрометр или штангенциркуль — устройства несравненно более сложные (и дорогие), чем линейка).

В случае *функции многих переменных* предельная абсолютная погрешность значения функции Δ_y, как следует из *ПЗТП*, представима в виде: $\Delta_y \approx \sum_{i=1}^{i=n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \left| f'_{x_i} \right| \Delta_{x_i}$.

Эта ***задача*** решается с привлечением характерных для естественнонаучной деятельности рациональных рассуждений. Учащимся для решения задачи предлагается самим попробовать выдвинуть различные «принципы», так как задачу все равно надо «решить» — типичная «производственная ситуация». На примере этой задачи учащиеся видят, как приходится поступать на практике при решении некорректно поставленных с точки зрения теоретической математики задач. В качестве часто используемого в практике принципа рассмотрим «принцип равных влияний», предполагающий, что каждое из слагаемых $\left| f'_{x_i} \right| \Delta_{x_i}$ в формуле предельной абсолютной погрешности значения функции имеет «одинаковый вес», т. е. они равны:

$$\Delta_f \approx \sum_{i=1}^{i=n} \left| f'_{x_i} \right| \Delta_{x_i} = f'_{x_1}\Delta_{x_1} + f'_{x_2}\Delta_{x_2} + \ldots + f'_{x_n}\Delta_{x_n} \text{ и } \left| f'_{x_1} \right| \Delta_{x_1} = \ldots = \left| f'_{x_n} \right| \Delta_{x_n} .$$

При получении расчетных формул возможны два пути:

– «*формальный*» — результат получается непосредственно из формулы при принятых допущениях (в практике не получил широкого распространения):
$\Delta_f \approx \sum_{i=1}^{i=n} \left| f'_{x_i} \right| \Delta_{x_i} = n \left| f'_{x_i} \right| \Delta_{x_i}, \quad \Delta_{x_i} = \frac{\Delta_f}{n \left| f'_{x_i} \right|}$, где $i = 1, n$;

– «*практический*» — результат определяется *в процессе решения задачи* при записи формулы предельной абсолютной погрешности функции в каждом конкретном случае путем «равного» перераспределения предельной абсолютной погрешности значения функции между слагаемыми.

Другой часто используемый «принцип» решения *ОЗТП* — «принцип равенства предельных относительных погрешностей», т. е. полагают, что все предельные относительные погрешности приближенных величин равны между собой, т. е. $\delta_{x_i} = \delta$, тогда имеем следующую цепочку равенств:

$$\Delta_f \approx \sum_{i=1}^{i=n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \left| f'_{x_i} \right| \frac{\Delta_{x_i}}{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left| f'_{x_i} \right| \delta_{x_i} x_i = \delta \sum_{i=1}^{i=n} \left| f'_{x_i} \right| x_i \text{, т. е.}$$

$$\Delta_f \approx \delta \sum_{i=1}^{i=n} \left| f'_{x_i} \right| x_i \text{, тогда } \delta \approx \frac{\Delta_f}{\sum_{i=1}^{i=n} \left| f'_{x_i} \right| x_i}, \quad \delta_{x_i} \approx \frac{\Delta_f}{\sum_{i=1}^{i=n} \left| f'_{x_i} \right| x_i} \quad \text{и}$$

$$\Delta_{x_i} = x_i \delta_{x_i} = \frac{x_i \cdot \Delta_f}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \left| f'_{x_i} \right| x_i}.$$

Из приведенных формул следует методика работы с этими задачами, которую рассмотрим на следующем примере.

Задача. С какой точностью следует измерить длину $l \approx 1$ м маятника, период колебаний которого близок к 2 с, чтобы получить значение периода колебаний с относительной погрешностью в 0,5%? Как точно должны быть взяты числа π и g?

Решение. Рассмотрим функцию $T(\pi, l, g) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ и с учетом найденных производных $T'_\pi = 2\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{T}{\pi}$, $T'_g = -\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}} = -\frac{T}{2g}$, $T'_l = \frac{\pi}{\sqrt{gl}} = \frac{T}{2l}$ составим выражение для предельной абсолютной погрешности функции $T(\pi, l, g)$:

$$\Delta_T = \left|\frac{T}{\pi}\right| \Delta_\pi + \left| -\frac{T}{2g} \right| \Delta_g + \left| \frac{T}{2l} \right| \Delta_l.$$

Воспользуемся принципом равных влияний, полагая, что каждое из слагаемых не превосходит третьей части общей погрешности:

$\frac{T\Delta_\pi}{\pi} \le \frac{1}{3}\Delta_T$, $\frac{T\Delta_g}{2g} \le \frac{1}{3}\Delta_T$, $\frac{T\Delta_l}{2l} \le \frac{1}{3}\Delta_T$. Из этих условий получим: $\Delta_\pi \le \frac{1}{3}\pi\frac{\Delta_T}{T} = \frac{1}{3}\pi\delta_T$, $\Delta_g \le \frac{2}{3}g\frac{\Delta_T}{T} = \frac{2}{3}g\delta_T$, $\Delta_l \le \frac{2}{3}l\frac{\Delta_T}{T} = \frac{2}{3}l\delta_T$ и далее предельные абсолютные погрешности $\Delta_\pi \le 0{,}0004$, $\Delta_g \le 0{,}0003$, $\Delta_l \le 0{,}003$, т. е. *ответ* выглядит следующим образом: длину маятника следует измерить с точностью до 0,3 см, числа π и g взять с тремя знаками после запятой, т. е. $\pi \approx 3{,}142$, $g \approx 9{,}807$. Обычно рассматривается еще решение задачи с применением принципа равенства предельных относительных погрешностей и полученные результаты сравниваются. Очевидно, что нет какого-либо (даже рационального) критерия, в соответствии с которым будет отдано предпочтение решению, полученному с применением того или иного принципа, но, если результаты, полученные с применением различных принципов, «не сильно» отличаются друг от друга, то это и есть критерий, убеждающий в «правильности» полученного решения. В противном случае отдать предпочтение какому-либо решению невозможно и окончательное принятие решения остается за человеком.

В заключение отметим, что приведенное содержание и методика работы с ним доступны ученикам и учителям профильных классов естественнонаучного направления, что было установлено в результате проведенного исследования в школах г. Санкт-Петербурга и г. Сочи. Важным результатом проведенного исследования также является сформированный иной уровень восприятия вопросов, связанных с проведением приближенных вычислений не только в курсе алгебры и начал анализа, но и химии, физики, а также осознанное применение формул теории погрешностей и грамотная интерпретация получаемых решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.
2. *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 168 с.
3. *Вержбицкий В. М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2000. 266 с.
4. *Иванов И. А.* Историко-математический аспект применения рациональной логики в теоретической и прикладной математике // Образование и наука. Известия Уральского отделения Российской академии образования. Журнал теоретических и прикладных исследований. 2009. № 2(59). С. 22–27.
5. *Иванов И. А.* Теоретические основы построения модели обучения алгебре и началам анализа для классов естественнонаучного направления: Монография. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2010. 176 с.
6. *Мякишев Г. Я., Буховцев Б. Б., Сотский Н. Н.* Физика. 10 класс: Учебник. Базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2010. 366 с.
7. *Самнер Г.* Математика для географов. М.: Прогресс, 1981. 291 с.

REFERENCES

1. *Amosov A. A., Dubinskij JU. A., Kopchenova N. V.* Vychislitel'nye metody dlja inzhenerov: Ucheb. posobie. M.: Vyssh. shk., 1994. 544 s.
2. *Bejli N.* Matematika v biologii i medicine. M.: Mir, 1970. 168 s.
3. *Verzhbickij V. M.* Chislennye metody (linejnaja algebra i nelinejnye uravnenija): Ucheb. posobie dlja vuzov. M.: Vyssh. shk., 2000. 266 s.
4. *Ivanov I. A.* Istoriko-matematicheskij as¬pekt primenenija racional'-noj logiki v teoreticheskoj i prikladnoj matematike // Obrazovanie i nauka. Izvestija Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akade¬mii obrazovanija. Zhurnal teoreticheskih i prikladnyh issledovanij. 2009. № 2(59). S. 22–27.
5. *Ivanov I. A.* Teoreticheskie osnovy postroenija modeli obuchenija algebre i nachalam analiza dlja klassov estestvennonauchnogo napravlenija: monografija. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gercena, 2010. 176 s.
6. *Mjakishev G. JA., Buhovcev B. B., Sotskij N.* N. Fizika. 10 klass. Uchebnik. Bazovyj i profil'nyj urovni. M.: Prosvewenie. 2010. 366 s.
7. *Samner G.* Matematika dlja geografov. M.: Progress, 1981. 291 s.

Е. В. Береснева

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДУЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ В ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ХИМИИ» В ВУЗЕ

В статье представлен опыт преподавания курса «Теория и методика обучения химии» по модульной технологии. Рассмотрены структурные компоненты обучающего модуля, приведены варианты формулировок комплексных и частных дидактических целей разного уровня, выделены виды обязательных и необязательных самостоятельных работ студентов, которые они должны выполнить при модульном подходе к организации обучения, раскрыты виды контроля (входной, текущий, промежуточный, выходной, итоговый) и рейтинговая система оценки знаний, умений и опыта творческой деятельности студентов.

Ключевые слова: модульная технология, модульная программа, обучающий модуль, учебный элемент, цели обучения, самостоятельная работа студентов, рейтинговая система контроля.