Е. В. Долженко

ЗНАЧЕНИЕ ФОРМУЛИРОВКИ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ

В статье рассматриваются вопросы, связанные с методикой проведения анализа условия физической задачи при формировании у учащихся умений математического моделирования. Актуальность работы определена тем, что в пособиях, ориентированных на учителя средней школы, обычно ограничиваются разработкой и анализом уже построенной модели в рамках заданного условия, как правило, не подлежащего изменениям, и не рассматривают возможность создания (выбора) модели на основе условия задачи.

Ключевые слова: математическая и физическая модель, формулировка условия, метод анализа размерностей, геометрические образы, векторные уравнения.

E. Dolzhenko

THE RELEVANCE OF PROBLEM FORMULATION FOR MODEL CONSTRUCTION

This article regards some issues concerning the methods of the analysis of problems when developing the abilities of mathematical modeling in the classes of physics. It is argued that school books for teachers usually describe only the development and the analysis of the model which has already been created and which cannot be changed. The possibility of choosing the model according to the conditions set by the problem usually is not given.

Keywords: *Mathematical and physical model, formulation of the problem, method of the analysis of dimensions, geometric pattern, vector equations.*

Анализ условия задачи является начальным этапом при решении любой физической задачи, поэтому одной из важнейших целей работы с учащимися над условием задачи в рамках обучения навыкам математического моделирования является научить учащихся умению анализировать это условие для определения возможностей построения той или иной физической и математической моделей процесса или явления.

В существующей учебно-методической литературе [7] условие задачи, как правило, в подавляющем большинстве случаев уже содержит вербальную модель физического явления, провоцирующую на использование традиционно соответствующей ей математической модели или совокупности применяемых математических методов и образов.

Если в условии задачи заданы векторные величины, то ее решение может опираться на создание геометрических образов векторных уравнений.

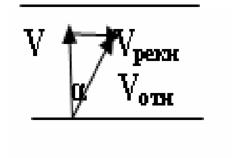
Например, при решении следующей задачи:

Лодка переправляется на другой берег. С помощью руля нос лодки направляют перпендикулярно берегу. Скорость лодки в стоячей воде — 4 м/с, а скорость течения реки со-

ставляет 3 м/с. Как будет направлена скорость лодки относительно воды и каково значение скорости лодки относительно берегов?

Без особого труда учащиеся приходят к выводу о необходимости использования принципа относительности механического движения:

$\vec{V}_{отн.берега} = \vec{V} + \overrightarrow{V_{реки}}$, где вектор скорости определяется правилом векторного сложения, а модуль скорости $|\overrightarrow{V}_{отн.берега}|^2 = \overrightarrow{V^2} + \overrightarrow{V^2_{реки}}$.

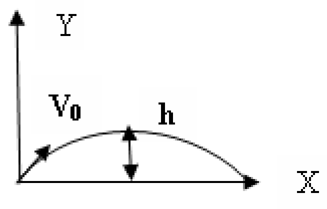


Направление движения легко определить, пользуясь соотношением сторон в прямоугольном треугольнике $tg\alpha = V_{реки}/V$.

В этом случае процесс решения задачи сводится к простому предъявлению знаний в данной области и умению ими грамотно воспользоваться. При решении задачи о движении тела, брошенного под углом к горизонту, — например такой:

Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0. Определить дальность полёта и максимальную высоту подъёма тела [7, с. 38].

Сама формулировка условия сводит эту задачу к известной упрощенной модели движения по параболе и записи стандартных уравнений:



$X = L = V_0\cos\alpha t,\ Y = h = V_0\sin\alpha t — gt^2/2,\ V_y = V_0\sin\alpha — gt.$

Решение этих уравнений приводит к стандартному ответу:

$L = V_0^2 \sin 2\alpha / g$ и $h_{\max} = V_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$.

Смысл решения многих подобных задач, пусть более усложненных, но сформулированных в рамках традиционной модели (сопротивлением воздуха пренебречь), приводит к стандартным математическим образам.

Приведенные формулировки условий задач не только навязывают физическую модель, но и наталкивают учащихся на использование стандартных математических методов.

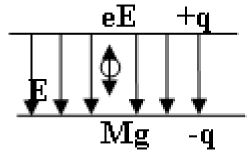
Устойчивый стереотип — формулировка условия $\rightarrow$ физическая модель $\rightarrow$ математическая модель или образ — широко применяется в традиционной методике решения задач и на определённом этапе дает положительные результаты, поэтому задачи, условие которых предполагает использование стандартного математического метода, обычно не требуют дополнительного исследования.

Но в ряде задач условия таковы, что применение устоявшихся моделей и методов для их решения может привести к неочевидным результатам. Кроме того, иногда сами формулировки условия некоторых задач ограничивают решение той или иной математической моделью и не позволяют в рамках этой модели провести полноценное исследование полученного результата или же использование стандартного подхода к решению может привести к ошибочным результатам.

К сожалению, в большинстве случаев у учащихся формируется стереотипное представление о том, что количественные данные в условии задачи не играют принципиальной роли и не содержат никаких подвохов, а только лишь конкретизируют предложенную ситуацию.

Но именно конкретные численные данные, на первый взгляд не вызывающие подозрений, могут привести к абсолютно неожиданному, парадоксальному, а зачастую и опровергающему (ставящему под сомнение) полученное решение результату.

Так, в задаче на равновесие заряда в конденсаторе[6]:



Пусть площадь пластины плоского воздушного конденсатора 1 м^2. Каким должен быть заряд на пластинах этого конденсатора, чтобы электрон, помещённый в пространство между пластинами, находился в равновесии?

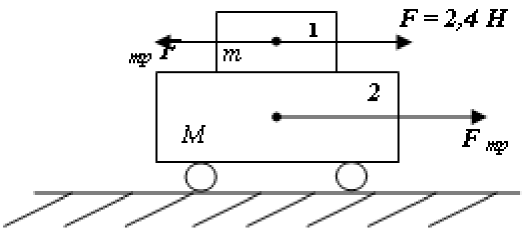
Численные значения величин, приведённые в условии задачи, вполне реальны и, на первый взгляд, только служат для придания конкретизации и правдоподобности рассматриваемому процессу.

Решая данную задачу в рамках практически навязанной условием модели, из соображений равновесия заряда в однородном электрическом поле получим при подстановке численных значений для заряда пластин значение $q = 45 \cdot 10^{-23}\,Кл$.

При очевидном решении и использовании вполне правдоподобных количественных характеристик системы получается результат, невозможный с физической точки зрения, поскольку заряд пластин не может быть меньше элементарного.

Но условие данной задачи можно изменить таким образом, что задача приобретёт смысл исследования. Можно провести анализ сложившейся ситуации и найти выход путём изменения условия задачи. Можно изменить вопрос: «Какова должна быть минимальная площадь пластин, чтобы значение заряда конденсатора соответствовало реальности?» или предложить учащимся самим внести нужные изменения в формулировку задачи, чтобы задача приобрела черты реальности.

В таком случае эта простая задача-«ловушка» становится хорошим примером для развития умений математического моделирования. Аналогичным примером соответствия численных данных происходящим физическим процессам может служить и задача о движении тела на тележке.



На гладкой поверхности находится тележка массой M = 4 кг. На ней — тело массой m = 2 кг. К телу приложена сила F = 2,4 Н. Коэффициент трения между тележкой и телом k = 0,1. Определить ускорение тележки и находящегося на ней тела.

Если тела движутся каждое по отдельности, то есть скользят относительно друг друга, то $F_{тр} = kmg = 2H$, при этом для тела m $F - F_{тр} = ma_1$, следовательно, $a_1 = \dfrac{2,4-2}{2} = 0,2$ м/с^2.

Для нижнего $F_{тр} = Ma_2$, следовательно, $a_2 = \dfrac{2}{4} = 0,5$ м/с^2.

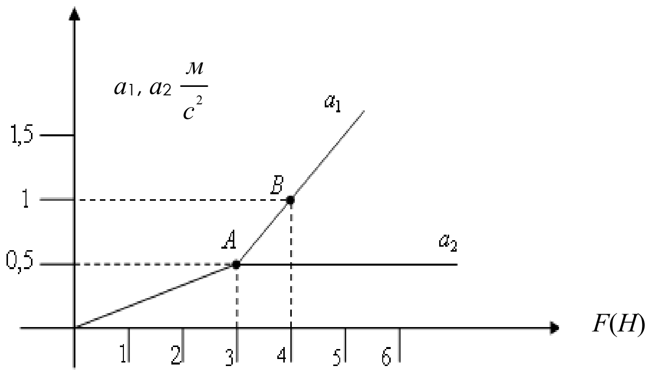
Получается, что нижнее тело само выскакивает из-под верхнего, так как $a_2 > a_1$, что в принципе невозможно.

Если же тела движутся как одно целое, то из уравнений Второго закона Ньютона для тел m и M следует

$$\begin{cases} F - F_{тр} = ma \\ F_{тр} = Ma \end{cases} \Rightarrow \; F = a(M + м). \quad a = \frac{F}{M+m} = \frac{2,4}{6} = 0,4 \text{ м/с}^2, \quad F_{тр} = Ma$$ и будет $F_{тр} = 4 \cdot 0,4 = 1,6H < 2H$.

Этот результат, на первый взгляд, не согласующийся с данными условия задачи, позволяет провести дополнительное исследование с помощью графика для некоторых заданных чисел F и m.

Графическая зависимость ускорений тел от величины F при заданных m, M, и k выглядит следующим образом:



Характерные точки графика: $(\cdot)A$ в ней $F_{тр} = F_{тр.ск.} = 2H$, но

$$a_1 = a_2 = a = \frac{F_{тр}}{M} = \frac{2}{4} = 0,5\ \frac{м}{с^2},$$

при этом $F = F_{тр} + ma = 2 + 2\cdot 0,5 = 3H$

при $F < 3H$ $a_1 = a_2 = a = \dfrac{F}{M+m}$ при $F > 3H$ $a_2 = \dfrac{F_{тр}}{M} = 0,5\dfrac{м}{с^2} = const$, а ускорение тела $a_1 = \dfrac{F - F_{тр}}{m} = \dfrac{F-2}{2}$.

В частности, при $F = 4H$ $a_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1\dfrac{м}{с^2}$ и график $a_1 = f(F)$ пройдет через $(\cdot)$B.

Можно построить график $F_{тр} = \varphi(F)$ при $F \le 3H$. $F_{тр} = Ma = F\dfrac{M}{M+m} = F\cdot\dfrac{2}{3}$; при $F > 3H$. $F_{тр} = kmg = 2\ H$.

Можно рассмотреть также зависимость $F_{тр.}$ от F при заданных M и m.

При решении этой задачи целесообразно предложить учащимся самим осуществить подбор данных, которые позволят всесторонне рассмотреть возможности этой модели.

Казалось бы, нет необходимости обсуждать подобные задачи, и достаточно просто заменить предложенные в условии числовые данные, однако именно такая задача (её различные варианты встречаются в ряде пособий [6, с. 37, 57]) может служить хорошим примером развития в практике решения задач навыков аналитического подхода к осмыслению условия задачи, так как позволяет учащимся неформально подойти к решению достаточно стандартной задачи.

Кроме того, такие задачи заставляют учащихся рассматривать условие задачи не как некую неизменную данность, а как возможность уже на начальном этапе решения задачи поставить вопрос о возможности происходящего явления вообще и его предполагаемых количественных характеристиках.

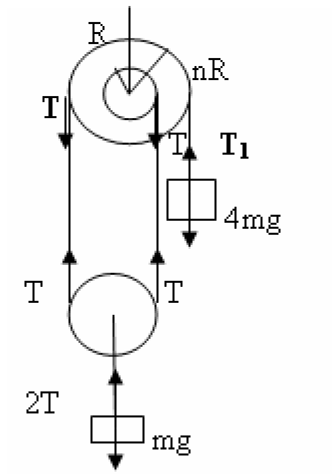
Также стандартный подход может «подвести», если условие задачи предполагает использование устоявшейся и, на первый взгляд, вполне оправданной модели, но традиционно используемая модель не может быть применена при решении задачи, так как происходящие процессы оказываются сложнее, а модель — не применима.

Например, — в следующей задаче [3]:

Неподвижный блок состоит из двух склеенных блоков, радиусы которых отличаются в n раз. На обод меньшего блока намотана нить, которая через подвижный блок незаданного размера, сматываясь, поднимается и огибает блок большего размера. Определить натяжения нитей (или ускорения блоков ***a_1 и a_2****).*

Учитывая невесомость блоков и нерастяжимость нитей, получаем следующую ситуацию.

Для неподвижного блока момент инерции $I = 0$, запишем уравнение моментов и уравнения движения для грузов:



$$\sum M_i = I \cdot \beta = 0 \Rightarrow TR + T_1 nR - TnR = 0.$$

$$4mg - T_1 = 4ma_1.$$

$$2T - mg = ma_2.$$

Отсюда получаем $T_1 n = T(n - 1)$, т. е. $T_1 = \frac{T(n-1)}{n}$, значит, сила натяжения зависит от соотношения размеров блоков, а вовсе не от действующих в задаче сил!

Ускорения для грузов:

$$a_1 = \left(4mg - \frac{T(n-1)}{n}\right) / 4m; \ a_2 = (2T - mg)/m.$$

Из полученного результата следует, что при $n = 1$, $T_1 = 0$, следовательно, $a_1 = g$ (свободное падение!), а ускорение нижнего груза a_2 вообще не зависит от соотношения размеров блоков.

В данном случае использование стандартной модели (невесомость блоков, нерастяжимость нитей) приводит к явной нелепости результата — модель не работает.

Это противоречие становится понятным, если учесть, что в условии задачи не определён характер движения нити по блоку и что, следовательно, нужно было построить другую модель для описания этого движения.

Такая задача при обучении навыкам математического моделирования может служить примером необходимости осторожности и взвешенности при выборе модели описания явлений.

Наряду с приведенными примерами, когда формулировка условия задачи имеет явные недостатки, требующие от учителя умения грамотно внести необходимые изменения в формулировку условия задачи, существует множество задач, условия которых «помогают» учащимся не только построить правильную физическую модель, но в процессе решения задачи осуществить развитие построенной первоначальной модели.

Более того, зачастую именно степень «нечёткости» формулировки задачи позволяет учащимся при решении задачи проверить верность предварительно построенных гипотез относительно процессов и явлений, используемых в задаче.

Большинство формулировок условий задач школьного курса физики предполагает упрощённые модели физических процессов и явлений, пренебрегая (и, с методической точки зрения, совершенно оправданно) целым рядом сопутствующих рассматриваемому процессу уточнений.

Это, однако, не означает, что истинный характер происходящих явлений представляется вообще недоступным для изучения в школьном курсе физики [4; 5], так как путем несложной корректировки используемой модели можно приблизить результат решения к физической реальности или, наоборот, убедиться в том, что выбранная модель не позволяет получить удовлетворительного ответа на вопросы задачи.

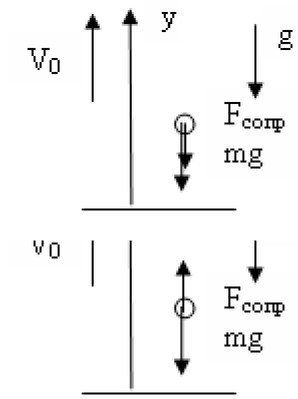
Поэтому, с методической точки зрения, удачными следует признать такие формулировки условий задачи, которые заставляют учащихся незначительно видоизменять стандартную модель, добиваясь результата, приближенного к реальности, или большего прояснения сути явления.

Обратимся к задаче [1, с. 62; 8, с. 34, с. 109] о движении тела под действием силы тяжести с учётом сопротивления воздуха:

Тело брошено вертикально вверх в поле силы тяжести. Что займет больше времени — подъём или спуск?

Если не учитывать сопротивление воздуха, то решение этой задачи в рамках использования простейшей математической модели сразу дает ответ: $t_{подъёма} = t_{спуска}$, где $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ легко получается из ЗСЭ или из простейших уравнений кинематики. В этом случае, когда $a = g$ — единственное ускорение тела, решение достаточно тривиально.

Следуя реализации принципа иерархичности, усложним модель, введя сопротивление воздуха.



В этом случае при подъёме тела $a_{y1} = -\left(\frac{F_{сопр1}}{m} + g\right)$, в процессе подъёма численное значение ускорения тела $a_{y1} > g$.

На спуске тела $a_{y2} = -\left(g - \frac{F_{сопр2}}{m}\right)$, в течение всего спуска численное значение ускорения тела $a_{y2} < g$. Подставив оба эти ускорения в формулу для расчета времени, легко заметить, что $t_{подъёма} = \sqrt{\frac{2h}{a_{y1}}} > t_{спуска} = \sqrt{\frac{2h}{a_{y2}}}$.

Аналогичный вывод можно сделать и для тела, брошенного под углом к горизонту. Но в этом случае необходимо учесть, что будет рассматриваться проекция силы сопротивления на вертикальную ось.

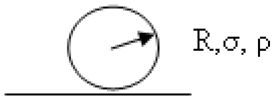
Эта же задача может быть задана и с целью отработки одного из этапов обучения математическому моделированию. С одной стороны, она достаточно проста как в физическом, так и в математическом отношении, а с другой стороны, в ходе её рассмотрения учащиеся могут при небольшой помощи учителя практически самостоятельно создать модель и производить её дальнейшие усложнения (уточнения), постепенно приближая модель к реальности.

Особое значение (для развития умений математического моделирования) имеют задачи, формулировка условия которых позволяет обучить навыкам формирования и оценке возможностей математического моделирования по методу размерностей.

Если условие задачи сформулировано таким образом, что требует оценочного или качественного подхода к рассмотрению процессов, происходящих в задаче, но при этом предполагается нахождение достаточно конкретных математических зависимостей величин, указанных в формулировке условия, то такие задачи оставляют учащимся большие возможности не только в выборе, но и в создании модели, в определении её возможных параметров и возможных связей между ними.

Кроме того, в таких случаях зачастую требуется не только установить связь конкретных характеристик друг с другом, но и, наоборот, независимость искомой величины от каких-либо параметров системы. В этих случаях неоценим метод анализа размерностей.

В качестве весьма наглядного примера приведем задачу [8, с. 38, 118] об оценке периода колебаний капли жидкости:



Оцените, пользуясь соображениями размерности, период возможных колебаний капли жидкости в зависимости от её размера R, плотности ρ, коэффициента поверхностного натяжения σ.

Допустим, что период зависит от перечисленных величин, тогда

$T \sim R\rho\sigma$, $T(сек) \sim R^{\alpha}\rho^{\beta}\sigma^{\gamma}$, откуда $T \sim м^{\alpha}\left(кг/м^3\right)^{\beta}\left(кгм/с^2м\right)^{\gamma}$, следовательно,

$T \sim м^{\alpha-3\beta}кг^{\beta+\lambda}с^{-2\gamma}$. Для степеней получим: $\alpha-3\beta=0$; $\beta+\gamma=0$; $-2\gamma=0$; отсюда $\alpha=3/2$; $\beta=-1/2$, следовательно $T \sim \sqrt{\rho/\sigma R^{3/2}}$.

В этом случае при относительной простоте решения задачи очевидно, что полученный результат вполне физичен, правдоподобен и соответствует требованиям, диктуемым условием задачи. Более того, подобные задачи позволяют исследовать полученный результат на взаимодействие с реальными параметрами реальных жидкостей и несут в себе начала исследовательской деятельности.

Часто условия задач имеют внешнее сходство и кажется, что для решения может быть использована одна и та же физическая и математическая модель, но при рассмотрении особенностей процесса выясняется, что какая-либо деталь рассматриваемого процесса требует уточнения и модели будут различны.

Наглядным примером таких задач могут служить известные задачи о нагнетающем и откачивающем [2, с. 187–189] вакуумных насосах.

Первый случай.

В сосуд, вместимость которого — V, нагнетают воздух при помощи поршневого насоса, объём которого — V_0. Сколько качаний n надо сделать, чтобы давление газа в сосуде стало P?

Атмосферное давление — P_0 (процесс считать изотермическим).

После первого качания $P_0V_0 = P_1V$, отсюда $P_1 = P_0V_0/V$ — первый цикл, новое качание $P_2 = P_1 + P_0V_0/V$ — второй цикл, затем $P_3 = P_2 + P_0V_0/V = 2P_0V_0/V + P_0V_0/V = 3P_0V_0/V$. После n качаний $P = P_0 + nP_0V_0/V$.

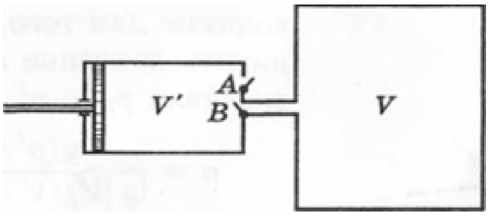
Отсюда $n = \dfrac{PV - P_0V}{P_0V_0}$.

В данной задаче результат получен путем последовательного неоднократного использования простейшего уравнения, описывающего изотермический закон (каждый раз для одинаковой массы газа) и закона Дальтона.

Второй случай.

Имеется сосуд объемом V и поршневой насос с объемом камеры V'. Сколько качаний нужно сделать, чтобы давление в сосуде уменьшилось от p до p'? Атмосферное давление — p_0 . Изменением температуры пренебречь.

Мы, естественно, считаем, что начальное давление p не превосходит наружного давления p_0, иначе можно сначала просто выпустить излишек газа.



Эту задачу можно решить, используя закон Бойля — Мариотта, хотя в процессе откачки масса газа в сосуде изменяется. Действительно, рассмотрим первый ход поршня влево; при этом клапан *A* закрыт, клапан *B* открыт, и газ из сосуда входит в камеру насоса. Давление газа уменьшается от первоначального до некоторого p_1. Поскольку процесс изотермический и масса газа при этом не меняется, можно воспользоваться законом Бойля — Мариотта

$$pV = p_1\left(V + V'\right). \quad (1)$$

При обратном ходе поршня клапан *B* закрывается и воздух из камеры насоса выталкивается наружу через клапан *A*. При втором ходе поршня влево все повторяется точно так же, только давление в начале хода в сосуде равно p_1. Обозначив давление в конце второго хода через p_2, имеем

$$p_1V = p_2\left(V + V'\right).$$

Подставив сюда p_1 из уравнения (1), находим

$$p_2 = p\left(\frac{V}{V + V'}\right)^2.$$

Рассуждая дальше таким же образом, нетрудно убедиться, что после *n* ходов поршня давление p_n в сосуде будет равно

$$p_n = p\left(\frac{V}{V + V^1}\right)^n. \quad (2)$$

По формуле (2) определяется число качаний *n*, необходимое для того, чтобы понизить давление в сосуде до значения $p_n = p'$:

$$n = \frac{\lg\left(p'/p\right)}{\lg\left[V/\left(V + V'\right)\right]}.$$

Если сравнивать формулировки этих задач (они часто встречаются во многих пособиях по решению задач), то может возникнуть обманчивое впечатление, что достаточно использовать простейшие газовые законы и решения будут симметричны. Но, если начать решение этих задач с построения и анализа моделей происходящих явлений, то выясняется, что сходство принципиальной модели явления быстро заканчивается и для их решения требуется построение различных моделей. Полученные математические результаты отличаются как с физической точки зрения, так и в возможности математического исследования этих результатов. Вторая из предложенных задач при попытке перехода к предельному случаю показывает невозможность бесконечной откачки газа из сосуда и заставляет задуматься над причинами данного явления, что приводит к формулировке и к решению ещё одной задачи о пределе понижения давления и исследованию графика изменения давления газа.

Рассмотренные примеры охватывают большинство аспектов взаимодействия формулировки условия задачи и математической модели решения, но далеко не все их исчерпывают. Таким образом, очевидно, что учителю необходимо умение оценивать формулировки условий задач с точки зрения формирования на их основе правильных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буздин А. И., Ильин В.А., Кравченков И. В., Кротов С. С., Свешников Н. А.* Задачи московских физических олимпиад. М.: Наука, 1988. 192 с.

2. *Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С.* Физика в примерах и задачах. М.; СПб.: Изд-во МЦНМО, 2008. 516 с.

3. Задачи московских городских олимпиад по физике М.: Изд-во МЦНМО, 2007.

4. *Кондратьев А. С., Прияткин Н. А.* Современные технологии обучения физике: Учебное пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. 342 с.

5. *Кондратьев А. С., Филиппов М. Э.* Физические задачи и математическое моделирование реальных процессов: Учебно-методическое пособие для учителя. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2001. 112 с.

6. *Манида С. Н.* Физика. Решение задач повышенной сложности. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 436 с.

7. *Рымкевич А. П., Рымкевич П. А.* Сборник задач по физике. М.: Просвещение, 1984. 192 с.

8. Физико-математические олимпиады. М.: Знание, 1977. 160 с.

REFERENCES

1. *Buzdin A. I., Il'in V. A., Kravchenkov I. V., Krotov S. S., Sveshnikov N. A.* Zadachi moskovskih fizicheskih olimpiad. M.: Nauka, 1988. 192 s.

2. *Butikov E. I., Bykov A. A., Kondrat'ev A. S.* Fizika v primerah i zadachah. M.; SPb.: Izd-vo MCNMO, 2008. 516 s.

3. Zadachi moskovskih gorodskih olimpiad po fizike. M.: Izd-vo MCNMO, 2007.

4. *Kondrat'ev A. S., Prijatkin N. A.* Sovremennye tehnologii obuchenija fizike: Uchebnoe posobie. SPb.: Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2006. 342 s.

5. *Kondrat'ev A. S., Filippov M. E.* Fizicheskie zadachi i matematicheskoe modelirovanie real'nyh processov: Uchebno-metodicheskoe posobie dlja uchitelja. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gertsena, 2001. 112 s.

6. *Manida S. N.* Fizika. Reshenie zadach povyshennoj slozhnosti. SPb.: Izd-vo SPb un-ta, 2003. 436 s.

7. *Rymkevich A. P. Rymkevich P. A.* Sbornik zadach po fizike. M.: Prosveshchenie, 1984. 192 s.

8. Fiziko-matematicheskie olimpiady. M.: Znanie, 1977. 160 s.