МАТЕМАТИКА

А. В. Коптев

ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ И ПУТИ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Уравнения Навье — Стокса для движения вязкой несжимаемой жидкости представляют систему четырех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Эта система допускает понижение. Результирующих соотношений девять. Каждое из этих соотношений имеет порядок по основным неизвестным на единицу меньший, чем в исходных уравнениях Навье — Стокса. Эти соотношения, рассмотренные в совокупности, представляют первый интеграл уравнений Навье — Стокса. Представлено доказательство этого утверждения. Рассмотрены частные случаи этого интеграла. Предложены некоторые пути дальнейшего интегрирования.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, движение, вязкость, нелинейность, интеграл, частная производная.

A. Koptev

First Integral and Ways of Further Integration of Navier – Stokes Equations

Navier — Stokes equations for incompressible viscous fluid flow are four nonlinear differential equations on partial derivatives of the second order. This system allows depression. As a result there are nine result correlations. The derivatives order of each one is less than the derivatives order on the main Navier — Stokes equations. Those nine correlations taken on totality represent the first integral of Navier — Stokes equations. The proof of that statement is given, and some particular cases are regarded. The ways of further integration are suggested.

Keywords: differential equation, motion, viscosity, nonlinearity, integral, partial derivative.

1. Введение. Уравнения Навье — Стокса — это один из известных видов уравнений математической физики. Они представляют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и описывают движение жидких и газообразных сред при наличии вязкости. Эти уравнения имеют большое практическое значение в различных областях. Среди них особенно выделяются следующие: метеорология, океанология, гидрология, кораблестроение, аэронавтика.

Характерной особенностью этих уравнений является наличие нелинейных членов, что значительно усложняет исследование и решение.

Несмотря на то, что уравнения Навье — Стокса сформулированы давно, в середине XIX века, но и на сегодняшний день существует большой перечень вопросов, либо не исследованных вовсе, либо исследованных не достаточно полно [4–6].

На сегодняшний день нет общего метода решения и нет общего подхода к решению как самих уравнений Навье — Стокса, так и граничных и начальных задач для них. Этот неутешительный вывод справедлив даже для самого простого типа уравнений Навье — Стокса — для случая несжимаемой среды, когда плотность постоянна.

Этот тип уравнений Навье — Стокса для случая 3D можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial\left(p+\Phi\right)}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta u,\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial\left(p+\Phi\right)}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta v\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial\left(p+\Phi\right)}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta w,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.
\end{aligned}\qquad(1)$$

Все переменные — безразмерные.

u, v, w, p — основные неизвестные. Они представляют проекции вектора скорости движения жидкости в точке с координатами x, y, z в момент времени t и давление в этой же точке в тот же момент времени.

Ф — потенциал внешних массовых сил, который представляет известную функцию;

Δ — трехмерный оператор Лапласа, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$;

Re — число Рейнольдса, которое задается в качестве исходного параметра.

Каждое из основных неизвестных является функцией четырех независимых переменных — координат и времени. В общем случае задача состоит в нахождении этих неизвестных.

2. Интеграл уравнений Навье — Стокса. В работах [1–2] представлено решение первой части проблемы: предложен метод понижения порядка уравнений (1). Метод основан на приведении каждого из уравнений (1) к каноническому виду

$$\frac{\partial P_i}{\partial x}+\frac{\partial Q_i}{\partial y}+\frac{\partial R_i}{\partial z}+\frac{\partial S_i}{\partial t}=0,$$

на их последовательном интегрировании и частичном исключении нелинейных членов. Вводятся вспомогательные неизвестные, которые, по мнению автора, соответствуют внутренней симметрии исходных уравнений.

Для этих новых неизвестных предложено название псевдофункции тока. Для них введено обозначение Ψ_i. Таким образом, имеем два вида неизвестных. Основные неизвестные — это скорости и давление, и ассоциированные неизвестные — псевдофункции тока.

При таком подходе оказывается возможным построить первый интеграл уравнений Навье — Стокса для неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости и интегралы уравнений Эйлера как частные случаи [1–2].

Первый интеграл уравнений (1) представляется в виде девяти соотношений связи между основными неизвестными *u, v, w, p*, ассоциированными неизвестными псевдофункциями тока Ψ_i, и аддитивными функциями трех переменных

$$p+\Phi+\frac{U^2}{2}+d=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(\Psi_2-\Psi_1)}{\partial x}+\frac{\partial(\Psi_4-\Psi_3)}{\partial y}+\frac{\partial(\Psi_6-\Psi_5)}{\partial z}\right]+\alpha_4+\beta_4+\gamma_4, \tag{2}$$

$$u^2-v^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial z^2}-$$
$$\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_3}{\partial y}+\frac{\partial(\Psi_5+\Psi_6)}{\partial z}\right]+$$
$$3(\alpha_4-\beta_4), \tag{3}$$

$$v^2-w^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y^2}+$$
$$\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(\Psi_1+\Psi_2)}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_4}{\partial y}-\frac{\partial\Psi_6}{\partial z}\right]+3(\beta_4-\gamma_4), \tag{4}$$

$$uv-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial\Psi_{15}}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_{14}}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial z}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}-\frac{\partial(\Psi_8+\Psi_9)}{\partial z}\right]+\frac{1}{2}\left(\alpha_1{}'_z-\alpha_3{}'_t+\beta_1{}'_z-\beta_2{}'_t\right), \tag{5}$$

$$uw-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial x\partial z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\Psi_{15}}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_{14}}{\partial y}-\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial z}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial\Psi_5}{\partial x}+\frac{\partial(\Psi_9-\Psi_7)}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right]-\frac{1}{2}\left(\alpha_1{}'_y+\alpha_2{}'_t-\gamma_1{}'_y+\gamma_3{}'_t\right), \tag{6}$$

$$vw-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y\partial z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi_{14}}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_{15}}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial z}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(\Psi_7+\Psi_8)}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_6}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right]-\frac{1}{2}\left(\beta_1{}'_x+\beta_3{}'_t+\gamma_1{}'_x+\gamma_2{}'_t\right), \tag{7}$$

$$u=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_7}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial\Psi_5}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_8}{\partial y}-\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right)\right]+\frac{1}{2}\left(\alpha_2{}'_z+\alpha_3{}'_y+\delta_1{}'_y+\delta_2{}'_z\right), \tag{8}$$

$$v=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi_3}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}-\frac{\partial\Psi_7}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Psi_9}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_6}{\partial y}-\frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right)\right]+\frac{1}{2}\left(\beta_2{}'_x+\beta_3{}'_z-\delta_1{}'_x+\delta_3{}'_z\right), \quad (9)$$

$$w=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi_5}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_8}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\Psi_9}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_6}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right)\right]+\frac{1}{2}\left(\gamma_2{}'_y+\gamma_3{}'_x-\delta_2{}'_x-\delta_3{}'_y\right). \quad (10)$$

Дополнительно здесь использованы следующие обозначения:

$U^2=u^2+v^2+w^2$ — квадрат модуля вектора скорости, d — диссипация. Для последней величины имеет место формула

$$d=-\frac{U^2}{6}-\frac{1}{3}\left(\Delta_{yz}\Psi_3-\Delta_{xz}\Psi_2+\Delta_{xy}\Psi_1+\frac{\partial^2\Psi_4}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Psi_5}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\Psi_6}{\partial y\partial z}\right), \quad (11)$$

где в качестве Δ_{yz}, Δ_{xz}, Δ_{xy} обозначены неполные операторы Лапласа по пространственным координатам

$$\Delta_{yz}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_{xz}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В соотношения (2–10) входят и произвольные функции трех независимых переменных α_I, β_I, γ_I, δ_i. Некоторые из них представлены в виде производных, и все они должны удовлетворять определенным ограничениям. Они должны допускать перемену порядка дифференцирования, и каждая из них не зависит от одного из аргументов x, y, z или t. Должны выполняться равенства

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\beta_i}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\gamma_i}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial\delta_i}{\partial t}=0. \quad (12)$$

Девять соотношений (2–10), рассмотренных в совокупности, представляют первый интеграл уравнений Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Ниже мы дадим доказательство этого утверждения.

Для случая 2D уравнений Навье — Стокса соотношения (2–10) значительно упрощаются [2]. Интеграл для этого случая представляется лишь пятью соотношениями. Число основных неизвестных понижается до трех, число ассоциированных — также до трех, а число аддитивных функций двух переменных — до пяти.

3. Доказательство утверждения.

Для доказательства утверждения достаточно найти комбинации частных производных первого порядка, с помощью которых (2–10) преобразуются к уравнениям (1).

Для каждого из четырех уравнений (1) получается своя комбинация производных, так что предлагаемый вариант доказательства естественно подразделяется на четыре отдельных пункта.

1) Наиболее простая комбинация получается для последнего из уравнений (1), уравнения неразрывности. Вычислим $\frac{\partial}{\partial x}$ от (8), $\frac{\partial}{\partial y}$ от (9), $\frac{\partial}{\partial z}$ от (10) и результаты сложим. Будет найдено $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$. Эта сумма в результате оказывается равной величине

$$\alpha''_{2_{zx}}+\alpha''_{3_{yx}}+\delta''_{1_{yx}}+\delta''_{2_{zx}}+\beta''_{2_{xy}}+\beta''_{3_{zy}}-\delta''_{1_{xy}}+\delta''_{3_{zy}}+\gamma''_{2_{yz}}+\gamma''_{3_{xz}}-\delta''_{2_{xz}}-\delta''_{3_{yz}}.$$

Имеем алгебраическую сумму двенадцати слагаемых. Проанализируем каждое из них. Первое и второе равны нулю вследствие первого из равенств (12). Также равны нулю пятое и шестое, вследствие второго из (12) и девятое и десятое, вследствие третьего из (12). Кроме того, в результате перемены порядка дифференцирования третье и седьмое слагаемые оказываются с противоположными знаками и в сумме дают нуль. Аналогично —для четвертого и одиннадцатого и для восьмого и двенадцатого слагаемых.

Таким образом, рассмотренная сумма равна нулю, и указанная комбинация частных производных приводит к последнему из уравнений (1).

2) Найдем комбинацию первых производных, которая приводит к первому из уравнений (1). Вычислим $\frac{\partial}{\partial x}$ от (2) и найдем из него $\frac{\partial}{\partial x}(p+\Phi)$. Получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}(p+\Phi) = -\frac{2}{3}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3\Psi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\Psi_1}{\partial x\partial y^2} - \frac{\partial^3\Psi_2}{\partial x^3} - \right.$$
$$\left.\frac{\partial^3\Psi_2}{\partial x\partial z^2} + \frac{\partial^3\Psi_3}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3\Psi_5}{\partial x\partial z^2} + \frac{\partial^3\Psi_4}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3\Psi_5}{\partial x^2\partial z} + \frac{\partial^3\Psi_6}{\partial x\partial y\partial z}\right) - \tag{13}$$
$$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2(\Psi_8-\Psi_7)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Psi_{10}-\Psi_9)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\Psi_{12}-\Psi_{11})}{\partial x\partial z}\right] + \beta_1{}'_x + \gamma_1{}'_x.$$

Преобразуем правую часть (13), используя (3–10). Вычислим $-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}$ от (3), $-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}$ от (4), $-\frac{\partial}{\partial y}$ от (5), $-\frac{\partial}{\partial z}$ от (6) и результаты сложим. Приходим к выражению

$$\frac{\partial}{\partial x}(p+\Phi) = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} - w\frac{\partial w}{\partial x} - u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) +$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial y^2} + \right. \tag{14}$$
$$\left.\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi_3}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\Psi_5}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2(\Psi_7+\Psi_8)}{\partial y\partial z}\right] - \frac{1}{2}\left(\alpha_3{}''_{yt} + \alpha_2{}''_{zt}\right).$$

Проанализируем правую часть (14). Вследствие уравнения неразрывности, вторая группа членов равна нулю, а третья — сводится к $\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta u$. Последняя группа членов равна $-\frac{\partial u}{\partial t}$, вследствие (8). Таким образом, (14) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(p+\Phi) = -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Это равенство отличается от первого из уравнений (1) лишь порядком расположения членов, что несущественно. Значит, найденная комбинация производных приводит к первому из уравнений Навье — Стокса.

3) Найдем комбинацию производных, которая приводит ко второму из уравнений (1). Вычислим $\frac{\partial}{\partial y}$ от (2) и найдем из него $\frac{\partial}{\partial y}(p+\Phi)$. Получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}(p+\Phi)=-\frac{2}{3}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3\Psi_{10}}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\Psi_{10}}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^3\Psi_{11}}{\partial x^2\partial y}-\right.$$
$$\left.\frac{\partial^3\Psi_{11}}{\partial y\partial z^2}+\frac{\partial^3\Psi_{12}}{\partial y\partial z^2}+\frac{\partial^3\Psi_{12}}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\Psi_{13}}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^3\Psi_{14}}{\partial x\partial y\partial z}+\frac{\partial^3\Psi_{15}}{\partial y^2\partial z}\right)- \tag{15}$$
$$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2(\Psi_2-\Psi_1)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2(\Psi_4-\Psi_3)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\Psi_6-\Psi_5)}{\partial y\partial z}\right]+\alpha_4{}'_y+\gamma_4{}'_y.$$

Преобразуем правую часть (15), используя (3–10). Вычислим $\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}$ от (3), $-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}$ от (4), $-\frac{\partial}{\partial x}$ от (5), $-\frac{\partial}{\partial z}$ от (7) и результаты сложим. Приходим к выражению

$$\frac{\partial}{\partial y}(p+\Phi)=-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial z}-v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x\partial y}-\right. \tag{16}$$
$$\left.\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_4}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\Psi_6}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\Psi_7}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\Psi_9}{\partial x\partial z}\right]-\frac{1}{2}\left(\beta_2{}''_{xt}+\beta_3{}''_{zt}\right).$$

Рассмотрим правую часть. Вследствие уравнения неразрывности вторая группа членов равна нулю, а третья группа сводится к $\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta v$. Последняя группа членов равна $-\frac{\partial v}{\partial t}$, вследствие (9). Таким образом, равенство (16) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial y}(p+\Phi)=-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta v-\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Это равенство отличается от второго из уравнений (1) лишь порядком расположения членов. Последнее обстоятельство несущественно. Значит, найдена комбинация частных производных, которая приводит ко второму из уравнений Навье — Стокса.

4) Осталось найти комбинацию производных, которая приводила бы к третьему из уравнений (1). Вычислим $\frac{\partial}{\partial z}$ от (2) и найдем из него $\frac{\partial}{\partial z}(p+\Phi)$. Получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\Phi\right)=-\frac{2}{3}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3\Psi_{10}}{\partial y^2\partial z}+\frac{\partial^3\Psi_{10}}{\partial x^2\partial z}-\frac{\partial^3\Psi_{11}}{\partial x^2\partial z}-\right.$$

$$\left.\frac{\partial^3\Psi_{11}}{\partial z^3}+\frac{\partial^3\Psi_{12}}{\partial z^3}+\frac{\partial^3\Psi_{12}}{\partial z\partial y^2}+\frac{\partial^3\Psi_{13}}{\partial x\partial y\partial z}-\frac{\partial^3\Psi_{14}}{\partial x\partial z^2}+\frac{\partial^3\Psi_{15}}{\partial y\partial z^2}\right)- \tag{17}$$

$$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\left(\Psi_2-\Psi_1\right)}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\left(\Psi_4-\Psi_3\right)}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\left(\Psi_6-\Psi_5\right)}{\partial z^2}\right]+\alpha_4{}'_z+\beta_4{}'_z.$$

Преобразуем правую часть (17), используя (3–10). Вычисляем $\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}$ от (3), $\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}$ от (4), $-\frac{\partial}{\partial x}$ от (6), $-\frac{\partial}{\partial y}$ от (7). Складывая результаты, приходим к выражению

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\Phi\right)=-u\frac{\partial w}{\partial x}-v\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial w}{\partial z}-w\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x\partial z}-\right. \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial^2\Psi_4}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\Psi_5}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_6}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi_8}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\Psi_9}{\partial x\partial y}\right]-\frac{1}{2}\left(\gamma_3{}''_{xt}+\gamma_2{}''_{yt}\right).$$

Рассмотрим правую часть. Вторая группа членов равна нулю, а третья — сводится к $\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta w$ вследствие уравнения неразрывности. На основании выражения (10) последняя группа членов равна $-\frac{\partial w}{\partial t}$. Таким образом (18) принимает вид

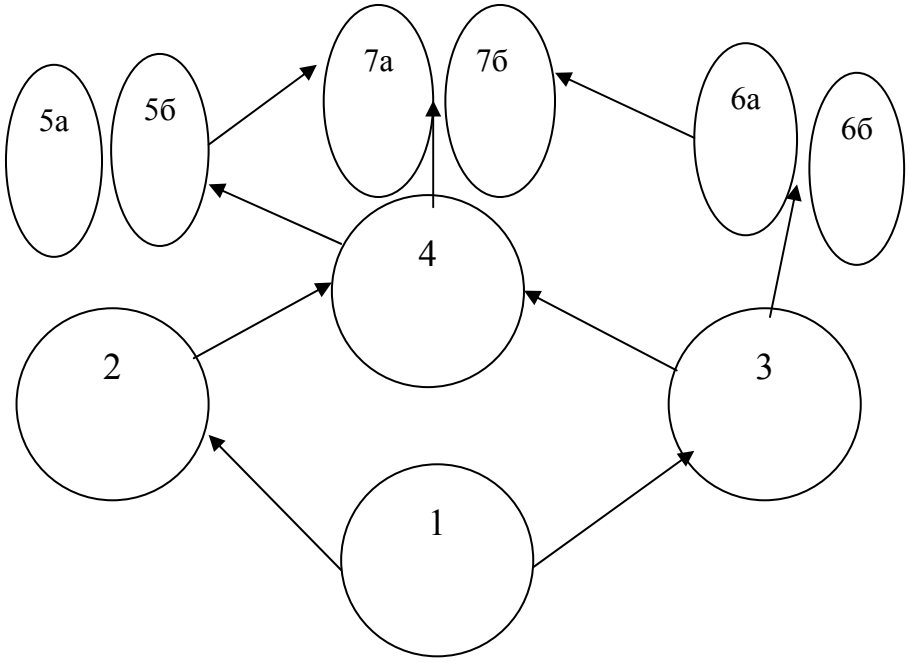
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\Phi\right)=-u\frac{\partial w}{\partial x}-v\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\Delta w-\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Это равенство отличается от третьего из уравнений (1) лишь порядком расположения членов. Значит, найденная комбинация первых производных приводит к третьему из уравнений Навье — Стокса.

Таким образом, каждое из четырех уравнений (1) может быть получено как определенная комбинация первых производных от (2–10). В процессе доказательства каждое из соотношений (2–10) было задействовано, и лишних среди них нет. Соотношения (2□10) в совокупности есть интеграл уравнений (1). Этот интеграл справедливо назвать первым интегралом уравнений Навье — Стокса.

Доказательство закончено.

4. Обсуждение результатов. Интеграл (2–10) допускает различные частные случаи. Взаимосвязи удобно прослеживаются, если расположить интегралы в виде дерева



В основании дерева расположен интеграл 1. Это интеграл уравнений Навье — Стокса для неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости в виде девяти соотношений (2–10). Все остальные его частные случаи.

Интеграл 2 соответствует случаю установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости. Для этого случая все члены с производными $\frac{\partial}{\partial t}$ обращаются в нуль. В результате три последних соотношения (8–10) уже никак не связаны с (2–7) и отпадают. Число соотношений уменьшается до шести, и число ассоциированных неизвестных также уменьшается до шести.

Интеграл 3 соответствует случаю неустановившегося движения идеальной жидкости. Этот интеграл подробно рассмотрен в [3]. Для него соотношения (2–10) сохраняются, но с существенным упрощением: все члены, пропорциональные $\frac{1}{\mathrm{Re}}$, обращаются в нуль.

Интеграл 4 соответствует случаю установившегося движения идеальной жидкости. Этот интеграл можно рассматривать как частный случай 2 или как частный случай 3. Из 3 он получается в результате обращения в нуль всех членов с производными $\frac{\partial}{\partial t}$. Для него имеем шесть соотношений и число ассоциированных неизвестных также равно шести.

Интеграл 5а — это хорошо известный в классической гидромеханике интеграл Бернулли [5]. Он может быть получен из интеграла 4, если характерные точки рассматривать вдоль линии тока. Как показано в работе [3], в этом случае первое из шести соотношений, составляющих интеграл 4, преобразуется в интеграл Бернулли. Но оставшиеся пять соотношений остаются в силе. Они представляют интеграл, сопряженный 5а, — интеграл 5б.

Аналогичным образом интеграл 6а есть известный интеграл Лагранжа — Коши [5]. Он получается из 3 как частный случай для потенциального движения идеальной жидкости. В 6а преобразуется первое из девяти соотношений, представляющих интеграл 3. Ос-

тальные восемь соотношений остаются справедливыми, они дают сопряженный интеграл 6б.

Интеграл Эйлера — Бернулли [5] — простейший из всех. Он обозначен как 7а и расположен на вершине дерева. Он получается из 5а как частный случай, когда выполнено равенство

$$\vec{\Omega} \times \vec{U} = 0 .$$

Здесь $\vec{\Omega}$ — вектор вихря, $\vec{U}$ — вектор скорости.

В этом частном случае имеем и сопряженный интегралу 7а интеграл 7б. Интеграл 7б следует из 5б. Так же, как и 5б, он представляется пятью соотношениями.

Таким образом, все интегралы несжимаемой жидкости получаются один из другого и естественным образом объединяются в одну логическую цепочку. Базовым из них является интеграл 1 в виде соотношений (2–10).

В работе [1] было доказано, что соотношения (2–10) следуют из уравнений Навье — Стокса. В данной работе доказано обратное утверждение. Уравнения Навье — Стокса являются следствиями соотношений (2–10).

Справедлив следующий вывод. Интеграл 1 в виде соотношений (2–10) представляет первый интеграл уравнений Навье — Стокса (1).

Нет решений уравнений (1), для которых нарушались бы соотношения (2□10). Для каждого решения уравнений (1) можно найти значения ассоциированных неизвестных Ψ_i, так, что (2–10) будут выполнены.

В качестве примера приведем одно из известных решений уравнений Навье — Стокса, которое соответствует установившемуся движению вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями под действием заданного перепада давления (плоское течение Пуазейля). Для этого случая имеем точное решение уравнений (1). Оно представляется равенствами

$$u = \frac{\mathrm{Re}}{2\ell}\left(1 - y^2\right), \qquad v = 0, \quad p = p_0 - \frac{x}{\ell}, \tag{19}$$

где Re и ℓ — заданные параметры, p_0 — аддитивная постоянная.

Соотношения (2–10) для случая 2D установившегося движения упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} &p = -\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2}\right) + \alpha(y) + \beta(x), \\ &u^2 - v^2 - \frac{4}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + 2\left(\alpha(y) - \beta(x)\right), \\ &uv - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{20}$$

Имеем только одно ассоциированное неизвестное Ψ_2. Найдем его. Уравнения (20) с учетом (19) преобразуются к виду

$$p_0 - \frac{x}{\ell} = -\frac{\mathrm{Re}^2}{8\ell^2}\left(1-y^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial y^2}\right) + \alpha(y) + \beta(x),$$

$$\frac{\mathrm{Re}^2}{4\ell^2}\left(1-y^2\right)^2 = \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2} + 2\left(\alpha(y) - \beta(x)\right), \quad \frac{y}{\ell} = -\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x \partial y}. \qquad (21)$$

Находим Ψ_2 из последнего уравнения (21). Получаем выражение

$$\Psi_2 = -\frac{xy^2}{2\ell} + C_1(y) + C_2(x).$$

Здесь $C_1(y)$ и $C_2(x)$ есть произвольные функции одного переменного, y или x соответственно.

Определяя $\alpha(y)$ и $\beta(x)$ из второго уравнения (21), получаем

$$\alpha(y) = \frac{p_0}{2} - \frac{C_1''(y)}{2} + \frac{\mathrm{Re}^2}{8\ell^2}\left(1-y^2\right)^2, \qquad \beta(x) = \frac{p_0}{2} - \frac{x}{2\ell} - \frac{C_2''(x)}{2}.$$

Убеждаемся, что первое из (21) также выполнено. Таким образом, в случае решения (19) все соотношения (2□10) удовлетворены.

5. Пути дальнейшего интегрирования. Соотношения (2–10) есть результат первого интегрирования уравнений (1). Возникает вопрос о возможности дальнейшего (второго) интегрирования. Наиболее очевидный путь следующий. Исключим u, v, w из соотношений (3–7) с помощью (8–10). Получим систему уравнений относительно ассоциированных неизвестных Ψ_i. Основные неизвестные в этой системе уже не фигурируют. Эту систему можно назвать определяющей. Имеем систему пяти нелинейных дифференциальных уравнений с пятнадцатью неизвестными. Превышение числа неизвестных над числом уравнений в данном случае — это благоприятное обстоятельство. Создаются возможности для разного рода моделирования решений и удовлетворения некоторым дополнительным условиям, например, граничным и начальным. Определив с помощью этой системы неизвестные Ψ_i, основные неизвестные u, v, w, p найдутся с помощью соотношений (1) и (7–10).

Другой из возможных путей дальнейшего интегрирования связан со следующим обстоятельством. Рассмотрим нелинейные члены уравнений (3–7). Все они имеют вид u^2, v^2, w^2, uv, uw, vw. Кроме того, в указанных уравнениях присутствуют первые производные u, v, w по пространственным координатам и некоторые правые части, не зависящие от скоростей. Таким образом, каждое из уравнений (3–7) есть аналог уравнения Риккати в частных производных. Для обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати существует достаточно разработанная теория и методы практического решения. Есть основания предполагать, что некоторые положения, хоть и в усложненном варианте, но все же переносятся и на аналоги уравнения Риккати в частных производных. Например, можно полагать, что некоторые варианты таких уравнений разрешаются в квадратурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коптев А. В.* Интегралы уравнений Навье — Стокса // Труды СВМО. Саранск, 2004. № 1. Т. 6. С. 215–225.

2. *Коптев А. В*. Как проинтегрировать уравнения Навье — Стокса // Физическая механика: Межвузовский сборник научных трудов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. Вып. 8. С. 218–226.

3. *Коптев А. В*. Гидродинамические уравнения Эйлера. История и перспективы решения // Математика и ее приложения: Межвузовский сборник научных трудов. СПб.: СПГУВК, 2008. Вып. 1. С. 43–58.

4. *Ладыженская О. А*. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

5. *Лойцянский. Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 833 с.

6. *Хаппель Дж., Времмер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

REFERENCES

1. *Koptev A. V.* Integraly uravnenij Nav'e — Stoksa // Trudy SVMO. № 1. T. 6. Saransk, 2004. S. 215–225.

2. *Koptev A. V*. Kak prointegrirovat' uravnenija Nav'e — Stoksa // Fizicheskaja mehanika: Mezhvuzovskij sbornik nauchnyh trudov. SPb.: Izd-vo SPbGU, 2004. Vyp. 8. S. 218–226.

3. *Koptev A. V*. Gidrodinamicheskie uravnenija Ejlera. Istorija i perspektivy reshenija || Matematika i ej prilozhenija: Mezhvuzovskij sbornik nauchnyh trudov. SPb.: SPGUVK, 2008. Vyp. 1. S. 43–58.

4. *Ladyzhenskaja O. A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti. M.: Nauka, 1970. 288 s.

5. *Lojcjanskij. L. G.* Mehanika zhidkosti i gaza. M.: Nauka, 1987. 833 s.

6. *Happel' Dzh., Vremmer G.* Gidrodinamika pri malyh chislah Rejnol'dsa. M.: Mir, 1976. 630 s.