МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН

А. В. Ляпцев

«КВАНТОВАНИЕ» В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Теоретически исследуются качественные особенности нелинейной динамической системы, полученные в ходе численного эксперимента. В качестве простейшей системы предлагается частица, находящаяся под воздействием периодической силы, причем движение частицы ограничено упругими стенками. Показано, что качественные особенности движения — смена регулярных периодических движений и динамического хаоса при адиабатическом изменении параметров — происходит вследствие смены устойчивости подобных периодических движений. Периодическое движение оказывается устойчивым вблизи определенных значений параметра, характеризующего внешнее воздействие, что проявляется подобно квантованию в задачах квантовой механики.

Ключевые слова: нелинейная динамика, динамический хаос, устойчивость движения.

A. Liapzev

«Quantization» in Problems of Nonlinear Dynamics. The Numerical Experiment and Interpretation

The qualitative features obtained during numerical experiment on nonlinear dynamic system are theoretically investigated. As a simple system, a particle is suggested which is under the influence of periodic force and the motion of which is limited by elastic walls is offered. It is shown that qualitative features of motion — replacement of regular periodic motion by dynamic chaos during adiabatic change of parameters — occur owing to the change of stability of the periodic motions. Periodic motion appears to be steady when the parameter characterizing external influence is near certain values. This effect is similar to quantization in problems of quantum mechanics.

Keywords: nonlinear dynamics, dynamic chaos, stability of motion.

Задачи нелинейной динамики в последнее время становятся весьма актуальными, чему свидетельствует возрастающее число публикаций по данной теме, включая регулярно издаваемые новые учебные пособия и монографии (см., например, работы [1; 2] и ссылки в приведенных книгах). Несмотря на то, что основные качественные свойства нелинейных систем исследованы довольно давно (см., например, работу [3]), некоторые особенности остаются не выясненными. Большую роль в развитии понимания процессов, происходящих в нелинейных системах, играет численный эксперимент. В ряде случаев численный

эксперимент, подобно реальному эксперименту, позволяет установить некоторые новые качественные особенности исследуемых систем, которые лишь впоследствии получают теоретическое объяснение.

Одна из таких задач с присущими ей качественными особенностями, полученными в ходе численного эксперимента, была описана нами в статьях [4; 5]. В качестве нелинейной системы рассматривался ротатор (жесткий диполь, см. рис. 1), способный вращаться вокруг фиксированной оси и находящийся под воздействием внешнего периодического поля.

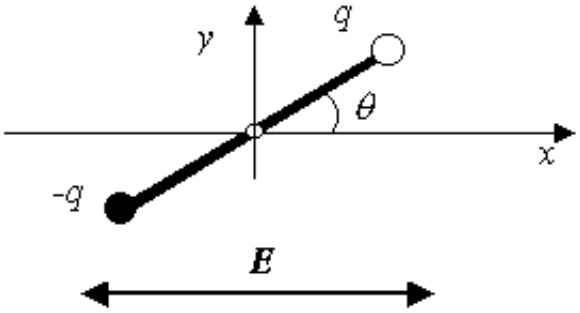

Рис. 1. Ротатор во внешнем периодическом поле

При гармоническом внешнем воздействии уравнение движения ротатора может быть приведено к виду

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} = f \sin\theta \cos t, \tag{1}$$

где параметр γ характеризует диссипацию в системе (силы вязкого трения), а параметр f — амплитуду внешнего поля. Характерные качественные особенности движения данной системы связаны с изменением вида движения при медленном изменении амплитуды внешнего поля. Именно периодические решения, имеющие место при некоторых значениях параметра f, сменялись хаотическим движением при других значениях этого параметра. Наблюдались также характерные гистерезисные явления — переход между периодическим и хаотическим движением при увеличении и уменьшении значения f происходил при различных значениях этого параметра.

Подобные переходы между упорядоченными временными и пространственными структурами при изменении параметров внешнего воздействия характерны для многих нелинейных систем. В данной задаче интерес представляет то, что значения параметра f образуют «зоны» — интервалы, внутри которых эти значения соответствуют периодическим («разрешенные зоны») или хаотическим («запрещенные зоны») движениям, причем сама структура этих зон имеет некоторый регулярный характер. Численный эксперимент показывает, что значения f_n (n — целое число), соответствующие серединам разрешенных зон, в хорошем приближении зависят от n как n^2.

В работе [4] было показано, что подобное явление аналогично явлению многофотонного резонанса к квантово-механической задаче, описывающей данную систему, когда внешнее поле резонансно с переходом между некоторыми уровнями энергии. Однако причина подобного «квантования» в классической задаче не была раскрыта. Дело в том, что в отсутствие внешнего воздействия движение системы не характеризуется какими-либо дискретными частотами, по отношению к которым мог бы проявляться резонанс. В данной работе мы рассмотрим несколько более общую систему и покажем, что вышеприведенные особенности объясняются следующими фактами:

1) при увеличении значения амплитуды внешнего поля (параметр f) появляются новые периодические решения;

2) эти периодические решения являются устойчивыми («аттракторами»), когда значения f находятся вблизи порогового значения (появление нового решения), и становятся неустойчивыми («репеллерами») при удалении f от порогового значения.

Переход от периодического режима к хаотическому при численном эксперименте связан с изменением характера решения от устойчивого к неустойчивому, поскольку при любом численном эксперименте расчет проводится с некоторой конечной точностью.

Рассмотрим одномерное движение частицы в поле периодической стоячей волны и будем считать, что, помимо поля, на частицу действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости частицы. Уравнение движения частицы может быть приведено к виду:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = fS_x(x/L)S_t(t/T). \qquad (2)$$

В этом уравнении параметр γ характеризует диссипацию, параметр f — величину внешнего воздействия, а S_x и S_t — некоторые периодические функции с периодами L и T соответственно, максимумы модулей которых равны единице. Очевидно, что уравнение (1) является частным случаем уравнения (2), когда периодические функции являются гармоническими. Поскольку любая периодическая функция может быть разложена в ряд Фурье по гармоническим функциям, уравнение (1) получается, если в подобном разложении пренебречь всеми членами разложения, кроме первого, зависящего от времени слагаемого.

Гармонические функции являются одними из простейших периодических функций. Однако в некоторых случаях, и, в частности, для уравнения (2), аналитические исследования, оказывается, удобнее проводить, если одна или обе функции, стоящие в правой части уравнений, представляют собой прямоугольные импульсы (рис. 2). Сдвигом переменных и масштабным преобразованием можно привести подобные функции к виду, когда на интервале от –0,5 до 0,5 функция задается выражением sign(x), а на других интервалах является периодическим продолжением.

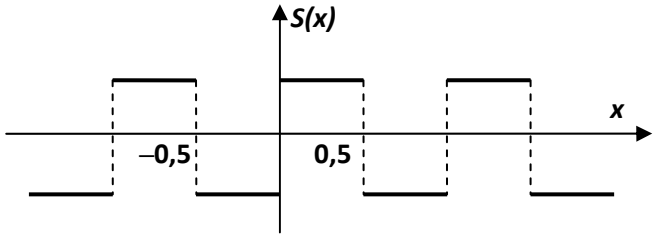

Рис. 2. Периодическая функция из прямоугольных импульсов

Далее мы ограничимся нечетными функциями S_x. К таким функциям сдвигом по времени приводятся гармонические функции, а также функции, изображенные на рис. 2. В этом случае вместо того, чтобы рассматривать движение частицы на всей оси x, можно рассматривать движение частицы лишь на одном полупериоде, то есть на интервале от 0 до $0{,}5L$, считая, что при достижении границ интервала происходит упругое отражение так, что направление скорости изменяется на противоположное. Действительно, пусть частица, двигаясь вдоль оси x, пересекает границу $0{,}5L$. Введем переменную y, отсчитываемую от этой границы влево и равную по модулю значению x–$0{,}5L$:

$$0,5L - y = x - 0,5L.$$

При значениях $x \in [0,5L,\ L]$ значения $y \in [0,\ 0,5L]$, причем при движении частицы влево значение y увеличивается. Заменив переменную x на переменную y, получим уравнение (2) в виде

$$-\ddot{y} - \gamma\dot{y} = fS_x(1 - y/L)S_t(t/T).$$

Учитывая периодичность и нечетность функции S_x, приходим к уравнению, отличающемуся от уравнения (2) лишь обозначениями. Аналогично рассматривается случай перехода через границу $x = 0$. Такое представление оказывается наиболее эффективным в случае прямоугольных импульсов, поскольку при движении частицы от одного соударения со стенкой до другого правая часть уравнения (2) не содержит зависимости от пространственной переменной и в частных случаях, когда функция S_t является гармонической или имеет вид прямоугольных импульсов, уравнение может быть аналитически решено.

Таким образом, далее мы будем рассматривать движение частицы, ограниченное стенками с упругим отражением от них. Сдвигом координаты и масштабным преобразованием можно свести задачу к движению частицы в области, ограниченной значениями $x = \pm 0,5$. Решения уравнения (2) в общем случае могут быть получены только численными методами. Как уже говорилось, решения могут быть периодическими или могут представлять собой хаотические движения. При периодическом движении частица на периоде движения может несколько раз столкнуться с одной стенкой, затем перейти к другой стенке, несколько раз столкнуться с нею и т. д. Число последовательных столкновений с одной стенкой может быть любым, начиная от 0, причем числа столкновений с одной и с другой стенкой могут различаться. Пример, когда функция S_t является гармонической, а функция S_x представляет собой прямоугольные импульсы, приведен на рис. 3.

Левые графики на рисунке представляют собой зависимости координаты, функции S_x и скорости от времени. Правый график — спектр Фурье функции $x(t)$. При периодическом движении отчетливо видны дискретные линии.

Далее мы рассмотрим лишь симметричные относительно замены стенок решения, графики которых симметричны при отражении относительно оси абсцисс и в последующем сдвиге во времени. Мы будем рассматривать три различных случая внешней силы: 1 — функции S_x и S_t — гармонические функции (ротатор); 2 — функция S_t — гармоническая функция, а функция S_x — прямоугольные импульсы; 3 — обе функции S_x и S_t — прямоугольные импульсы. Заметим, что полученные в результате численного эксперимента графики во всех трех случаях имеют одинаковые качественные характеристики, что позволяет, аналитически исследуя наиболее простейший случай, перенести результаты на другие виды. В качестве примеров на рис. 4–6 приведены результаты для периодических решений с двумя последовательными столкновениями с каждой из стенок.

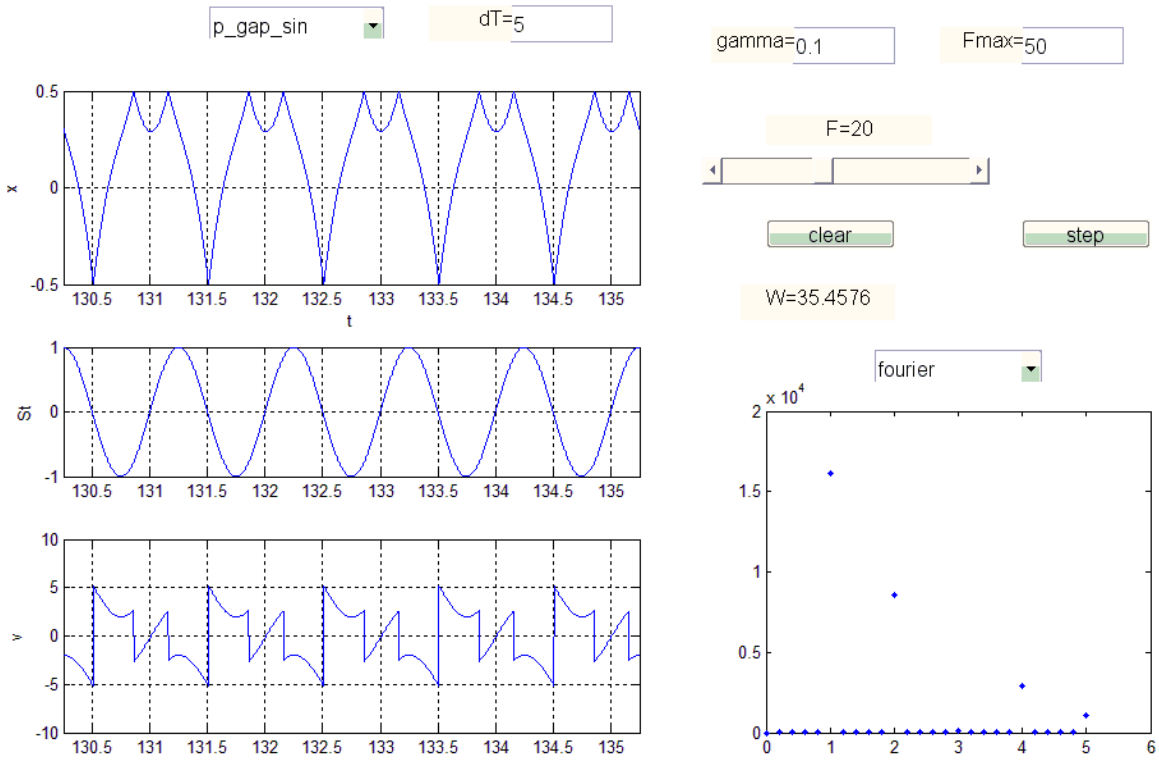

Рис. 3. Численные решения уравнения (2) с гармонической функцией S_t и функцией из прямоугольных импульсов S_x

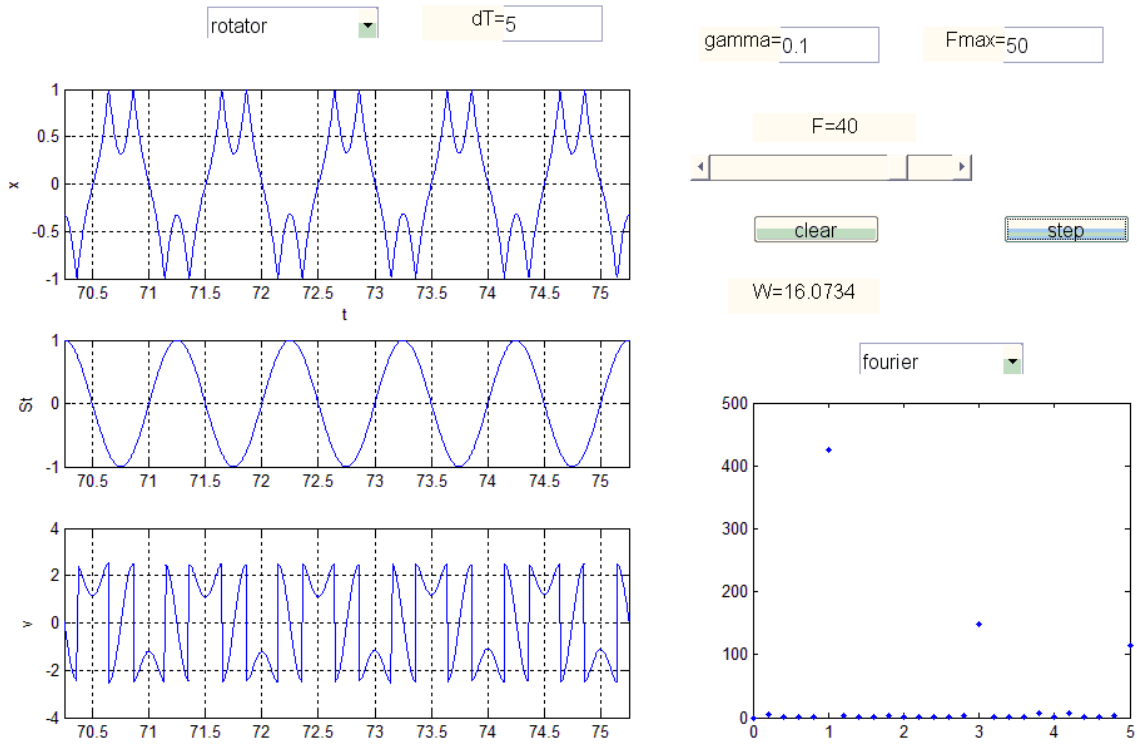

Рис. 4. Численные решения уравнения (2) для ротатора (гармонические функции S_t и S_x)

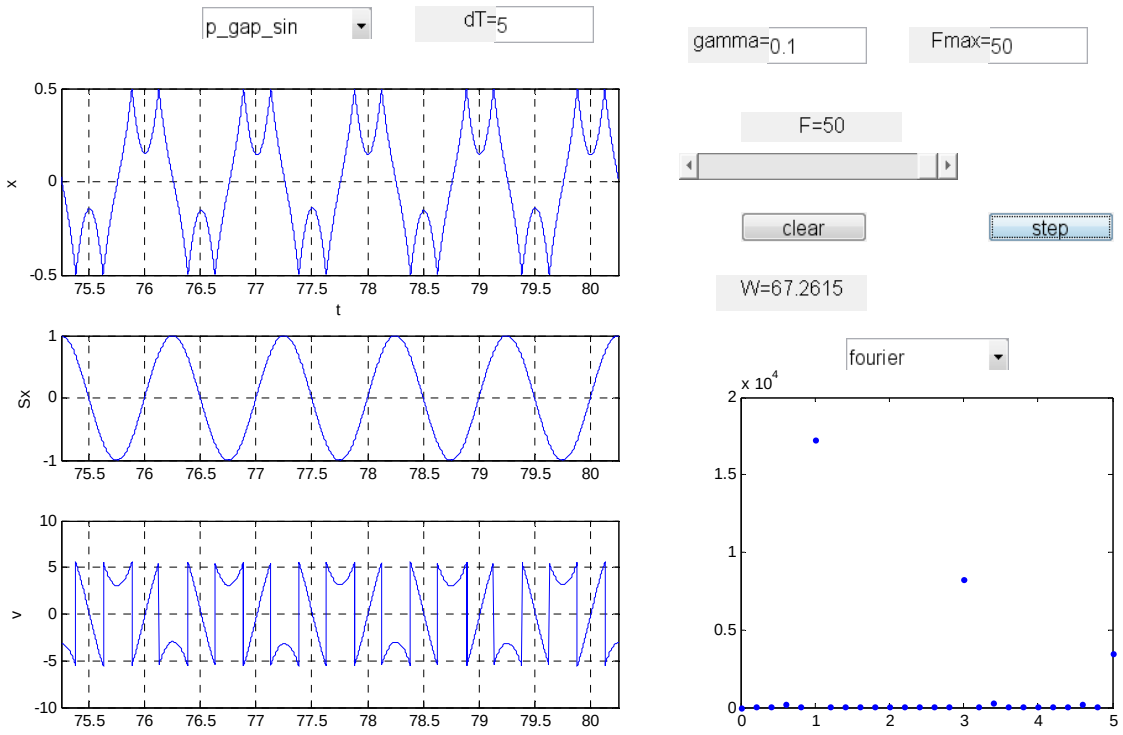

Рис. 5. Численные решения уравнения (2)
с гармонической функцией S_t и функцией из прямоугольных импульсов S_x

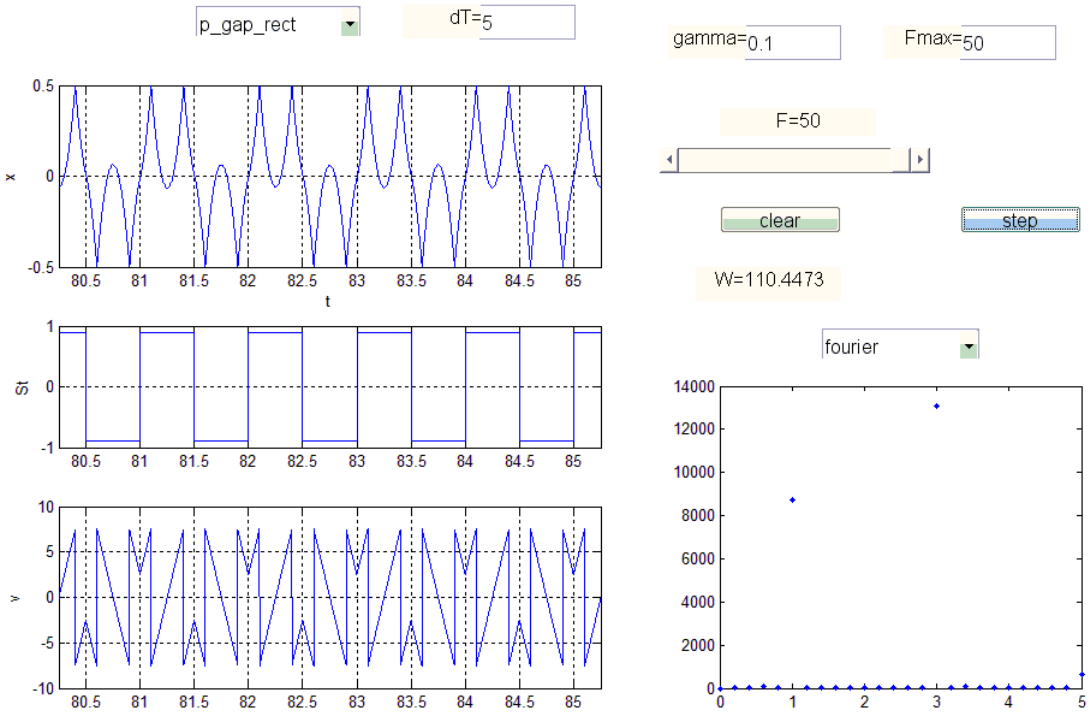

Рис. 6. Численные решения уравнения (2)
с функциями из прямоугольных импульсов S_t и S_x

При малой амплитуде внешней силы f и соответствующем выборе начальных условий (например, $x(0) = 0$, $\upsilon(0) = 0$) после некоторого времени устанавливаются колебания без столкновений со стенками. Соответствующие решения могут быть получены аналитически и представляют собой гармонические колебания в первых двух случаях и в третьем случае — колебания, каждый из полупериодов которого в пределе $\gamma \to 0$ представляет собой параболу. При плавном увеличении параметра f колебания разрастаются по амплитуде. Когда амплитуда становится такой, что частица сталкивается со стенкой, происходит срыв периодического движения с переходом к хаосу и с последующим установлением периодического движения с одним столкновением с каждой из стенок на одном периоде. Первоначально движение во всех трех случаях имеет симметричный вид, однако затем симметрия спонтанно нарушается (рис. 7), и при дальнейшем увеличении значений f происходит срыв периодического движения.

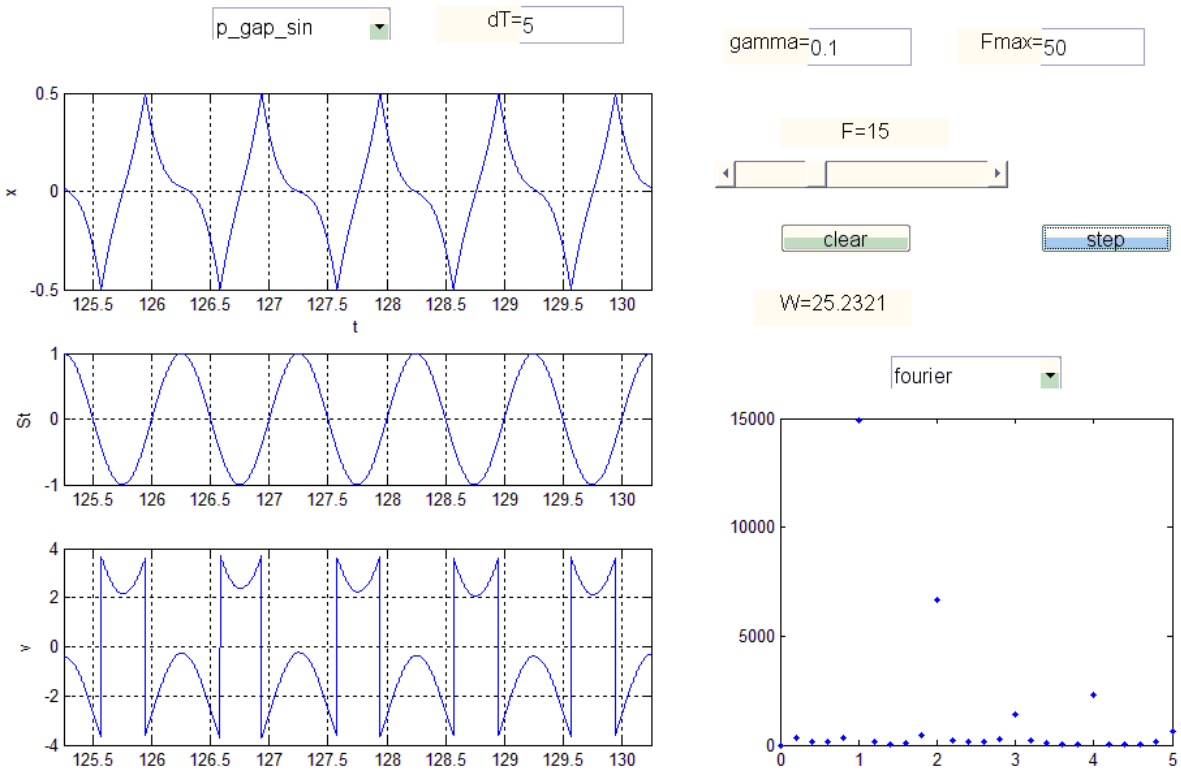

Рис. 7. Численные решения уравнения (2)
с гармонической функцией S_t и функцией из прямоугольных импульсов S_x

Далее при увеличении амплитуды внешней силы f возникают периодические решения с большим числом столкновений со стенками, в том числе и решения, приведенные на рис. 3–6.

Как уже говорилось, для исследования качественных особенностей целесообразно использовать простейшую модель внешней силы. В такой модели функции S_x и S_t задаются прямоугольными импульсами. Но даже в этом случае полное аналитическое исследование удается провести только для симметричного периодического движения, при котором частица испытывает по одному столкновению с каждой из стенок за один временной период.

Для рассматриваемого случая легко получить аналитическое решение на временном интервале между столкновениями со стенками и изменением знака внешней силы. Зависимости скорости и координаты от времени определяются следующими функциями:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + (\sigma f/\gamma - \upsilon_0)(1 - \exp(-\gamma(t - t_0));$$
$$x(t) = x_0 + \sigma f(t - t_0)/\gamma + (\upsilon_0/\gamma - \sigma)(1 - \exp(-\gamma(t - t_0)),$$

где υ_0 и x_0 — скорость и координата в момент времени t_0, а $\sigma = \pm 1$ (знак внешней силы). Используя эти выражения, можно составить две функции от переменных t, υ и x, остающиеся постоянными (инвариантами) на промежутках между столкновениями со стенками и изменением знака внешней силы. В дальнейшем удобно использовать приведенное значение скорости $u = \upsilon/f$. В результате для инвариантов получим выражения

$$F(x,u,t,f) = \gamma x/f + u - \sigma t;$$
$$G(x,u,t) = (u - \sigma/\gamma)\exp(\gamma t). \tag{3}$$

Обозначим через t_0 момент времени столкновения с левой ($x = -0{,}5$) стенкой, а через u_0 — скорости сразу после этого столкновения. За промежуток времени между столкновениями со стенками знак σ изменится один раз. Смена знака происходит в целые или полуцелые моменты времени (рис. 2). Обозначим этот момент времени через $n/2$, где n — целое число. Обозначим координату в этот момент времени через $\tilde{x}$, а скорость — через $\tilde{u}$. Тогда из выражений (3) получим уравнения

$$-\gamma/(2f) + u_0 - \sigma t_0 = \gamma\tilde{x}/f + \tilde{u} - \sigma n/2);$$
$$(u_0 - \sigma/\gamma)\exp(\gamma t_0) = (\tilde{u} - \sigma/\gamma)\exp(\sigma n/2). \tag{4}$$

Обозначим теперь через t_1 момент времени столкновения с правой ($x = 0{,}5$) стенкой, а через u_1 — скорости сразу перед этим столкновением. Учитывая, что на этом промежутке времени знак у параметра σ изменился, получим равенства

$$\gamma\tilde{x}/f + \tilde{u} + \sigma n/2 = \gamma/(2f) + u_1 + \sigma t_1;$$
$$(\tilde{u} + \sigma/\gamma)\exp(\sigma n/2) = (u_1 + \sigma/\gamma)\exp(\gamma t_1). \tag{5}$$

Исключая из равенств (4) и (5) величины $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$, получим систему уравнений, связывающих величины t_0, t_1, u_0, u_1:

$$u_0 - \sigma t_0 = u_1 + \sigma t_1 + \gamma/f - n\sigma;$$
$$(u_0 - \sigma/\gamma)\exp(\gamma t_0) = (u_1 + \sigma/\gamma)\exp(\gamma t_1) - 2\sigma\exp(\gamma n/2)/\gamma. \tag{6}$$

При симметричном решении в уравнениях (6) следует положить $u_1 = u_0$, $t_1 = t_0 + 1/2$, откуда получаются выражения для t_0 и u_0:

$$t_0 = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sigma f}, \quad u_0 = \frac{\sigma}{\gamma}\frac{\left(\exp(\gamma^2/(2\sigma f)) - \mathrm{ch}(\gamma/4)\right)}{\mathrm{sh}(\gamma/4)}. \tag{7}$$

Знак σ и значения n в этих выражениях взаимосвязаны. При положительных значениях σ значение n нечетно, а при отрицательных σ значение n четно. Из формул (7) следует, что возможны и то и другое решения. Однако требование $u_0 > 0$ (частица от левой стенки движется вправо) при положительном значении σ дает ограничение на значение параметра f:

$$f < \frac{\gamma^2}{2\ln(\mathrm{ch}(\gamma/4))}. \tag{8}$$

При отрицательном значении σ решение существует при любом значении f.

Для выяснения устойчивости используем построение, аналогичное построению сечений Пуанкаре при рассмотрении нелинейной динамики [2]. Предположим, что в момент столкновения с левой стенкой значение времени отличается от значения t_0 на малое значение Δt_n, а значение скорости отличается от значения u_0 на малую величину Δu_n. Вычислим отклонения от «правильных» значений при последующем столкновении с правой стенкой, соответствующие величины обозначим через Δt_{n+1} и Δu_{n+1}. Используя уравнения (6), получим

$$\begin{gathered}\Delta u_n - \sigma\Delta t_n = \Delta u_{n+1} + \sigma\Delta t_{n+1};\\ \Delta u_n + (\gamma u_0 - \sigma)\Delta t_n = \Delta u_{n+1}\exp(\gamma/2) + (\gamma u_0 + \sigma)\exp(\gamma/2)\Delta t_{n+1}.\end{gathered} \tag{9}$$

Систему уравнений (9) удобно переписать в матричном виде. Для этого введем векторы $\mathrm{Y}^{(m)}$ с компонентами:

$$\begin{gathered}y_1^{(m)} = \Delta t_m;\\ y_2^{(m)} = \Delta u_m.\end{gathered} \tag{10}$$

В результате уравнения (8) принимают вид

$$\mathbf{B}_0\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{B}_1\mathbf{Y}^{(n+1)}, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} -\sigma & 1 \\ \gamma u_0 - \sigma & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ (\gamma u_0 + \sigma)\exp(\gamma/2) & \exp(\gamma/2) \end{pmatrix}.$$

Обращая матрицу B_1, систему уравнений (11) можно переписать в виде

$$\mathbf{Y}^{(n+1)} = \mathbf{M}\mathbf{Y}^{(n)}, \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{M} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} a(1-g)+g & -\sigma a(1-g) \\ -\sigma(1+g+a(1-g)) & 1+a(1-g) \end{pmatrix},\\ a = \frac{\sigma}{\gamma u_0}, \qquad g = \exp(-\gamma/2).\end{gathered} \tag{13}$$

Уравнение (12) позволяет ответить на вопрос об устойчивости решения, определяемого соотношениями (7). Если матрица M такова, что норма вектора Y на каждом шаге уменьшается, то есть $\left\|\mathbf{Y}^{(n+1)}\right\| < \left\|\mathbf{Y}^{(n)}\right\|$, то незначительное отклонение в начальный момент времени при столкновении со стенкой становится меньше при каждом последующем столкновении, и движение является устойчивым. В противном случае решение не является устойчивым. Для выяснения свойств матрицы **M** удобно вместо векторов $Y^{(n)}$ ввести векторы $\mathbf{Z}^{(n)}$:

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{P}\mathbf{Z}^{(n)},$$

так что преобразование P диагонализует матрицу M:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |m_1| & 0 \\ 0 & |m_2| \end{pmatrix}\mathbf{U},$$

где **U** — унитарная матрица. Поскольку унитарная матрица не меняет нормы векторов $\mathbf{Z}^{(n)}$, устойчивость определяется абсолютными величинами собственных значений матрицы **M**. Именно: если оба значения $|m_1|$ и $|m_2|$ меньше единицы, решение является устойчивым, в противном случае — неустойчивым.

Для собственных значений матрицы **M** несложно получить выражения

$$m_{1,2} = -s\sqrt{s^2 - g}, \tag{14}$$

где

$$s = \mathrm{sp}(\mathbf{M})/2 = a(1-g) + (1+g)/2, \quad \det(\mathbf{M}) = g. \tag{15}$$

Из формул (15) видно, что детерминант матрицы M, определяющий произведение собственных значений, не зависит от амплитуды внешнего воздействия f, в то время как шпур матрицы зависит от f.

Условие на значение s, при котором максимальное из значений $|m|$ меньше единицы, легко понять из графиков характеристического полинома $p(m) = m^2 - 2sm + g$, построенных для различных значений s. На рис. 8 приведены графики для значения g = 0,1. При s = 0 (парабола 1) собственные значения (корни полинома $p(m)$) совпадают и являются мнимыми, так, что $|m_1| = |m_2| = \sqrt{g}$. При увеличении значения s (парабола 2) собственные значения — комплексно сопряженные с тем же модулем. При $s^2 = g$ собственные значения становятся вещественными и равными значению $\sqrt{g}$ (парабола 3). При дальнейшем увеличении значения s одно из собственных значений уменьшается, а другое — увеличивается (парабола 4). Когда максимальное собственное значение достигает единицы, минимальное становится равным g (парабола 5). При этом значение s становится равным полусумме собственных значений, то есть $s = (1 + g)/2$.

Аналогичные рассуждения можно провести для отрицательных значений параметра s. В результате получим, что максимальное из абсолютных величин собственных значений не превосходит единицы при условии

$$s \in (-(1+g)/2,\ (1+g)/2). \tag{16}$$

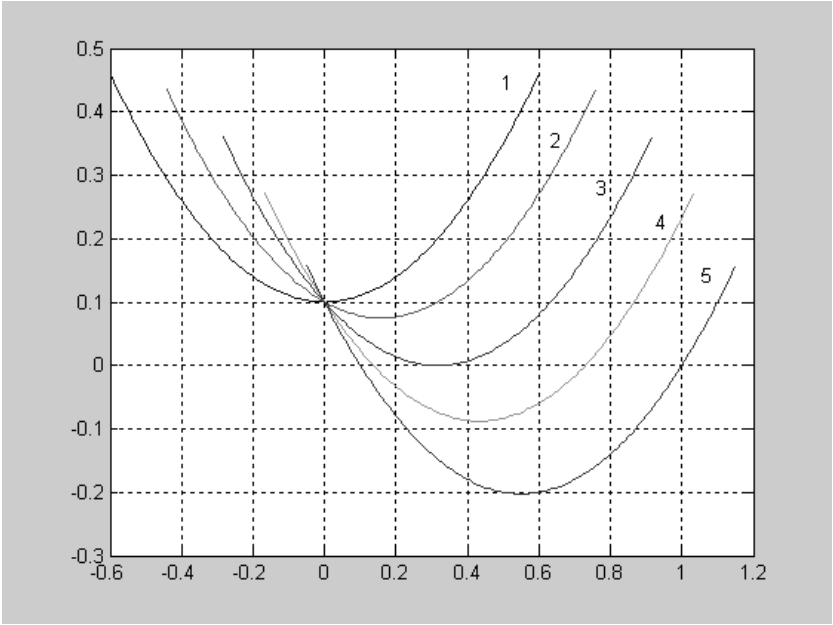

Рис. 8. Графики характеристического полинома при различных значениях параметра *s*

Соотношение (16) и есть условие устойчивости решения. Пользуясь формулами (15), это условие можно переписать для параметра *a*:

$$a \in \left(-\frac{1+g}{1-g}, 0 \right). \tag{17}$$

Из формулы (17) следует, что устойчивое решение может быть только при отрицательном значении параметра *a*, а следовательно, — при отрицательном значении параметра σ, то есть при четных значениях *n*. Ограничение снизу на параметр *a*, определяемое формулой (17), приводит к ограничению на значение параметра *f*, даваемое неравенством (8):

$$f < f_{\max} = \frac{\gamma^2}{2\ln(\mathrm{ch}(\gamma/4))}.$$

Заметим, что при $\gamma \to 0$ существует конечный предел, при котором $f_{\max} = 16$, что реализуется при вычислительном эксперименте.

Аналогичные вычисления могут быть проведены и для случая, когда внешнее воздействие осуществляется гармонической по времени силой. В этом случае симметричное решение при одном столкновении со стенкой на периоде действия силы также является устойчивым при выполнении ограничения на значение параметра *f*:

$$f < \frac{\omega^2}{2}\sqrt{\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2}, \tag{18}$$

где ω — частота внешней силы, а параметр ξ выражается через ω и γ:

$$\xi = \frac{(1+\exp(-\gamma\pi/\omega))\gamma^2}{2(\omega^2+\gamma^2)(1-\exp(-\gamma\pi/(2\omega)))^2}. \qquad (19)$$

При $\omega = 2\pi$ (период внешней силы равен единице) в пределе $\gamma \to 0$ выражения (18) и (19) дают численное значение, ограничивающее значение f:

$$f < f_{\max} \approx 13{,}4.$$

Исследование устойчивости других симметричных периодических движений, для которых число последовательных столкновений с каждой из стенок больше единицы, не может быть проведено аналитически при конечном значении γ даже в простейшем случае внешней силы (прямоугольные импульсы), поскольку не удается получить аналитические выражения для подобных решений. Однако в предельном случае $\gamma \to 0$ соответствующие решения могут быть получены. Заметим, что на полупериоде, когда значение внешней силы остается неизменным, ускорение при $\gamma = 0$ постоянно, а значит, графики скоростей представляют собой отрезки прямых. На рис. 9 изображены графики скорости, деленной на f на периоде изменения силы. Скачки скорости происходят в моменты столкновений со стенками (на рисунке — по три столкновения с каждой из стенок). При симметричных периодических движениях величины τ_1 и τ_2 совпадают, при этом значение τ_1 лежит в интервале от 0 до τ.

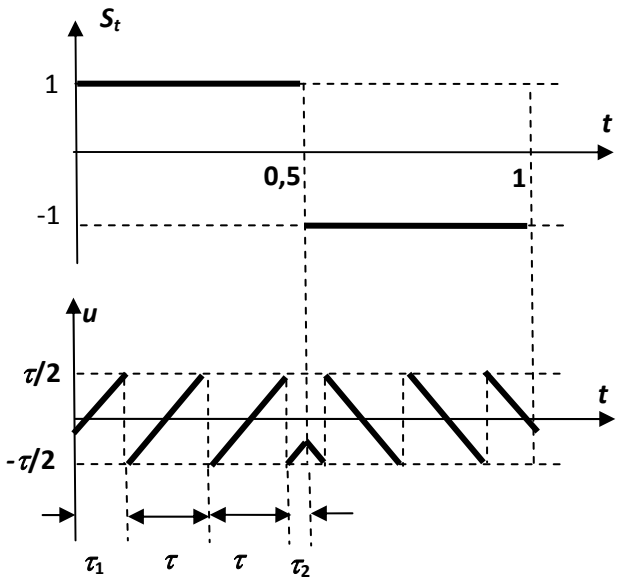

Рис. 9. График скорости в сравнении с графиком функции S_t

Для симметричного периодического решения из рис. 9 следует очевидное равенство

$$(k-1)\tau + 2\tau_1 = 1/2,$$

где k — число последовательных столкновений с каждой из стенок.

За время $2\tau_1$ частица проходит расстояние между стенками, равное 1. Соответствующее значение легко вычисляется по графику скорости на рисунке:

$$f\tau_1(\tau - \tau_1) = 1.$$

Из этих выражений получается значение f_k, соответствующее k последовательным столкновениям с каждой из стенок:

$$f_k = \frac{1}{\tau_1(\tau - \tau_1)} = \frac{k-1}{(k+1)\tau_1\left(\frac{1}{2(k-1)} - \tau_1\right)}..$$

Простой анализ показывает, что значение f_k стремится к бесконечности на границах допустимого интервала для τ_1 и достигает минимума при

$$\tau_1 = \frac{1}{4(k-1)},$$

равного:

$$f_{k\min} = 16(k^2 - 1). \qquad (20)$$

Заметим, что зависимость от k, близкая к квадратичной, наблюдается и при численном эксперименте с гармонической внешней силой [4].

Таким образом, симметричные периодические решения, соответствующие k последовательным столкновениям с каждой из стенок, начинаются с нижней границы для f и существуют при любых значениях f больше порогового значения. Вычислительный эксперимент действительно дает срыв периодических решений при уменьшении параметра f ниже значений, определяемых формулой (20), однако и при повышении значения f над порогом периодические решения либо становятся несимметричными, либо «срываются» в хаотические движения. Эта особенность может быть объяснена тем, что подобные решения при повышении значения f становятся неустойчивыми.

Для исследования устойчивости рассмотрим случай симметричного периодического движения с k последовательным столкновениям с каждой из стенок. Рассмотрим столкновения m и m+1 с одной и той же стенкой. Пусть u_m — приведенная скорость сразу после столкновения m, а u_{m+1} — приведенная скорость сразу после столкновения m+1. Моменты времени, соответствующие столкновениям, обозначим через t_m и t_{m+1}. Тогда, используя инварианты (3), соотношения:

$$\mathbf{Y}^{(m+1)} = \mathbf{D}^{(m)}\mathbf{Y}^{(m)}, \qquad (21)$$

где $\mathbf{Y}^{(m)} = \begin{pmatrix} \Delta t_m \\ \Delta u_m \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}^{(m)} = \mathbf{R}\left(\mathbf{B}^{(m+1)}\right)^{-1}\mathbf{B}^{(m)}$,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{P}^{(m)}\mathbf{Q}^{(m)}, \mathbf{P}^{(m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp(\gamma t_m) & \exp(\gamma t_m) \end{pmatrix}, \mathbf{Q}^{(m)} = \begin{pmatrix} -S(t_m) & 1 \\ \gamma u_m & 0 \end{pmatrix},$$

$S(t)$ — функция, определяющая знак внешней силы (см. рис. 2). Матрица R появляется вследствие того, что после столкновения со стенкой скорость изменяется на противоположную.

Пусть индекс $m = 1$ соответствует первому столкновению с левой стенкой, а индекс $m = k$ — последнему столкновению с этой стенкой, тогда имеет место соотношение

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{D}^{(k-1)}\mathbf{D}^{(k-2)}...\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{Y}^{(1)}. \tag{22}$$

Пусть теперь t_{k+1} — момент первого столкновения с противоположной правой стенкой (при симметричном периодическом решении $t_{k+1} = t_1 + 1/2$), u_{k+1} — скорость в этот момент времени (при симметричном периодическом решении $u_{k+1} = -u_1$). Эти величины связаны величинами t_k и u_k соотношениями, аналогичными (6):

$$\begin{gathered} u_k - S(t_k) = u_{k+1} - S(t_{k+1}) + \gamma / f - n\theta, \\ (u_k - S(t_k))/\gamma)\exp(\gamma t_k) = (u_{k+1} - S(t_{k+1}))/\gamma)\exp(\gamma t_{k+1}) - 2\theta\exp(\gamma n/2)/\gamma, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\theta = 1$ в случае, когда на интервале (t_k, t_{k+1}) происходит смена знака внешней силы, и 0 — в противоположном случае. Будем теперь считать, что величины t_k, t_{k+1}, u_k, u_{k+1}, а также f могут изменяться вблизи значений, соответствующих симметричным периодическим решениям. Тогда из равенств (24) получим:

$$\mathbf{B}^{(k)}\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k+1)}\mathbf{R}\mathbf{Y}^{(k+1)} - \frac{\gamma\Delta f}{f^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

С учетом соотношений (21), (22) находим

$$\mathbf{Y}^{(k+1)} = \mathbf{M}\mathbf{Y}^{(1)} + \mathbf{R}\left(\mathbf{B}^{(k+1)}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{\gamma}{f^2}\Delta f, \tag{24}$$

где

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^{(k)}\mathbf{D}^{(k-1)}\mathbf{D}^{(k-2)}...\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{D}^{(1)}.$$

Соотношение (24) можно интерпретировать различным образом. Если величину f считать постоянной, то мы получаем соотношение, аналогичное (12). Матрица M при этом определяет устойчивость решений: решения устойчивы, если модули собственных значений этой матрицы не превосходят единицы. Заметим, что найти собственные значения можно лишь численно, однако их произведение, равное определителю матрицы M, легко находится в явном виде. Действительно, из того, что

$$\det(\mathbf{R}) = -1,\ \det(\mathbf{P}^{(m)}) = \exp(\gamma t_m),\ \det(\mathbf{Q}^{(m)}) = -\gamma u_m,$$

следует

$$\det(\mathbf{D}^{(m)}) = \frac{u_m}{u_{m+1}}\exp(\gamma(t_m - t_{m+1}))$$

и

$$\det(\mathbf{M}) = (-1)^k\frac{u_1}{u_2}\frac{u_2}{u_3}...\frac{u_k}{u_{k+1}}\exp(\gamma(t_1 - t_{k+1}) = (-1)^{k+1}\exp(-\gamma/2), \tag{25}$$

где мы учли соотношения $t_{k+1} = t_1 + 1/2$ и $u_{k+1} = -u_1$.

Можно рассмотреть равенство (24) иначе, т. е. считать, что величины t_1 и u_1 соответствуют точному решению при заданном значении f_k и исследовать, какому изменению Δf соответствует малое изменение значения t_1. Тогда в равенстве (24) следует положить $\mathrm{Y}^{(k+1)} = \mathrm{Y}^{(1)}$, в результате чего получим

$$\mathbf{R}\left(\mathbf{B}^{(k+1)}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{\gamma}{f_k^2}\Delta f_k = (\mathbf{E}-\mathbf{M})\mathbf{Y}^{(1)}, \tag{26}$$

где E — единичная матрица. Из системы уравнений (26) легко находится производная $\partial f_k / \partial t_1$. Ранее было показано, что функция $f_k(t_1)$ имеет минимум для каждого из симметричных периодических решений. В точке минимума $\Delta f_k = 0$, и из уравнения (26) следует равенство

$$(\mathbf{M}-\mathbf{E})\mathbf{Y}^{(1)} = 0. \tag{27}$$

Равенство (27) означает, что вектор $Y^{(1)}$ является собственным вектором матрицы M, соответствующим единичному собственному значению. Из соотношения (25) следует, что модуль второго собственного значения матрицы M меньше единицы. Таким образом, значения t_1, при которых функция $f(t_1)$ достигает минимума, а также значения $f_{k\min}$ соответствуют устойчивому решению. Численные расчеты показывают, что существуют некоторые области значений f вблизи минимальных значений $f_{k\min}$, в которых решения также являются устойчивыми.

Заметим, что полученные выводы могут быть перенесены на другие случаи, о которых говорилось выше (различная форма периодических функций S_x и S_t), поскольку, как несложно показать, во всех этих случаях периодические решения, при которых скорость в некоторый момент времени обращается в ноль, могут иметь место только при значениях параметра f, превосходящих некоторые пороговые значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аврамов К. В., Михлин Ю. В.* Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления. М., 2010. Т. 1.

2. *Гритченко В. Т., Маципура В. Т., Снарский А. А.* Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

3. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.

4. *Кондратьев А. С., Ляпцев А. В.* Динамический хаос в механических и оптических системах // Известия РГПУ им А. И. Герцена. 2006. № 6 (15). С. 262–273.

5. *Кондратьев А. С., Ляпцев А. В.* Вычислительный эксперимент в задачах нелинейной динамики // Компьютерные инструменты в образовании. № 3. 2010. С. 39–44.

REFERENCES

1. *Avramov K. V., Mihlin Ju. V.* Nelinejnaja dinamika uprugih sistem. Modeli, metody, javlenija. M., 2010. T. 1.

2. *Gritchenko V. T., Matsipura V. T., Snarskij A.A.* Vvedenie v nelinejnuju dinamiku: Haos i fraktaly. M.: Izd-vo LKI, 2007.

3. *Zaslavskij G. M., Sagdeev R. Z.* Vvedenie v nelinejnuju fiziku: Ot majatnika do turbulentnosti i haosa. M.: Nauka, 1988. 368 s.

4. *Kondrat'ev A. S., Ljaptsev A. V.* Dinamicheskij haos v mehanicheskih i opticheskih sistemah. // Izvestija RGPU im. A. I. Gertsena. № 6 (15). 2006. S. 262–273.

5. *Kondrat'ev A. S., Ljapcev A. V.* Vychislitel'nyj eksperiment v zadachah nelinejnoj dinamiki // Komp'juternye instrumenty v obrazovanii. 2010. № 3. S. 39–44.