REFERENCES

1. *Bolotov A. A., Gashkov S. B., Frolov A. B.* Elementarnoe vvedenie v jellipticheskuju kriptografiju: Protokoly kriptografii na jellipticheskih krivyh. M.: KomKniga, 2006. S. 76–81.
2. *Glusko K. L., Titov S. S.* Normal'nye bazisy i derevo kvadratichnyh rasshirenij binarnyh polej // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija: Materialy nauchnoj konferencii «Gercenovskie chtenija — 2012». SPb.: BAN, 2012. S. 221–226.
3. *Glusko K. L., Titov S. S.* Reshenie kvadratnyh uravnenij v konechnyh poljah harakteristiki dva // Problemy teoreticheskoj i prikladnoj matematiki: Trudy 43-j Vserossijskoj molodezhnoj konferencii. Ekaterinburg: UrO RAN, 2012. S. 23–25.
4. *Glusko K. L., Titov S. S.* Specifika problem svjazi i upravlenija na transporte // Innovacionnyj transport. Ekaterinburg: Izd-vo UrGUPS. 2012. № 2 (3). S. 44–50.
5. *Demkina O. E., Titov S. S., Torgashova A. V.* Rekurrentnoe vychislenie neprivodimyh mnogochlenov v zadachah dvoichnogo kodirovanija // Molodye uchenye — transportu: Trudy IV nauchno-tehnicheskoj konferencii. Ekaterinburg: Izd-vo UrGUPS, 2003. S. 391–404.
6. *Logachev O. A., Sal'nikov A. A., Jawenko V. V.* Bulevy funkcii v teorii kodirovanija i kriptologii. M.: MCNMO, 2004. S. 41–53.
7. *Parshin A. V.* Klassicheskij protokol paketnoj kommutacii: Monografija. Ekaterinburg: Izd-vo UrGUPS, 2007. 242 s.
8. *Rozhnev A. Ju.* Teorija zapretov mnogobitovyh funkcij i ee primenimost' v sistemah svjazi na zheleznodorozhnom transporte // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija. 2012. № 2; URL: www.science-education.ru/102-5849.
9. *Sergeev I. S.* O realizacii nekotoryh operacij v konechnyh poljah shemami logarifmicheskoj glubiny: Avtoref. dis. … kand. fiz.-mat. nauk. M., 2007. 96 s.
10. *Titov S. S., Torgashova A. V.* Generacija neprivodimyh mnogochlenov, svjazannyh stepennoj zavisimost'ju kornej // Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravlenija i radiojelektroniki. 2010. N 2 (22). Ch. 1. S. 310–318.
11. *Biryukov A., Shamir A., Wagner A.* Real Time Cryptanalysis of A5/1 on a PC. Fast Software Encryption Workshop. 2000. April 10–12. P. 1–18.
12. *Koblitz N.* Hyperelliptic cryptosystems // Journal of cryptology. 1989. N 1. P. 139–150.
13. *Koblitz N.* Algebraic aspects of Cryptography: Springer. 2004. 109 p.
14. *Menezes A. J., Vanstone S.* Elliptic Curve Cryptosystems and their implementation // Journal of Cryptology. 1993. N 6. P. 209–224.
15. *Rosing M.* Implementing Elliptic Curve Cryptography. Greenwich: Manning Publication, 1998. 338 p.

А. В. Коптев

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Рассматриваются уравнения Навье — Стокса для движения вязкой несжимаемой жидкости. Предлагается процедура аналитического построения решений на основе первого интеграла уравнений и уравнения Риккати в частных производных. Построены некоторые новые решения, представляющие практический интерес.

Ключевые слова: частная производная, дифференциальное уравнение, движение, жидкость, интеграл, вязкость, вихрь.

A. Koptev

METHOD OF SOLUTION CONSTRUCTION FOR NAVIER — STOKES EQUATIONS

Navier — Stokes equations for viscose incompressible fluid flow are under the consideration. Analytical solution method is suggested. The method is based on the first integral of Navier-Stokes equations and Riccati partial differential equations. New solutions of Navier — Stokes equations have been constructed.

Keywords: partial derivative, differential equation, motion, fluid, integral, viscosity, vortex.

Введение

Уравнения Навье — Стокса — это известный тип нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые описывают движение жидких и газообразных сред при наличии вязкости. Они представляют и чисто математический интерес, и имеют многочисленные приложения к практическим задачам.

Для простейшего случая 2D установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости безразмерный вариант уравнений Навье — Стокса может быть представлен в следующем виде:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{3}$$

Здесь u, v, p — основные неизвестные, скорости и давление; Φ — потенциал внешних сил, заданная функция; Re — число Рейнольдса, положительный параметр.

Отличительной особенностью уравнений Навье — Стокса является наличие нелинейных членов, что значительно усложняет исследование и решение.

Сегодня многие вопросы изучены недостаточно и требуют дополнительного исследования. Нет общего метода решения и нет общего подхода к решению как самих уравнений Навье — Стокса, так и граничных и начальных задач для них. Нет окончательного решения проблемы существования [6, 7]. Недостаточно изучены свойства гладкости решения, нет четкого представления об асимптотике решения при $\mathrm{Re}\to+\infty$.

Нерешенных математических проблем, связанных с уравнениями Навье — Стокса, множество. Их сложность оценена по достоинству. Математический институт Клэя (Clay Mathematical Institute, USA) определил изучение уравнений Навье — Стокса как одну из семи основных проблем третьего тысячелетия [8].

Несмотря на все сложности уравнения Навье — Стокса интенсивно изучаются. И попытки общего исследования уравнений имели место.

В частности, в работах [3, 4] показано, что для случая несжимаемой жидкости уравнения Навье — Стокса допускают интеграл. Этот результат имеет место в общем случае, без каких-либо дополнительных допущений о граничных и начальных условиях, характере области, значении числа Рейнольдса и других предположениях частного характера.

Дальнейшее интегрирование

Для некоторых случаев соотношения, представляющие первый интеграл, допускают повторное интегрирование. В частности, это справедливо применительно к случаю 2D установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости.

Попытаемся проанализировать пути дальнейшего интегрирования и построения решений для этого случая.

Первый интеграл уравнений (1)–(2), соответствующих указанному случаю, представляет три соотношения. Они связывают основные неизвестные *u, v*, *p*, ассоциированное неизвестное Ψ_2 и произвольные аддитивные функции одного переменного [3].

В безразмерных переменных эти соотношения можно представить в виде

$$p = -\Phi - \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2}\right) + \alpha(y) + \beta(x), \tag{4}$$

$$u^2 - v^2 - \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + 2\left(\alpha(y) - \beta(x)\right), \tag{5}$$

$$uv - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial y}, \tag{6}$$

где Ψ_2 — ассоциированное неизвестное; $\alpha(y)$, $\beta(x)$ — произвольные функции одного переменного, *y* или *x* соответственно.

К этим соотношениям следует добавить уравнение неразрывности (3) и произвести интегрирование, рассматривая (3)–(6) как систему дифференциальных уравнений относительно *u*, *v*, *p*, Ψ_2.

Анализ уравнений (3)–(6) приводит к выводу, что определяющую систему фактически образуют только три уравнения, а именно уравнения (3) и (5)–(6). Эти три уравнения определяют функции *u*, *v*, Ψ_2. Неизвестное *p* фигурирует в соотношении (4) аддитивно, и оно легко находится из (4), если найдены *u, v,* Ψ_2.

Рассмотрим определяющую систему (3), (5)–(6). Обращает на себя внимание следующее обстоятельство. В уравнениях (5)–(6) присутствуют квадратически нелинейные члены u^2, v^2, $u \cdot v$ вместе с первыми производными скоростей по координатам и некоторыми другими величинами, не зависящими от *u* и *v*.

Можно констатировать, что относительно *u* и *v* уравнения (5)–(6) представляют аналоги уравнения Риккати в частных производных.

Уравнения Риккати — это хорошо изученный тип обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$f' + r_1(x) \cdot f + r_2(x) \cdot f^2 + r_3(x) = 0, \tag{7}$$

где $f(x)$ — неизвестное, $r_i(x)$ — заданные коэффициенты.

Для (5)–(6) также имеем уравнения типа (7), но с частными производными, и неизвестные представляют уже функции двух переменных.

Уравнение Риккати (7) обладает многими примечательными свойствами. В частности, эти уравнения допускают решение в квадратурах при некоторых определенных значениях коэффициентов [2].

Логично предположить, что аналогичное свойство, пусть и в модернизированном варианте, также имеет место и для аналога уравнения Риккати в частных производных. Примем эту гипотезу за основу и попытаемся исходя из этого проинтегрировать систему (3), (5)–(6) и построить некоторые новые решения уравнений Навье — Стокса.

Уравнения (5)–(6) удобно рассматривать совместно, если ввести комплексную скорость $U = u - iv$, как функцию комплексного переменного $z = x + iy$ [5].

При таком подходе для неизвестных u и v должны выполняться условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

Первое из этих условий совпадает с уравнением неразрывности (3), и это уравнение в дальнейшем будет выполнено автоматически.

Преобразуем уравнения (5)–(6) в комплексных переменных. Для удобства дальнейшего исследования умножим уравнение (6) на $-2i$. Это уравнение примет вид

$$-2i \cdot uv + \frac{2i}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2i\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial y}. \tag{9}$$

Положим также в (4)–(5) для простоты $\alpha(y) = \frac{p_0}{2}$ и $\beta(x) = \frac{p_0}{2}$, где p_0 — аддитивная постоянная давления.

Обратим внимание на следующую закономерность. Все члены уравнений (5) и (9), рассмотренные попарно, по одному из каждого уравнения, представляют вещественную и мнимую части некоторой функции комплексного переменного.

Рассмотрим нелинейные члены уравнений (5) и (9). Они представляют соответственно вещественную и мнимую части функции $U^2(z)$. Это справедливо на основании равенства

$$U^2 = u^2 - v^2 - 2i \cdot uv. \tag{10}$$

Рассмотрим далее члены уравнений (5), (9), содержащие первые производные u и v. Предварительно найдем $\frac{dU}{dz}$ как функции комплексного переменного. Справедливы равенства

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{11}$$

Отсюда ясно, что члены с производными скоростей в уравнениях (5), (9) есть вещественная и мнимая части величины $-\frac{4}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{dU}{dz}$.

Перейдем теперь к рассмотрению правых частей уравнений (5), (9).

Введем функцию

$$U_*(z) = u_* - iv_* = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - i\frac{\partial \Psi_2}{\partial y}. \tag{12}$$

Пусть $\Psi_2(z)$ есть некоторая функция комплексного переменного. Тогда справедливо равенство $\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial y^2}=0$. Выполнены также условия Коши — Римана для функции $U_*(z)$. Производная $U_*(z)$ может быть преобразована как

$$\frac{dU_*}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_*}{\partial x}-\frac{\partial v_*}{\partial y}\right)-\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v_*}{\partial x}+\frac{\partial u_*}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial y^2}\right)-i\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x\partial y}. \tag{13}$$

Из уравнения (13) следует, что правые части уравнений (5) и (9) есть соответственно вещественная и мнимая части величины $-2\frac{dU_*}{dz}$.

В результате два уравнения, (5) и (9), равносильны одному комплексному уравнению. Оно имеет вид

$$-\frac{4}{\mathrm{Re}}\frac{dU}{dz}+U^2=-2\frac{dU_*}{dz}. \tag{14}$$

Имеем обыкновенное дифференциальное уравнение известного типа. Уравнение (14) есть специальное уравнение Риккати [1] с правой частью $F(z)=-2\frac{dU_*}{dz}$.

Оно допускает аналитическое решение при многих известных вариантах правой части $F(z)$. Некоторые из них приведены в работе [2]. Создается благоприятная ситуация для построения новых решений.

Построение решений

Применим описанный выше подход и построим некоторые решения уравнений Навье — Стокса, представляющие практический интерес. Для этого достаточно разрешить уравнение (14).

Самое простое решение получается, если в правой части уравнения (14) положить нуль. Тогда приходим к уравнению

$$-\frac{4}{\mathrm{Re}}\frac{dU}{dz}+U^2=0. \tag{15}$$

Его решением является

$$U=\frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{1}{z_1-z}, \tag{16}$$

где $z_1=A_1+iB_1$ — некоторая фиксированная точка комплексной плоскости. В этой точке имеем простой полюс.

Данное решение допускает простую гидромеханическую трактовку. Точку z_1 можно рассматривать как точку расположения стока жидкости с обильностью

$$m_1=\frac{2}{\pi\mathrm{Re}}. \tag{17}$$

Данное решение может представлять интерес для гидрологии и для теории нефтедобычи.

Найдем скорости, соответствующие этому решению. Достаточно отделить вещественную и мнимую части.

В результате получаем выражения

$$u=\frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{A_1-x}{(A_1-x)^2+(B_1-y)^2},\quad v=\frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{B_1-y}{(A_1-x)^2+(B_1-y)^2}. \tag{18}$$

С учетом уравнения (4) находим давление

$$p-p_0=-\Phi-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\mathrm{Re}}\right)^2\cdot\frac{1}{(A_1-x)^2+(B_1-y)^2}, \tag{19}$$

где p_0 — аддитивная постоянная давления, Ф — потенциал внешних сил.

С практической точки зрения может быть интересно решение в виде суммы нескольких простых полюсов. В простейшем случае — двух. Пусть, например, в каждой из точек $z_1=A_1+iB_1$ и $z_2=A_2+iB_2$ имеем простой полюс. Следуя гидромеханической трактовке, можно считать, что в этих точках расположены стоки с одинаковой обильностью (17). Решение уравнения (14) ищем в виде

$$U=\frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{1}{z_1-z}+\frac{1}{z_2-z}\right). \tag{20}$$

Подстановка уравнения (20) в (14) приводит к соотношению

$$\frac{16}{\mathrm{Re}^2}\cdot\frac{1}{z_2-z_1}\cdot\left(\frac{1}{z_1-z}-\frac{1}{z_2-z}\right)=-\frac{dU_*}{dz}. \tag{21}$$

Это уравнение допускает интегрирование. В результате получаем

$$U_*=\frac{16}{\mathrm{Re}^2(z_2-z_1)}\cdot\ln\frac{z_1-z}{z_2-z}. \tag{22}$$

На основании уравнения (12) выражение (22) определяет частные производные функции Ψ_2. Возможно и последующее интегрирование (22). В результате может быть найдена функция Ψ_2. Однако эта функция не представляет особого интереса. В выражении (4) для давления фигурирует лишь лапласиан Ψ_2, а последнее заведомо равно нулю.

Таким образом, для рассматриваемого случая определяющая система разрешена. Отделяем в уравнении (20) вещественную и мнимую части и находим решение уравнений Навье — Стокса, соответствующее двум изолированным стокам:

$$u=\frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{A_1-x}{(A_1-x)^2+(B_1-y)^2}+\frac{A_2-x}{(A_2-x)^2+(B_2-y)^2}\right),$$

$$v=\frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{B_1-y}{(A_1-x)^2+(B_1-y)^2}+\frac{B_2-y}{(A_2-x)^2+(B_2-y)^2}\right). \tag{23}$$

Используя выражение (4), находим давление:

$$p - p_0 = -\Phi - \frac{8}{\mathrm{Re}^2}\cdot\left(\frac{1}{((A_1-x)^2+(B_1-y)^2)^2}+\frac{1}{((A_2-x)^2+(B_2-y)^2)^2}+\right.$$
$$\left.+2\frac{(A_1-x)\cdot(A_2-x)+(B_1-y)\cdot(B_2-y)}{\left((A_1-x)^2+(B_1-y)^2\right)\cdot\left((A_2-x)^2+(B_2-y)^2\right)}\right). \tag{24}$$

Представляется возможным путем некоторой вариации коэффициентов получить решение и для другого важного случая.

Это случай двух изолированных и различно ориентированных вихрей с одинаковыми по модулю интенсивностями. Такая схема может быть интересна для метеорологии, так как дает простейшую модель движения двух различно ориентированных атмосферных вихрей — циклона и антициклона.

Для этого случая комплексная скорость получается из уравнения (20) умножением правой части на i. Для этой величины имеем выражение:

$$U = \frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot i\cdot\left(\frac{1}{z_1 - z}+\frac{1}{z_2 - z}\right). \tag{25}$$

Отделяя вещественную и мнимую части, находим скорости

$$u = \frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{B_1 - y}{(A_1-x)^2+(B_1-y)^2}+\frac{B_2 - y}{(A_2-x)^2+(B_2-y)^2}\right),$$

$$v = -\frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{A_1 - x}{(A_1-x)^2+(B_1-y)^2}+\frac{A_2 - x}{(A_2-x)^2+(B_2-y)^2}\right). \tag{26}$$

Выражение для давления совпадает с уравнением (24).

Таким образом, решения уравнений Навье — Стокса для рассмотренных случаев построены.

Выводы

Предложен новый метод построения решений 2D уравнений Навье — Стокса. Метод основан на первом интеграле уравнений Навье — Стокса и на свойствах (возможностях) уравнения Риккати в частных производных.

Каждый известный случай интегрируемого в квадратурах уравнения Риккати генерирует новые решения уравнений Навье — Стокса.

Поскольку известных случаев интегрируемости уравнения Риккати множество, то появляется возможность значительно пополнить перечень известных решений уравнений Навье — Стокса и более успешно изучать общие вопросы, связанные с этими уравнениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егоров А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2007. 448 с.

2. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: Справочник. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

3. *Коптев А. В.* Интегралы уравнений Навье — Стокса. Саранск: Труды Средне-волжского математического общества. 2004. № 1. Т. 6. С. 215–225.

4. *Коптев А. В.* Общий интеграл уравнений Навье — Стокса // Математическая физика и ее приложения: Материалы второй международной конференции. Самара: МИАН им. В. А. Стеклова, СамГУ, 2010. С. 179–180.

5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

6. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

7. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.

8. *Charles L.* Fefferman. Existence and Smoothness of the Navier — Stokes equation. Preprint, Princeton Univ., Math. Dept. Princeton, NJ, 2000. P. 1–5.

REFERENCES

1. *Egorov A. I.* Obyknovennye differencial'nye uravnenija. M.: Izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 2007. 448 s.

2. *Zajcev V. F., Poljanin A. D.* Obyknovennye differencial'nye uravnenija. Spravochnik. M.: Fizmatlit, 2001. 576 s.

3. *Koptev A. V.* Integraly uravnenij Nav'e — Stoksa. Saransk: Trudy Sredne-volzhskogo matematicheskogo obwestva. 2004. № 1. T. 6. S. 215–225.

4. *Koptev A. V.* Obwij integral uravnenij Nav'e — Stoksa // Matematicheskaja fizika i ee prilozhenija: Materialy vtoroj mezhdunarodnoj konferencii. Samara: MIAN im. V. A. Steklova, SamGU, 2010. S. 179–180.

5. *Lavrent'ev M. A., Shabat B. V.* Metody teorii funkcii kompleksnogo peremennogo. M.: Nauka, 1987. 688 s.

6. *Ladyzhenskaja O. A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti. – M.: Nauka, 1970. 288 s.

7. *Temam R.* Uravnenija Nav'e — Stoksa. Teorija i chislennyj analiz. M.: Mir, 1981. 408 s.

8. *Charles L.* Fefferman. Existence and Smoothness of the Navier — Stokes equation. Preprint, Princeton Univ., Math. Dept. Princeton, NJ, 2000. P. 1–5.

Ю. Н. Ловягин

О ПРОБЛЕМЕ НОРМИРУЕМОСТИ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Рассматриваются вопросы, связанные с существованием меры на полной булевой алгебре. Доказано, что на регулярные булевы алгебры допускают полумеру. Приведен пример, показывающий, что не всякая регулярная булева алгебра является нормируемой.

Ключевые слова: булева алгебра, регулярная булева алгебра, мера, нормируемость, полунормируемость.

Yu. Lovyagin

ON THE PROBLEM OF MEASURABLIZABILITY OF BOOLEAN ALGEBRAS

This paper discusses the issues related to the existence of measures on a complete Boolean algebra. It is argued that for regular Boolean algebras half-measures are possible. An example is given showing that not every regular Boolean algebra is measurable.

Keywords: Boolean algebra, regular Boolean algebra, the measure, measurable Boolean algebra, seminormativity.