3. *Коптев А. В.* Интегралы уравнений Навье — Стокса. Саранск: Труды Средне-волжского математического общества. 2004. № 1. Т. 6. С. 215–225.

4. *Коптев А. В.* Общий интеграл уравнений Навье — Стокса // Математическая физика и ее приложения: Материалы второй международной конференции. Самара: МИАН им. В. А. Стеклова, СамГУ, 2010. С. 179–180.

5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

6. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

7. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.

8. *Charles L.* Fefferman. Existence and Smoothness of the Navier — Stokes equation. Preprint, Princeton Univ., Math. Dept. Princeton, NJ, 2000. P. 1–5.

REFERENCES

1. *Egorov A. I.* Obyknovennye differencial'nye uravnenija. M.: Izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 2007. 448 s.

2. *Zajcev V. F., Poljanin A. D.* Obyknovennye differencial'nye uravnenija. Spravochnik. M.: Fizmatlit, 2001. 576 s.

3. *Koptev A. V.* Integraly uravnenij Nav'e — Stoksa. Saransk: Trudy Sredne-volzhskogo matematicheskogo obwestva. 2004. № 1. T. 6. S. 215–225.

4. *Koptev A. V.* Obwij integral uravnenij Nav'e — Stoksa // Matematicheskaja fizika i ee prilozhenija: Materialy vtoroj mezhdunarodnoj konferencii. Samara: MIAN im. V. A. Steklova, SamGU, 2010. S. 179–180.

5. *Lavrent'ev M. A., Shabat B. V.* Metody teorii funkcii kompleksnogo peremennogo. M.: Nauka, 1987. 688 s.

6. *Ladyzhenskaja O. A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti. – M.: Nauka, 1970. 288 s.

7. *Temam R.* Uravnenija Nav'e — Stoksa. Teorija i chislennyj analiz. M.: Mir, 1981. 408 s.

8. *Charles L.* Fefferman. Existence and Smoothness of the Navier — Stokes equation. Preprint, Princeton Univ., Math. Dept. Princeton, NJ, 2000. P. 1–5.

Ю. Н. Ловягин

О ПРОБЛЕМЕ НОРМИРУЕМОСТИ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Рассматриваются вопросы, связанные с существованием меры на полной булевой алгебре. Доказано, что на регулярные булевы алгебры допускают полумеру. Приведен пример, показывающий, что не всякая регулярная булева алгебра является нормируемой.

Ключевые слова: булева алгебра, регулярная булева алгебра, мера, нормируемость, полунормируемость.

Yu. Lovyagin

ON THE PROBLEM OF MEASURABLIZABILITY OF BOOLEAN ALGEBRAS

This paper discusses the issues related to the existence of measures on a complete Boolean algebra. It is argued that for regular Boolean algebras half-measures are possible. An example is given showing that not every regular Boolean algebra is measurable.

Keywords: Boolean algebra, regular Boolean algebra, the measure, measurable Boolean algebra, seminormativity.

1. Основные понятия.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под булевой алгеброй будем понимать алгебраическую структуру, которая в рамках теории множеств Цермело — Френкеля является моделью некоторой системы аксиом. Точнее, пусть L — язык исчисления предикатов первого порядка с равенством, сигнатура которого содержит символы для двухместного предиката равенства $=$, двухместного предиката «меньше» $\leq$, констант $0,1$, бинарных функциональных символов $\vee, \wedge$, унарного функционального символа $'$. Аксиомы теории булевых алгебр включают аксиомы равенства, согласования с равенством, аксиомы порядка и специальные аксиомы:

$$\forall x \forall y (x \vee y = y \vee x); \quad \forall x \forall y (x \wedge y = y \wedge x);$$

$$\forall x (x \vee 0 = x); \quad \forall x (x \wedge 0 = 0);$$

$$\forall x (x \vee 1 = 1); \quad \forall x (x \wedge 1 = x);$$

$$\forall x \forall y \forall z ((x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee y)); \quad \forall x \forall y \forall z ((x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge y));$$

$$\forall x \forall y (x \leq y \equiv x \vee y = y); \quad \forall x \forall y (x \leq y \equiv x \wedge y = x);$$

$$\forall x \forall y ((x \wedge y) \vee x = x); \quad \forall x \forall y ((x \vee y) \wedge x = x);$$

$$\forall x \forall y \forall z (x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)); \quad \forall x \forall y \forall z (x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \wedge z));$$

$$\forall x (x'' = x); \quad 0' = 1; \quad 1' = 0; 0 < 1 \& \neg (0 = 1);$$

$$\forall x \forall y ((x \vee y)' = x' \wedge y'); \quad \forall x \forall y ((x \wedge y)' = x' \vee y').$$

Мы не заботимся о независимости приведенного списка аксиом. Вся терминология, касающаяся булевых алгебр и функций на них, восходит к [3].

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Булева алгебра A называется полной, если для каждого подмножества $E \subset A$ существует наименьший элемент $e \in A$ такой, что для всех $x \in A$ $x \leq e$. Элемент e называется супремумом множества E и обозначается $supremum E$.

Двойственным образом (с заменой неравенств на противоположные) определяется инфимум — $infimum E$.

Не умаляя общности, в дальнейшем рассматриваем только полные булевы алгебры. Для краткости вместо «полная булева алгебра» будем писать пба.

Будем рассматривать различные функции, определенные на пба A.

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\mu : A \to \Re$ называется

аддитивной, если $\forall x \forall y \left(x \wedge y = 0 \supset \mu(x \vee y) = \mu(x) + \mu(y) \right)$;

положительной, если $\forall x \left(\mu(x) \geq 0 \right)$;

существенно положительной (мы будем использовать сокращение сп), если она положительна и $\forall x \left(\mu(x) = 0 \supset x = 0 \right)$;

квазимерой (сокращенно км), если она положительная и аддитивная.

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пба A называется алгеброй счетного типа — баст, если любое подмножество $E \subset A$, обладающее свойством $x \wedge y = 0$ для всех $x, y \in E$, является не более чем счетным.

1.5. ТЕОРЕМА. Если на пба A существует спкм функция, то A — баст.

Доказательство этого и других утверждений этого раздела можно найти в работах [3, 9].

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим обобщенную последовательность (x_α) элементов пба A. Если существуют обобщенные последовательности (y_α), $(z_\alpha) \subset A$ такие, что при всех α $y_\alpha \leq x_\alpha \leq z_\alpha$, при этом $\alpha \leq \beta \supset y_\alpha \leq y_\beta \;\&\; z_\alpha \geq z_\beta$ и $supremum\{y_\alpha\} = infimum\{z_\alpha\} = x \in A$, то последовательность (x_α) называется (o)-сходящейся к элементу x. Факт (o)-сходимости обозначается $x_\alpha \to^{(o)} x$. Элемент x называется (o)-пределом и обозначается $x = (o)\text{–}lim\, x_\alpha$.

Отметим, что (o)-сходимость в баст может быть определена в терминах «обычных» последовательностей.

1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Баст называется регулярной, если она полна и в ней выполнен принцип диагонали: для любой последовательности x_{nm} такой, что при любом m $x_{nm} \to^{(o)} x_m$ и $x_m \to^{(o)} x$ существует «диагональная последовательность» $x_{nm_n} \to^{(o)} x$.

1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция μ, заданная на пба A, называется (o)-непрерывной, если из $x_\alpha \to^{(o)} x$ следует $\mu(x_\alpha) \to \mu(x)$.

1.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мерой на пба называется (o)-непрерывная спкм. Пба A, на которой существует мера, называется нормированной. Если на некоторой пба можно задать меру, то эта алгебра называется нормируемой.

Отметим, что нормированная алгебра — это алгебра с некоторой фиксированной мерой, в то время как нормируемость означает лишь возможность указать на алгебре некоторую меру.

1.10. ТЕОРЕМА. Всякая нормируемая пба регулярна.

Близким к понятию меры является понятие внешней меры.

1.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция μ на пба A называется полуаддитивной, если для любых $x, y \in A$ $\mu(x \vee y) \leq \mu(x) + \mu(y)$.

1.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Положительная полуаддитивная функция называется внешней квазимерой (вкм).

1.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ**.** Сп (o)-непрерывная вкм называется внешней мерой (вм) или полумерой. Пба с фиксированной вм называется полунормированной. Пба, на которой можно задать некоторую полумеру, называется полунормируемой.

Отметим, что всякая мера является и вм. Следовательно, класс нормируемых пба является подклассом всех полунормируемых пба, который, в свою очередь, является подклассом класса регулярных булевых алгебр. Относительно соотношения между принципом диагонали и счетностью типа пба известно [4], что из гипотезы континуума следует, что принцип диагонали обеспечивает счетность типа. Взаимоотношению между этими тремя классами и посвящена настоящая работа.

Известно, что наперед заданная булева алгебра не обязана быть нормируемой. Возникает естественный вопрос об условиях, гарантирующих возможность задать на булевой алгебре нетривиальную меру. В работе [14] были приведены необходимые и достаточные условия нормируемости булевой алгебры. Там же поставлен вопрос, известный ныне как проблема Д. Магарам, о существовании меры на полунормированной булевой алгебре. В этом направлении отметим работы [1, 2, 7, 8, 10, 12]. Необходимые и достаточные условия нормируемости приведены в работе [11]. Для регулярных булевых алгебр вопрос существования меры решается проще. В частности, А. Г. Пинскером [4] доказано, что для нормируемости регулярной булевой алгебры достаточно существования на ней существенно положительной квазимеры. Последняя проблема оказалась, однако, не менее сложной, ибо Х. Гайфман [13] построил пример булевой алгебры счетного типа, на которой нет ни одной существенно положительной квазимеры. Таким образом, класс пба, допускающих спкм, является нетривиальным. С другой стороны, гипотеза о нормируемости всякой регулярной булевой алгебры сильнее в рамках ZFC гипотезы М. Я. Суслина [14].

Имеет место важный результат, показывающий, что на всякой пба имеется достаточное множество км.

1.14. ТЕОРЕМА. Пусть A — пба, $a > 0$ — вещественное число, $x \in A$. Тогда существует км μ такая, что $\mu(x) = a$.

1.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество Φ квазимер на пба A назовем достаточным, если для любого $x \in A$ существует км $\mu \in \Phi$ такая, что $\mu(x)0 > 0$.

Не умаляя общности, можно считать, что на каждой пба A задано достаточное множество Φ км наименьшей возможной мощности и такое, что множество $\Phi \setminus \{\mu\}$ не является достаточным для любой км $\mu \in \Phi$.

1.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Выделенное выше «минимальное» достаточное множество км будем называть порождающим.

1.17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — некоторое множество пба. Декартово произведение этого множества с покоординатными алгебраическими операциями, равенством и порядком называется (полным) соединением семейства пба $\{A_i\}_{i \in I}$ и обозначается $\sum_{i \in I} A_i$. Счетным соединением семейства пба $\{A_i\}_{i \in I}$ называется подалгебра A_σ полного соединения такая, что $x \in A_\sigma$ тогда и только тогда, когда лишь не более чем счетное количество координат x отлично от нуля.

2. Булевы алгебры с достаточным числом непрерывных квазимер.

2.1. ТЕОРЕМА. Пусть A — пба. Тогда существует множество пба с спкм $\{A_i\}_{i \in I}$ такое, что A изоморфно вкладывается в $\sum_{i \in I} A_i$.

Доказательство. Пусть Φ — порождающее множество км на A. Рассмотрим фактор-алгебру $A_\phi = A/\phi^{-1}(0)$ и положим $\mu_\phi = \phi/\phi^{-1}(0)$. Ясно, что μ_ϕ является спкм на ба A_ϕ. Положим $A_\Phi = \sum_{\phi\in\Phi} A_\phi$. Рассмотрим теперь функцию $f: A \to A_\phi$, определенную правилом $(f(x))_\phi = pr_\phi(x)$, где pr_ϕ — естественная проекция на фактор-алгебру. В силу покоординатного определения функции и операций f является гомоморфизмом. Если же $f(x) = 0$, то $\phi(x) = 0$ для всех $\phi \in \Phi$. Отсюда в силу достаточности Φ следует, что $x = 0$. Таким образом, функция f является мономорфизмом, что и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что некоторые из алгебр A_ϕ могут быть тривиальными. Однако, как показывает следующий результат, если км ϕ (o)-непрерывна, то все фактор-алгебры нетривиальны.

Пусть μ — (o)-непрерывная км на пба A. Положим $A_\mu = [0, a_\mu']$, где $\alpha_\mu =$ $= supremum\ \mu^{-1}(0)$. В силу (o)-непрерывности км $\alpha_\mu < 1$. Таким образом, A_μ является компонентой существенной положительности км μ. Следовательно, сужение μ на A_μ является мерой.

Пусть теперь у пба A все км из порождающего множества Φ (o)-непрерывны. Тогда для каждого $z \in A$ существует (o)-непрерывная км $\mu \in \Phi$ такая, что $\mu(z) > 0$. Положим $b = a_\mu \wedge z$. Тогда $[0,b] \subset [0,z]$ и сужение μ на сегмент $[0,b]$ является (o)-непрерывной км.

Теперь, согласно принципу исчерпывания [3, с. 112], компоненты $A_\mu (\mu \in \Phi)$ образуют разложение пба A.

Суммируя сказанное, получаем, что доказана

2.2. ТЕОРЕМА. Всякая пба, в которой все км из некоторого порождающего множества (o)-непрерывны, изоморфна соединению нормированных булевых алгебр.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пба, обладающую порождающим множеством (o)-непрерывных км, назовем булевой алгеброй с достаточным числом (o)-непрерывных км.

2.4. ТЕОРЕМА. Класс пба с достаточным числом (o)-непрерывных км совпадает с классом соединений нормированных пба.

Доказательство. То, что всякая пба с достаточным числом (o)-непрерывных км раскладывается в соединение нормированных, показывает включение в одну сторону. Докажем противоположное. Пусть $A = \sum_{i\in I} A_i$ и на каждой пба $\{A_i\}_{i\in I}$ имеется мера μ_i. Ясно, что продолжение (хотя бы и нулем) μ_i на всю алгебру A является (o)-непрерывной км. С другой стороны, если $a > 0$, то $a \wedge u_i > 0$ для каждой единицы $u_i \in A_i$. Так как $a = supremum \wedge u_i$, существует такой элемент u_i, что $\mu_{u_i}(a) > 0$, ибо в противном случае для всех $i \in I$ $\mu_i(a \wedge u_i) = 0$ и, следовательно, $a = 0$. Теорема доказана.

Обзор некоторых свойств булевых алгебр с достаточным числом (o)-непрерывных км имеется в [5]. Там же отмечена связь таких алгебр с нормируемыми. Точнее, такая алгебра в подходящей булевозначной модели теории множеств представляется нормируемой булевой алгеброй.

3. Погружение регулярной булевой алгебры в соединение нормируемых.

Следующее утверждение доказано в работе [3, с. 237].

3.1. ТЕОРЕМА. Пусть A — пба с спкм μ. Тогда существует пба с мерой ν такая, что

1) A — подалгебра A; для любого $b \in B$ существует последовательность (x_n) элементов A такая, что $x_n \to^{(o)} b$;

2) диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "in"] \arrow[dr, "\mu"'] & & B \arrow[dl, "\nu"] \\ & \mathfrak{R} & \end{tikzcd}$$

где in — естественное вложение подалгебры, коммутативна, то есть $\nu \circ in = \mu$.

Пусть теперь A — пба, Φ — порождающее множество км. Пусть $\Phi = \{\mu_i\}_{i \in I}$. Обозначим A_i соответствующую алгебру с спкм из теоремы 2.1. Построим булеву алгебру B_i с мерой $\overline{\mu_i}$. Положим $B = \sum_{i \in I} B_i$. Легко понять, что $\sum_{i \in I} A_i$ является подалгеброй B. Следовательно, пба с точностью до изоморфизма является подалгеброй соединения нормированных алгебр.

Таким образом, справедлива

3.2. ТЕОРЕМА. Всякая пба A является подалгеброй полного соединения нормированных алгебр. При этом если A — баст, то она является подалгеброй счетного соединения нормированных.

Доказательство. Осталось доказать только вторую часть утверждения. Пусть A — баст. Тогда для каждого $a \in A$ существует не более чем счетное количество компонент B_i, для которых проекция a на B_i нетривиальна.

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A — подалгебра пба B. Говорят, что A — правильная подалгебра, если для любого множества $E \subset A$ из существования $a = supremum E,\ \ b = infimum E$, вычисленных в A, следует, что существуют $\widetilde{a} = supremum E,\ \ \widetilde{b} = infimum E$, вычисленные в B и $\widetilde{a} = a \ \&\ \widetilde{b} = b$.

3.4. ТЕОРЕМА. Правильная подалгебра регулярной булевой алгебры является регулярной.

Доказательство. Счетность типа подалгебры очевидна. Факт совпадения точных граней, вычисленных в подалгебре, и объемлющей алгебры для подмножеств гарантирует, что для любой последовательности $x_n \in A$ существование (o)-предела влечет существование (o)-предела в объемлющей алгебре и совпадения обоих значений. Отсюда следует выполнение принципа диагонали.

3.5. ТЕОРЕМА. Счетное соединение регулярных алгебр является регулярной булевой алгеброй.

Доказательство. Очевидно, что счетное соединение баст является баст.

Рассмотрим счетное соединение счетного множества регулярных булевых алгебр — $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Обозначим через P_i естественную проекцию A на i-й сомножитель. Так как очевидно, что (o)-сходимость в A является покоординатной, то есть $x_n \to^{(o)} x$ равносильно условию $P_i(x_n) \to^{(o)} P(x)$ для всех i, выполнение принципа диагонали получается из следующего рассуждения.

Пусть $x_{nm} \to^{(o)} x_n$, $x_n \to^{(o)} x$ в A. Это равносильно тому, что при всех $i = 1, 2, \ldots$ $P_i(x_{nm}) \to^{(o)} P_i(x_n)$, $P_i(x_n) \to^{(o)} P_i(x)$. Поскольку всякая алгебра A_i регулярна, существует диагональная последовательность $x^i_{nm_n} \in A_i$ такая, что $x^i_{nm_n} \to^{(o)} x^i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $x^i_{nm_n} = P_i(x_{nm_n})$. С другой стороны, положив $x = supremum x^i$, получим, что $P_i\left(x^i_{nm_n}\right) \to^{(o)} P_i(x)$, что дает принцип диагонали в A.

Если теперь A — счетное соединение произвольного множества регулярных алгебр, то для любого счетного множества $E \subset A$ существует не более чем счетное множество I такое, что при $e \in E$ $P_i(e) \neq \{0,\}$ тогда и только тогда, когда $i \in I$. Тогда ясно, что полное соединение счетного множества регулярных алгебр $\sum_{i \in I} A_i$, с одной стороны, изоморфно A, а с другой — является правильной подалгеброй исходного счетного соединения. Таким образом, A является регулярной.

Подробное обсуждение этого утверждения имеется в работе [6]. Отметим, что понятие регулярности введено А. Г. Пинскером для векторных решеток. Им же рассматривались К-пространства с достаточным числом (o)-непрерывных функционалов [4, с. 416]. Аналог теоремы 3.5 для регулярных К-пространств имеется в [4, с. 179].

3.6. ТЕОРЕМА. Всякая регулярная булева алгебра с точностью до изоморфизма является правильной подалгеброй счетного соединения нормированных алгебр.

Доказательство. Пусть A — регулярная булева алгебра. Согласно теореме 3.2 она является подалгеброй счетного соединения нормированных булевых алгебр. Так как всякая нормируемая алгебра регулярна, по теореме 3.5 отсюда следует, что A является подалгеброй регулярной алгебры.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы нужно следующее утверждение:

Пусть A, B — регулярные булевы алгебры. Пусть, далее, A является подалгеброй пба A. Тогда A — правильная подалгебра B.

Для доказательства рассмотрим произвольное подмножество $E \subset A$ и пусть $a = supremum E$, вычисленный в A, $b = supremum E$, вычисленный в B. Отметим, что существование точных граней обеспечено полнотой регулярных алгебр. В общем случае $a \geq b$.

Предположим, что $a > b$. Легко понять, что существуют такие последовательности $a_n \in E$, $b_m \in E$, что $a_n \to^{(o)} a$, $b_m \to^{(o)} b$. Положим $x_{nm} = a_n \vee b_m$. Тогда при каждом n имеет место соотношение $x_{nm} \to^{(o)} a$. Выделяя теперь диагональную последовательность,

получаем, что $x_{n_m}m \to^{(o)} a$. Но так как $x_{n_m}m \in E$, $x_{n_m}m \le b$ и, следовательно, $a \le b$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Приведенные результаты показывают, что класс регулярных булевых алгебр совпадает с классом счетных соединений нормированных булевых алгебр.

4. Гайфмановы алгебры.

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полную булеву алгебру H назовем гайфмановой алгеброй, если на ней не существует ни одной спкм.

Очевидно следующее утверждение:

4.2. ТЕОРЕМА. Если пба A содержит гайфманову подалгебру H, то она сама является гайфмановой.

Доказательство сразу получается из того факта, что сужение спкм на любую подалгебру является спкм.

Рассмотрим теперь в гайфмановой алгебре H порождающее семейство км $\{\mu_i : i \in I\}$ и $A = \sum_{i \in I} A_i$ — соединение соответствующих алгебр с мерой, полученных из алгебр с спкм путем пополнения их до нормированных алгебр (теорема 3.2). Так как каждая нормированная булева алгебра регулярна, алгебра A является регулярной гайфмановой алгеброй (теоремы 3.5, 3.6, 4.2).

Пусть теперь имеется несчетное семейство $\{H_\xi : \xi \in \Xi\}$ гайфмановых алгебр. Пусть $H_\xi = \sum_{i \in I_\xi} A_{i_\xi}$, где A_{i_ξ} — нормируемая булева алгебра. Рассмотрим Ω — счетное соединение алгебр A_{i_ξ}. Так как для каждого $\xi \in \Xi$ алгебра H_ξ является подалгеброй Ω, имеет место

4.3. ТЕОРЕМА. Существует регулярная ненормируемая булева алгебра.

5. Существование полумеры.

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция ϕ на булевой алгебре B называется изотонной, если $\forall x \forall y \left(x \le y \supset \phi(x) \le \phi(y) \right)$.

Пусть A — счетное соединение нормированных булевых алгебр $\{A_i : i \in I\}$ с мерой μ_i соответственно. В общем случае предполагается, что множество I несчетно и все пба A_i попарно неизоморфны.

Для каждого $x \in A$ положим $\nu(x) = supremum\{\mu_i(x_i) : i \in I\}$.

5.2. ТЕОРЕМА. Функция ν является существенно положительной, изотонной и полуаддитивной.

Доказательство. Существенная положительность и изотонность очевидны. Проверим полуаддитивность. Действительно, $\nu(x \vee y) = supremum\left\{\mu_i\left(x_{i \vee y_i}\right)\right\} \le supremum\{\mu_i(x_i)\} +$ $+ supremum\{\mu_i(y_i)\} = \nu(x) + \nu(y)$.

5.3. ТЕОРЕМА. Пусть φ — полумера на пба B. Пусть, далее, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\phi(x_n)<\infty$ для некоторой последовательности $x_n \in B$. Тогда $x_n \to^{(o)} 0$.

Доказательство. Обозначим $\overline{x_n} = infimum_{m=1,2,\ldots} supremum_{i=m,m+1,\ldots} x_i$.

Имеем $\phi\left(supremum_{i=m,m+1,\ldots,m+k} x_i\right) \le \sum_{i=m}^{m+k}\phi(x_i) \le \sum_{i=m}^{\infty} x_i$. В силу (o)-непрерывности ϕ отсюда следует, что $\phi\left(supremum_{i\ge m} x_i\right) \le \sum_{i=m}^{\infty}\phi(x_i)$. В силу сходимости ряда правая часть последнего неравенства стремится к нулю.

Следовательно, $0 \le \phi\left(infimum_{m=1,2,\ldots}\overline{x_i}\right) \le \sum_{i=m}^{\infty}\phi(x_i) = 0$. В силу существенной положительности полумеры отсюда получается, что $\overline{x_i} = 0$. Теперь легко понять, что $x_i \to^{(o)} 0$.

Следствие. Пусть φ — полумера на пба B. Пусть, далее, $\varphi(x_n) \to 0$ для некоторой последовательности $x_n \in B$. Тогда существует подпоследовательность $x_{n_k} \to^{(o)} 0$.

Определим, далее, $\theta(a) = infimum\{\nu(x) : a \le x\}, \quad a \in A$.

5.4. ТЕОРЕМА. Функция θ является полумерой на пба A.

Доказательство.

1. Ясно, что функция u изотонна.
2. Очевидно, что $\forall a\left(\theta(a) \le \nu(a)\right)$.
3. Пусть $c = a \vee b$ и $\varepsilon > 0, \quad x, y \in A$ таковы, что

$$a \le x, \quad b \le y;$$
$$\nu(x) < \theta(a) + \varepsilon, \quad \nu(y) < \theta(b) + \varepsilon.$$

Тогда $\nu(x \vee y) \le \nu(x) + \nu(y) < \theta(a) + \theta(b) + 2\varepsilon$. Переходя в этом неравенстве к точной нижней грани, получаем, что $\theta(a \vee b) \le \theta(a) + \theta(b) + 2\varepsilon$, что в силу произвольности ε дает полуаддитивность функции θ.

4. Пусть теперь $x_n \to^{(o)} x$ в A. Тогда для каждого $i \in I_y$, где I_y — некоторое не более чем счетное подмножество I имеет место $\mu_i(x_{i\,n}) \to^{(o)} \mu_i(x_i)$ в силу непрерывности меры μ_i. Для $i \notin I_y$ все координаты как членов последовательности x_n, так и ее предела равны нулю. Поэтому $\left|\theta(x_n) - \theta(x)\right| \le \left|\nu(x_n) - \nu(x)\right| \le \left|supremum\left\{\mu_i(x_{i\,n})\right\} - supremum\left\{\mu_i(x_i)\right\}\right| \to 0$, что означает (o)-непрерывность функции θ.

Докажем теперь существенную положительность θ.

Пусть $\theta(a) = 0$. Предположим, что $a \ne 0$. Тогда существует такая последовательность $x_n \in A$, что $x_n \ge a$ и $\nu x_n \to 0$.

Имеем $\nu(x_n) = supremum\left\{\mu_i(x_{i\,n}) : i \in I_\sigma\right\}$. Не умаляя общности, можно считать, что рассматривается не более чем счетное множество индексов I_σ, для которых все координаты отличны от нуля. Тогда получается, что некоторая двойная последовательность $x_{i\,n} \geq a_i$ обладает свойством $\nu(x_{i\,n}) \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Согласно следствию к теореме 5.3 существует подпоследовательность $x_{i\,n_k} \to^{(o)} p_i$, при этом, так как $x_{i\,n_k} \geq a_i$, $p_i \geq a_i > 0$.

Так как $\nu(x_{i\,n_k}) \to o$, $\mu_i(x_{i\,n_k}) \to 0$. С другой стороны, в силу (o)-непрерывности меры $\mu_i(x_{i\,n_k}) \to \mu_i(p_i)$ и, следовательно, $p_i = 0$ для всех $i \in I_\sigma$. Отсюда получается, что при всех $i \in I \quad p_i = 0$. Теперь ясно, что $a = 0$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Суммируя приведенные выше результаты, получаем, что справедлива

5.5. ТЕОРЕМА. Каждая регулярная булева алгебра полунормируема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексюк В. Н.* Заметка о нормируемости. Деп. В ВИНИТИ, № 4021-77. 1977. 8 с.
2. *Алексюк В. Н.* Теорема о миноранте. Счетность проблемы Магарам // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 5. С. 597–604.
3. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1966. 318 с.
4. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 548 с.
5. *Ловягин Ю. Н.* Булевы алгебры с достаточным числом непрерывных квазимер. Деп. В ВИНИТИ. № 3111-В97. 1997. 25 с.
6. *Ловягин Ю. Н.* О некоторых вопросах теории булевых алгебр. Деп. В ВИНИТИ. № 3559-В87. 1987. 14 с.
7. *Попов В. А.* Аддитивные и полуаддитивные функции на булевых алгебрах // Сиб. матем. журнал. 1976. Т. 17. № 2. С. 331–339.
8. *Попов В. А.* О некоторых свойствах полумер // XVI Герценовские чтения. Математика: Научные доклады. Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1973. С. 98–102.
9. *Порошкин А. Г.* Упорядоченные множества. Булевы алгебры: Учеб. пособие по спецкурсу. Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1987. 85 с.
10. *Порошкин А. Г.* К вопросу о нормируемости булевых алгебр с непрерывной внешней мерой // Сиб. матем. журнал. 1980. Т. 21. № 4. С. 216–220.
11. *Потепун А. В.* Некоторые условия существования меры на булевой алгебре. Деп. В ВИНИТИ. № 6265-В86. 1986. 22 с.
12. *Band Ch.* Note on pathological submeasure // Proc. Conf.: Topol. and Mess. II. Creifswald, 1980. Part 2. P. 1–5.
13. *Geifman H.* Concerning measures on Boolean algebras // Pacif. J. Math. 1964. V. 14. N 1. P. 95–114.
14. *Maharam D.* Fn algebraic characterization of measure algebras // Ann. of Math. 1947. V. 48. N 1. P. 154–167.

REFERENCES

1. *Aleksjuk V. N.* Zametka o normiruemosti. Dep. V VINITI. N 4021-77. 1977. 8 s.
2. *Aleksjuk V. N.* Teorema o minorante. Schjotnost' problemy Magaram // Matem. Zametki. 1977. T. 21. N 5. S. 597–604.
3. *Vladimirov D. A.* Bulevy algebry. M.: Nauka, 1966. 318 s.

4. *Kantorovich L. V., Vulih B. Z., Pinsker A. G.* Funkcional'nyj analiz v poluuporjadochennyh prostranstvah. M.; L.: Gostehizdat, 1950. 548 s.
5. *Lovjagin Ju. N.* Bulevy algebry s dostatochnym chislom nepreryvnyh kvazimer. Dep. V VINITI. N 3111-V97. 1997. 25 s.
6. *Lovjagin Ju. N.* O nekotoryh voprosah teorii bulevyh algebr. Dep. V VINITI. N 3559-V87. 1987. 14 s.
7. *Popov V. A.* Additivnye i poluadditivnye funkcii na bulevyh algebrah // Sib. matem. zhurnal. 1976. T. 17. N 2. S. 331–339.
8. *Popov V. A.* O nekotoryh svojstvah polumer // XVI Gercenovskie chtenija. Matmatika: Nauchnye doklady. L.: LGPI im. A. I. Gercena, 1973. S. 98–102.
9. *Poroshkin A. G.* Uporjadochennye mnozhestva. Bulevy algebry: Ucheb. posobie po speckursu. Syktyvkar: Syktyvkarskij un-t, 1987. 85 s.
10. *Poroshkin A. G.* K voprosu o normiruemosti bulevyh algebr s nepreryvnoj vneshnej meroj // Sib. matem. zhurnal. 1980. T. 21. N 4. S. 216–220.
11. *Potepun A. V.* Nekotorye uslovija suwestvovanija mery na bulevoj algebre. Dep. V VINITI. N 6265-V86. 1986. 22 s.
12. *Band Ch.* Note on pathological submeasure // Proc. Conf.: Topol. and Mess. II. Creifswald, 1980. Part 2. P. 1–5.
13. *Geifman H.* Concerning measures on Boolean algebras // Pacif. J. Math. 1964. V. 14. N 1. P. 95–114.
14. *Maharam D.* Fn algebraic characterization of measure algebras // Ann. of Math. 1947. V. 48. N 1. P. 154–167.

В. Ф. Зайцев, Хоанг Нгы Хуан

АНАЛОГИ ВАРИАЦИОННЫХ СИММЕТРИЙ ОДУ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Обсуждается задача поиска симметрий уравнений третьего порядка, аналогичных вариационным симметриям. Решены четыре обратные задачи.

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальное уравнение третьего порядка, автономный первый интеграл, вариационная симметрия.

V. Zaitsev, Hoang Ngu Huan

ANALOGUES OF VARIATIONAL SYMMETRY OF THIRD ORDER ODE

The issue searching for "variation" symmetries of 3d-order ODEs is discussed. Four inverse problems have been solved.

Keywords: Inverse problem, 3d-order differential equation, autonomous first integral, variational symmetry.

Известно, что среди симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) особое место занимают **вариационные**, или **нетеровы**, в случае когда лагранжиан инвариантен относительно группы симметрии соответствующего уравнения Эйлера. Термины, которыми мы определили этот тип симметрии, более присущи механике и вариационному исчислению, но не теории ОДУ. И если нас интересует способ интегрирования уравнения, а не поиск экстремалей, то и нет необходимости использовать гамильтонов формализм. Более того, надо абстрагироваться от привычных представлений о том, что свойства ва-