4. *Kantorovich L. V., Vulih B. Z., Pinsker A. G.* Funkcional'nyj analiz v poluuporjadochennyh prostranstvah. M.; L.: Gostehizdat, 1950. 548 s.
5. *Lovjagin Ju. N.* Bulevy algebry s dostatochnym chislom nepreryvnyh kvazimer. Dep. V VINITI. N 3111-V97. 1997. 25 s.
6. *Lovjagin Ju. N.* O nekotoryh voprosah teorii bulevyh algebr. Dep. V VINITI. N 3559-V87. 1987. 14 s.
7. *Popov V. A.* Additivnye i poluadditivnye funkcii na bulevyh algebrah // Sib. matem. zhurnal. 1976. T. 17. N 2. S. 331–339.
8. *Popov V. A.* O nekotoryh svojstvah polumer // XVI Gercenovskie chtenija. Matmatika: Nauchnye doklady. L.: LGPI im. A. I. Gercena, 1973. S. 98–102.
9. *Poroshkin A. G.* Uporjadochennye mnozhestva. Bulevy algebry: Ucheb. posobie po speckursu. Syktyvkar: Syktyvkarskij un-t, 1987. 85 s.
10. *Poroshkin A. G.* K voprosu o normiruemosti bulevyh algebr s nepreryvnoj vneshnej meroj // Sib. matem. zhurnal. 1980. T. 21. N 4. S. 216–220.
11. *Potepun A. V.* Nekotorye uslovija suwestvovanija mery na bulevoj algebre. Dep. V VINITI. N 6265-V86. 1986. 22 s.
12. *Band Ch.* Note on pathological submeasure // Proc. Conf.: Topol. and Mess. II. Creifswald, 1980. Part 2. P. 1–5.
13. *Geifman H.* Concerning measures on Boolean algebras // Pacif. J. Math. 1964. V. 14. N 1. P. 95–114.
14. *Maharam D.* Fn algebraic characterization of measure algebras // Ann. of Math. 1947. V. 48. N 1. P. 154–167.

В. Ф. Зайцев, Хоанг Нгы Хуан

АНАЛОГИ ВАРИАЦИОННЫХ СИММЕТРИЙ ОДУ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Обсуждается задача поиска симметрий уравнений третьего порядка, аналогичных вариационным симметриям. Решены четыре обратные задачи.

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальное уравнение третьего порядка, автономный первый интеграл, вариационная симметрия.

V. Zaitsev, Hoang Ngu Huan

ANALOGUES OF VARIATIONAL SYMMETRY OF THIRD ORDER ODE

The issue searching for "variation" symmetries of 3d-order ODEs is discussed. Four inverse problems have been solved.

Keywords: Inverse problem, 3d-order differential equation, autonomous first integral, variational symmetry.

Известно, что среди симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) особое место занимают **вариационные**, или **нетеровы**, в случае когда лагранжиан инвариантен относительно группы симметрии соответствующего уравнения Эйлера. Термины, которыми мы определили этот тип симметрии, более присущи механике и вариационному исчислению, но не теории ОДУ. И если нас интересует способ интегрирования уравнения, а не поиск экстремалей, то и нет необходимости использовать гамильтонов формализм. Более того, надо абстрагироваться от привычных представлений о том, что свойства ва-

риационных симметрий могут быть присущи только симметриям уравнений ***четного*** порядка. А в огромном количестве литературных источников изложение вариационной симметрии существенно опирается на понятия лагранжевой и гамильтоновой механики — при поиске экстремали для функционала, содержащего производную порядка n, соответствующее уравнение Эйлера — Пуассона имеет порядок $2n$. Не облегчает ситуацию и использование термина «сопряженный оператор симметрии» (если оператор симметрии самосопряжен, то симметрия — вариационная). Но необходимым условием самосопряженности оказывается требование четности порядка уравнения [5]. И на подсознательном уровне складывается впечатление, что на уравнения нечетного порядка распространить понятие вариационной симметрии невозможно.

Очевидно, это не так. Например, простое уравнение третьего порядка $y''' = 2yy'$ автономно и имеет автономный первый интеграл $y'' = y^2 + C$, то есть симметрия этого уравнения абсолютно аналогична вариационной в том смысле, что первый интеграл ее «наследует», позволяя с ее помощью понизить порядок исходного уравнения сразу на две единицы. Нетривиальные примеры таких уравнений были найдены П. П. Аврашковым [1].

Поэтому весьма высока актуальность решения обратной задачи — поиск широких классов нелинейных уравнений нечетных порядков, допускающих аналоги вариационных симметрий. Следует заметить, что применение прямого метода, изложенного, например, в [2, 3], по-видимому, заранее обречено на неудачу в силу чрезвычайно громоздких вычислений. Необходимо найти условие совместности трех сложных уравнений: условия инвариантности исходного уравнения относительно произвольной (пусть даже точечной) симметрии, существования у него первого интеграла и условия инвариантности этого первого интеграла относительно той же симметрии. Однако (по крайней мере, для точечной симметрии) можно воспользоваться ***принципом подобия однопараметрических групп на плоскости*** [4], который, по существу, устанавливает группу эквивалентности на множестве интересующих нас точечных операторов.

В силу этого принципа достаточно рассмотреть класс ***автономных*** уравнений третьего порядка:

$$y''' = F\left(y, y', y''\right), \tag{1}$$

имеющих ***автономные*** первые интегралы, которые, естественно, будут «наследовать» симметрию $X = \partial_x$ исходного уравнения. Применение к этому классу произвольного обратимого точечного преобразования

$$x = f\left(t,u\right), \quad y = g\left(t,u\right), \quad f_u g_t - f_t g_u \neq 0 \tag{2}$$

позволит нам получить решение нашей обратной задачи. Выпишем условия, при выполнении которых уравнение (1) будет иметь автономный первый интеграл:

$$P = P\left(y, y', y''\right). \tag{3}$$

По определению первого интеграла

$$D_x\left(P\right) = R\left(y, y', y''\right)\left[y''' - F\left(y, y', y''\right)\right]; \tag{4}$$

здесь R — интегрирующий множитель, D_x — символ полной производной.

Из определения следует, что $R = P_{y''}$, и для поиска класса функций F остается одно уравнение:

$$y'\frac{\partial P}{\partial y} + y''\frac{\partial P}{\partial y'} + F\frac{\partial P}{\partial y''} = 0\,. \tag{5}$$

Выражение (5) дает нам общий вид правой части уравнения (1):

$$F = -\frac{y'P_y + y''P_{y'}}{P_{y''}}\,,$$

но практически этот результат тривиален — по любой функции $P = \left(y, y', y''\right)$ можно построить уравнение (1), для которого эта функция является его первым интегралом, сохраняющим симметрию, но этот результат следует прямо из определения (4). Вид получившегося уравнения оказывается непрогнозируемым — слишком велик произвол.

1. Рассмотрим уравнение

$$y''' = F\left(y\right) \tag{6}$$

и будем искать автономный первый интеграл, линейный по старшей производной $\left(y''\right)$:

$$P = R\left(y, y'\right)y'' + Q\left(y, y'\right). \tag{7}$$

Т е о р е м а 1. Не существует нетривиального уравнения (6) (то есть с $F\left(y\right) \neq 0$), имеющего автономный первый интеграл вида (7).

Доказательство. Подставляя (6), (7) в (5) и расщепляя по y'', получим систему

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_y y' + Q_{y'} = 0, \\ Q_y y' = -FR. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что интегрирующий множитель зависит только от $y : R = R\left(y\right)$. Из оставшихся уравнений получаем $Q = -\frac{1}{2}R'\left(y'\right)^2 + S\left(y\right)$, где $S\left(y\right)$ — произвольная функция y. Наконец, из последнего уравнения следует выражение

$$-\frac{1}{2}R''\left(y'\right)^3 + S'y' + FR = 0\,, \tag{8}$$

откуда (после расщепления по y') с необходимостью следует $F \equiv 0$.

З а м е ч а н и е 1. Из формулы (8) следует решение поставленной задачи в более широком классе уравнений

$$y''' = F\left(y, y'\right), \tag{9}$$

а именно

$$F = \frac{R''(y')^3 - 2S'y'}{2R}, \tag{10}$$

где R и S — произвольные функции переменной y. При этом первый интеграл имеет вид $P = Ry'' - \frac{1}{2}R'(y')^2 + S$.

Замечание 2. Если исследуется некоторый подкласс автономных уравнений (1), например подклассы (6) или (9), при применении принципа подобия необходимо дополнительное условие инвариантности подкласса. Так, в точечном преобразовании (2) функции f и g могут быть не любыми, а сохраняющими множество исходных переменных: $\{f,\ g\}$: $(y, y''') \to (u,\ \ddot{u})$ для уравнения (6) и, соответственно, $\{f,\ g\}$: $(y, y',\ y''') \to (u,\ \dot{u},\ \ddot{u})$ для уравнения (9).

Для уравнения (9) требование независимости третьей производной y''' от $\ddot{u}$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} f_u = 0, \\ g_{uu} = 0, \\ f_t g_{tu} - f_{tt} g_u = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что преобразование эквивалентности имеет вид

$$y = C\alpha'(t)u + \beta(t), \quad x = \alpha(t), \tag{11}$$

где $\alpha(t), \beta(t)$ — произвольные функции, C — произвольная константа.

Для уравнения (6) к системе добавляется еще одно уравнение:

$$3f_t^2 g_{ttu} - f_t f_{ttt} g_u - 6 f_t f_{tt} g_{tu} + 3 f_{tt}^2 g_u = 0,$$

при этом произвол в преобразовании эквивалентности становится существенно меньше, так как функция $\alpha(t)$ уже не произвольна.

В результате получаем

$$\begin{aligned} y &= \frac{C}{(C_1 t + C_2)^2} u + \beta, \\ x &= -\frac{1}{C_1(C_1 t + C_2)}. \end{aligned} \tag{12}$$

2. Будем теперь для уравнения (6) искать автономный первый интеграл, квадратичный по старшей производной (y''):

$$P = R(y, y')(y'')^2 + Q(y, y')y'' + S(y, y'). \tag{13}$$

Т е о р е м а 2. Уравнение

$$y''' = \left(ay^2 + by + c\right)^{-5/4}, \tag{14}$$

где a, b, c — произвольные константы, является единственным уравнением класса (6), имеющим квадратичный по старшей производной автономный первый интеграл.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы, получаем систему, из которой следует $R = R(y)$, $Q = -\frac{1}{2}R'(y')^2 + T(y)$, оставшиеся уравнения имеют вид

$$\begin{cases} S_{y'} - \frac{1}{2}R''(y')^3 + T'y' + 2RF = 0, \\ y'S_y + \left(T - \frac{1}{2}R'(y')^2\right)F = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Расщепление условия совместности системы (15) по степеням первой производной дает $R(y) = ay^2 + by + c$, $T(y) \equiv 0$, $5R'F + 4RF' = 0$, откуда и следует утверждение теоремы.

Первый интеграл уравнения (14) имеет вид

$$P = R(y'')^2 - \frac{1}{2}R'(y')^2 y'' + \frac{1}{8}R''(y')^4 - 2R^{-1/4}y'. \tag{16}$$

З а м е ч а н и е 3. Для более широкого класса уравнений (9) условие совместности системы (15) имеет вид

$$\left(\frac{1}{2}R'y' - T(y')^{-1}\right)F_{y'} + 2RF_y + \left(\frac{5}{2}R' + T(y')^{-2}\right)F = \frac{1}{2}R'''(y')^3 - T''y'.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$F = R^{-3/2}y'\Phi(u) + \frac{2RR'' - (R')^2}{8R^2}(y')^3 - \frac{2RT' - R'T}{4R^2}y', \tag{17}$$

где $u = R^{-1/2}(y')^2 + \int TR^{-3/2}dy$, R и T — произвольные функции переменной y, Φ — произвольная функция переменной u. Формула (17) дает ***все*** правые части уравнений (9), обладающих заданным свойством, но в частном случае при $T \equiv 0$ она выглядит проще, и

$$F = R^{-5/4}\Phi_1\left(R^{-1/4}y'\right) + \frac{2RR'' - (R')^2}{8R^2}(y')^3. \tag{18}$$

Для распространения полученных результатов на неавтономные уравнения необходимо применить к формулам (14) и (17) найденные преобразования эквивалентности для классов (6) и (9) — см. замечание 2.

З а м е ч а н и е 4. Естественно, формула (17) содержит в себе результат (10) — в этом случае квадратичный первый интеграл является квадратичной формой от линейного.

3. Рассмотрим теперь автономные первые интегралы, кубичные по старшей производной. Для класса (6) поиск интеграла вида

$$P = S(y, y')(y'')^3 + T(y, y')(y'')^2 + U(y, y')y'' + V(y, y') \tag{19}$$

с помощью стандартной процедуры приводит к системе

$$\begin{cases} S_{y'} = 0, \\ T_{y'} + y'S_y = 0, \\ U_{y'} + y'T_y + 3SF = 0, \\ V_{y'} + y'U_y + 2TF = 0, \\ y'V_y + UF = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Первые три уравнения системы (20) дают

$$S = S(y),$$

$$T = -\frac{1}{2}S'(y')^2 + \omega(y),$$

$$U = \frac{1}{8}S''(y')^4 - \frac{1}{2}\omega''(y')^2 - 3SFy' + \varphi(y).$$

Расщепление условия совместности четвертого и пятого уравнений системы (20) приводит к следующему результату:

$$S^{IV} = 0, \quad S = a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0,$$

$$\omega''' = 0, \quad \omega = b_2y^2 + b_1y + b_0,$$

$$24SF'' + 56S'F' + 35S''F = 0,$$

$$4\omega F' + 5\omega' F = 0,$$

$$\varphi \equiv 0.$$

Окончательно получаем выражение для $F : F = C\omega^{-5/4}$ и соотношения для констант $a_1 = \dfrac{b_1(4a_2b_2 - 3a_3b_1)}{4b_2^2}$, $a_0 = \dfrac{b_1^2(a_2b_2 - a_3b_1)}{4b_2^3}$, $b_0 = \dfrac{b_1^2}{4b_2}$.

Константы a_3, a_2, b_2 и b_1 остаются произвольными. Найденное значение b_0 превращает величину ω в полный квадрат. В дальнейшем для упрощения формул будем рассматривать уравнение

$$y''' = y^{-5/2}, \tag{21}$$

полагая везде $b_2 = 1, b_1 = 0$, то есть $a_1 = a_0 = 0$. При этом общий автономный подкласс, допускающий аналог нетеровой симметрии с кубичным по второй производной первым интегралом, может быть легко получен преобразованием эквивалентности $y \to c_1y + c_2$.

Дальнейшие вычисления дают структуру кубичного по второй производной первого интеграла (19) в виде $P = a_3P_1 + a_2P_2 + Q$, где Q — квадратичный по второй производной

первый интеграл уравнения (21), совпадающий с (16) при условии $a=1,\ b=c=0$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. Уравнение (21) с точностью до преобразования эквивалентности $y \to c_1 y + c_2$ является единственным уравнением класса (6), обладающим аналогом нетеровой симметрии с кубичным первым интегралом, причем имеется ***два*** функционально независимых интеграла такого вида:

$$P_1 = y^3 (y'')^3 - \frac{3}{2} y^2 (y'y'')^2 + \left(\frac{3}{4} y (y')^4 - 3y^{1/2} y' \right) y'' - \frac{1}{8} (y')^6 + \frac{3}{2} y^{-1/2} (y')^3 - 3y^{-1},$$

$$P_2 = y^2 (y'')^3 - y (y'y'')^2 + \left(\frac{1}{4} (y')^4 - 3y^{-1/2} y' \right) y'' + \frac{1}{6} y^{-3/2} (y')^3 - \frac{3}{2} y^{-2}.$$

З а м е ч а н и е 5. С учетом того, что уравнение (21) имеет квадратичный автономный первый интеграл, получается, что всего автономных первых интегралов оказывается три. Очевидно, что среди них функционально независимых будет только два, что и подтверждается прямой проверкой.

З а м е ч а н и е 6. Наличие двух функционально независимых автономных первых интегралов позволяет проинтегрировать уравнение (21) в квадратурах. Для этого, например, из уравнений $P_2 = C_1$ и $Q = C_2$ надо исключить вторую производную y'', в результате чего получается автономное уравнение первого порядка $\Phi(y, y', C_1, C_2) = 0$, которое легко интегрируется методом введения параметра.

З а м е ч а н и е 7. Уравнение (21) допускает двумерную алгебру симметрий с операторами $X_1 = \partial_x,\ \ X_2 = 7x\partial_x + 6y\partial_y$, однако второй оператор X_2 первыми интегралами уравнения (21) не наследуется.

Для более широкого класса (9) следует учитывать, что в системе (20) $F = F(y, y')$, поэтому решить сразу удается только два первых уравнения системы:

$$\begin{aligned} &S = S(y), \\ &T = -\frac{1}{2} S'(y')^2 + \omega(y). \end{aligned} \tag{22}$$

Третье уравнение системы тоже можно проинтегрировать, если выполнить переобозначение неизвестной функции F: $F = \dfrac{\partial G}{\partial y'}$. Тогда

$$U = \frac{1}{8} S''(y')^4 - \frac{1}{2} \omega'(y')^2 - 3SG + \varphi(y). \tag{23}$$

В результате остается система двух уравнений:

$$\begin{cases} V_{y'} = -y' U_y - 2TG_{y'}, \\ V_y = -\dfrac{1}{y'} U G_{y'}. \end{cases}$$

Исключая функцию V с помощью условий совместности, получаем для определения функции G ***нелинейное*** уравнение в частных производных ***второго порядка***:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{y'}UG_{y'}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(TG_{y'}\right)-y'U_{yy}=0,$$

где функции $U=U(G)$ и T определяются соответственно формулами (23) и (22).

Таким образом, можно отметить следующее:

1. Существуют уравнения нечетных порядков (в частности, третьего), обладающие симметриями, аналогичными вариационным (нетеровым).

2. Множество уравнений третьего порядка, имеющих такие симметрии, существенно «беднее», чем соответствующие множества уравнений четных порядков. В частности, среди автономных уравнений вида $y'''=F(y)$ найдены единственные представители этого класса, имеющие квадратичный или кубичный по второй производной автономный первый интеграл.

3. Эти уравнения — соответственно уравнения (14) и (21) — являются следствиями частных случаев уравнения пограничного слоя неньютоновской (псевдопластичной) жидкости [6] $y'''=y\left|y''\right|^{2-n}$. В связи с этим особый интерес представляет физический смысл полученных первых интегралов (законов сохранения).

4. Для наиболее распространенных структур первых интегралов (линейных и квадратичных по старшей производной) трудоемкость решения обратной задачи сопоставима с таковой для уравнений четных порядков. Для более сложных (кубичных по старшей производной) задача сводится к нелинейному уравнению в частных производных второго порядка (и здесь имеется аналогия с уравнениями четных порядков — для уравнений второго порядка подобная задача сводится к стационарному уравнению Хохлова — Заболоцкой).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аврашков П. П.* Алгоритмы симметрийного анализа обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Казань, 2004. 99 с.
2. *Зайцев В. Ф., Линчук Л. В.* Дифференциальные уравнения. Структурная теория. Ч. 1. СПб.: ООО «Книжный дом», 2008. 128 с.
3. *Зайцев В. Ф., Линчук Л. В.* Дифференциальные уравнения. Структурная теория. Ч. 2. СПб.: ООО «Книжный дом», 2008. 100 с.
4. *Ибрагимов Н. Х.* Азбука группового анализа. М.: Знание. Сер. «Математика и кибернетика». 1989. № 8. 44 с.
5. *Bluman G. W., Anco S. C.* Symmetry and integration methods for differential equations (AMS 154). Springer, 2002. 418 p.
6. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. 2nd ed. Chapman & Hall / CRC, 2003. 814 p.

REFERENCES

1. *Avrashkov P. P.* Algoritmy simmetrijnogo analiza obyknovennyh differencial'nyh uravnenij tret'ego porjadka: Dis. … kand. fiz.-mat. nayk. Kazan', 2004. 99 s.
2. *Zajcev V. F., Linchuk L. V.* Differencial'nye uravnenija. Strukturnaja teorija. Ch. 1. SPb.: OOO «Knizhnyj dom», 2008. 128 s.
3. *Zajcev V. F., Linchuk L. V.* Differencial'nye uravnenija. Strukturnaja teorija. Ch. 2. SPb.: OOO «Knizhnyj dom», 2008. 100 s.

4. *Ibragimov N. H.* Azbuka gruppovogo analiza. M.: Znanie. Ser. «Matematika i kibernetika». 1989. № 8. 44 s.
5. *Bluman G. W., Anco S. C.* Symmetry and integration methods for differential equations (AMS 154). Springer, 2002. 418 p.
6. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. 2nd ed. Chapman & Hall / CRC, 2003. 814 p.

А. В. Флегонтов, В. В. Фомин

СИСТЕМА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Предлагаются технические решения по структуре, функциям и организации инструментария интеллектуального анализа данных, основанного на технологии WEB систем и облачных ресурсов. Формулируются стратегические направления разработки программной системы для повышения эффективности обработки больших массивов электронных данных для задач интеллектуального анализа: классификации, обучения, прогнозирования.

Ключевые слова: искусственный интеллект, программные системы, интернет, алгоритмы, базы данных и знаний.

A. Flegontov, V. Fomin

SOFTWARE SYSTEM FOR DATA PROCESSING

Technical solutions are suggested for structure, functions and organization of data processing tools based on WEB technology systems and cloud resources. We formulate the strategic direction of the development of a software system for higher-performance processing of large volumes of electronic data for the problems of intellectual structural analysis: classification, machine learning and prognostication.

Keywords: artificial intellect, software systems, internet, algorithms, data and knowledge bases.

Сегодня день можно констатировать, что за последние десятилетия произошло интенсивное развитие автоматизированных информационных систем (АИС), в том числе в таких областях, как сетевые технологии Internet, способы хранения и представления знаний, языки и инструментарий программирования, методы искусственного интеллекта, алгоритмы распределенных и облачных вычислений и т. д.

Научно-технические достижения в области искусственного интеллекта повлияли на формирование новых и трансформацию старых классов информационных систем — интеллектуальные информационные системы, системы интеллектуального анализа данных, экспертные системы, системы поддержки принятия решений и пр. К сожалению, все современные инструментарии в большинстве случаев разрозненны, решают частнопредметные задачи или заточены по одному классу систем. Вместе с тем уровень их автоматизации позволяет сделать вывод о возможности разработки «над-системы», интегрирующей в своем составе все наиболее развитые инструментарии (подходы, методы, моде-