14. *Kaminsky W., Fahnenstich A. and Haussühl S.* Magneto-electrogyration in cubic $Sr(NO_3)_2$, $Ba(NO_3)_2$ and $Pb(NO_3)_2$ // Annalen der Physik. 1992. Volume 504. № 2. P. 92–97.
15. *Kukhtarev N. V., Dovgalenko G. E.* Self-diffraction electrogyration and electroellipticity in centrosymmetric crystals // Sov. J. Quantum Electron. 1986. Vol. 16. № 1. P. 113–114.
16. *Moskvin A. S., Zenkov A. V.* Huge magneto-optic effects in Bi-containing iron garnets: A theoretical consideration // Solid State Communications. 1991. Vol. 80. № 9. P. 739–746.
17. *O'dell T. H. and White E. A.* Electric field induced faraday rotation in chromic oxide // Phil. Mag. 1970. Vol. 22. P. 649–653.
18. *Vlokh O. G., Zarik A. V.* The effect of electric field on the polarization of light in the $Bi_{12}SiO_{20}$, $Bi_{12}GeO_{20}$, $NaBrO_3$ crystals // Ukr. Fiz. Zhurn. 1977. Vol. 22. № 6. P. 1027–1031.
19. *Wiehl L., Friedrich A., Haussuh E., Morgenroth W., Grzechnik A., Friese K., Winkler B., Refson K., Milman V.* Structural compression and vibrational properties of $Bi_{12}SiO_{20}$ sillenite from experiment and theory // Journal of Physics: Condensed Matter. 2010. Vol. 22. № 50. 16 p.

***А. Н. Макаренко, В. В. Обухов,***
***К. Е. Осетрин, И. В. Кирнос***

# КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТИПА LITTLE RIP В ГРАВИТАЦИИ ГАУССА — БОННЕ

*В статье построен ряд космологических моделей типа Little Rip, которые описывают ускоренное расширение Вселенной, свободное от сингулярностей будущего. Модели построены в рамках модифицированной теории гравитации Гаусса — Бонне.*

**Ключевые слова:** космология, ускоренное расширение, сингулярность будущего, гравитация Гаусса — Бонне.

***A. Makarenko, V. Obukhov, K. Osetrin, I. Kirnos***

## THE LITTLE RIP MODELS IN GAUSS-BONNET MODIFIED GRAVITY

*The paper constructs Little Rip cosmological models which describe the accelerated expansion of the Universe free from singularities of the future. The models are constructed in the Gauss — Bonnet modified of gravity.*

**Keywords**: cosmology, accelerated expansion, singularity of the future, Gauss-Bonnet gravity.

Недавние астрономические наблюдения показали, что современная Вселенная расширяется с ускорением [8]. Ускоренное расширение обеспечивает так называемая темная энергия, которая составляет более чем 70% всей энергии во Вселенной. Происхождение темной энергии не ясно, существуют различные модели, например: скалярные, спинорные, (не-)абелевы векторные теории, модели с космологической постоянной, с идеальной жидкостью со сложным уравнением состояния, модели с высшими производными и т. д. На сегодняшний момент нельзя однозначно выбрать одну из них, поскольку космологические параметры определены с недостаточной точностью. Даже их современные значения имеют погрешность в 3–5%. Однако подобные модели приводят к возникновению дополнительных компонент — инфлатонов, темной материи и т. д. В связи с этим возникает вопрос об их ненаблюдаемости и взаимодействии с обычной материей. Поэтому сценарии, свободные от подобных проблем, вызывают несомненный интерес. Одним из таких сценариев является модифицированная теория гравитации, которая является классическим обобщением общей теории относительности. В качестве действия выбирается некоторая скалярная функции космологических инвариантов. Наибольшей популярностью пользуются теории, в которых действие является произвольной функцией скалярной кривизны и/или инварианта Гаусса — Бонне (см. обзор [7] и литературу в нем).

Кроме того, недавние наблюдения за микроволновым излучением [5] показали, что эффективный параметр уравнения состояния для темной энергии $w_{DE}$, который соответствует отношению давления темной энергии к ее плотности энергии, лежит в промежутке $-1{,}11 < w_{DE} < -0{,}86$. В этот диапазон укладывается несколько различных моделей ускоренного расширения. Во-первых, при значении $w_{DE} = -1$ расширение соответствует модели космологической постоянной (решение де Ситтера). При значении $w_{DE} > -1$ расширение идет в фазе квинтэссенции, а для $w_{DE} < -1$ — в фазе фантома. Даже если сейчас расширение идет по такому сценарию, фаза фантома или квинтэссенции возможна как в будущем, как и в прошлом. Считается, что расширение Вселенной началось с сингулярности, Большого Взрыва. И фантомные модели имею характерную особенность — они эволюционируют в различные типы сингулярности будущего (Big Rip и т. д.) [1].

Недавно появились модели, свободные от таких сингулярностей (Little Rip) [2; 4], для которых $w_{DE} < -1$, т. е. формально они относятся к фантомному типу, эволюция которого, как уже отмечалось выше, заканчивается сингулярностью. Для моделей типа Little Rip плотность темной энергии со временем увеличивается и асимптотически приближается к «–1» достаточно быстро, что позволяет избежать сингулярности (сингулярность отодвигается в бесконечность).

В данной работе построено несколько моделей Little Rip в модифицированной гравитации типа Гаусса — Бонне.

Начнем с действия [6]:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa^2}R + f(G) + L_m\right], \tag{1}$$

где $\kappa^2 = 8\pi G_N$, $G_N$ — постоянная Ньютона, а G — инвариант Гаусса — Бонне:

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma}. \tag{2}$$

Варьируя действие (1) по метрическому тензору $g_{\mu\nu}$, получим уравнения движения:

$$\begin{gathered} 0 = \frac{1}{2k^2}(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) + T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f(G) - 2f_G RR^{\mu\nu} + 4f_G R^{\mu}_{\rho}R^{\nu\rho} \\ -2f_G R^{\mu\rho\sigma\tau}R^{\nu}_{\rho\sigma\tau} - 4f_G R^{\mu\rho\sigma\nu}R_{\rho\sigma} + 2(\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}f_G)R - 2g^{\mu\nu}(\nabla^2 f_G)R - \\ -4(\nabla_{\rho}\nabla^{\mu}f_G)R^{\nu\rho} - 4(\nabla_{\rho}\nabla^{\nu}f_G)R^{\mu\rho} + 4(\nabla^2 f_G)R^{\mu\nu} + 4g^{\mu\nu}(\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}f_G)R^{\rho\sigma} - \\ -4(\nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}f_G)R^{\mu\rho\nu\sigma}, \end{gathered} \tag{3}$$

где приняты следующие обозначения: $f_G = f'(G)$ и $f_{GG} = f''(G)$ ($\,' = \partial/\partial G$). Так как современные наблюдения показывают, что Вселенная близка к пространственно-плоской модели Фридмана — Робертсона — Уокера, ограничимся именно этим случаем. Тогда метрика примет следующий вид:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2, \tag{4}$$

где $a(t)$ — масштабный фактор, зависящий от космологического времени $t$. Нетрудно записать уравнения (3) для метрики (4):

$$0 = -\frac{3}{\kappa^2} H^2 + G f_G - f(G) - 24 \dot{G} H^3 f_{GG} + \rho_m, \tag{5}$$

$$0 = 8H^2 \ddot{f}_G + 16H(\dot{H} + H^2)\dot{f}_G + \frac{1}{\kappa^2}(2\dot{H} + 3H^2) + f - G f_G + p_m. \tag{6}$$

Здесь H — параметр Хаббла $H = \dot{a}/a$, $\dot{} = \partial/\partial t$, $\rho_m$ — плотность энергии материи, удовлетворяющая стандартному уравнению непрерывности:

$$\dot{\rho}_m + 3H(1+w)\rho_m = 0. \tag{7}$$

Выразим скалярную кривизну, инвариант Гаусса — Бонне и его производную через параметр Хаббла и его производные:

$$G = 24(\dot{H}H^2 + H^4), \quad R = 6(\dot{H} + 2H^2), \tag{8}$$

$$\dot{G} = 24H(\ddot{H}H + 2\dot{H}^2 + 4H^2). \tag{9}$$

Путем несложных преобразований можно убедиться, что уравнение (6) является дифференциальным следствием уравнения (5). Перепишем теперь уравнение (5) с учетом (8) и (9):

$$0 = -\frac{3}{\kappa^2} H^2 + 24(\dot{H}H^2 + H^4) f_G - f(G) - 24^2 H^4 (\ddot{H}H + 2\dot{H}^2 + 4H^2) f_{GG} + \rho_m. \tag{10}$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение на функцию $f$; выбирая определенный вид параметра Хаббла $H$, получаем дифференциальное уравнение второго порядка. Подобный механизм построения функции $f(G)$ получил название метод реконструкции [3].

Модели типа Little Rip можно построить для различных типов метрики, мы рассмотрим метрику вида [2; 6]:

$$a(t) = \exp[\alpha(e^{\beta t} - 1)], \tag{11}$$

где $\alpha$ и $\beta$— постоянные.

Тогда параметр Хаббла примет вид

$$H(t) = \alpha\beta e^{\beta t}. \tag{12}$$

Для такой модели производная параметра Хаббла пропорциональна самому параметру, и несложно получить уравнение на функцию *f*:

$$0 = -\frac{3}{\kappa^2}H^2 - f + \frac{9\beta^2 H + 19\beta H^2 + 4H^3}{(3\beta+4H)^2}\frac{df}{dH} - \frac{\beta H^2}{3\beta+4H}\frac{d^2 f}{dH^2} + \rho_m. \tag{13}$$

Рассмотрим для простоты случай $\rho_m = const$, получим следующее решение уравнения (13):

$$f(H) = -\frac{18\beta^3 H + 3\beta H^3 + 3H^4 + 2\beta^2\left(6H^2 - \kappa^2\rho_m\right)}{2\beta^2\kappa^2} + \frac{H^3(\beta+H)C_1}{1+\beta} + \\ + \frac{HC_2\left(-\beta e^{\frac{H}{\beta}}\left(3\beta^2 + 2\beta H + H^2\right) + H^2(\beta+H)\mathrm{ExpIntegralEi}\left[\frac{H}{\beta}\right]\right)}{2\beta^3(1+\beta)}. \tag{14}$$

Здесь $ExpIntegralEi[z]$ — экспоненциальный интеграл от функции $\mathrm{Ei}(z) = -\int_{-z}^{\infty} e^{-t}t\,dt$, а $C_1$ и $C_2$ — постоянные интегрирования. Полученное решение записано через параметр Хаббла, а не через инвариант Гаусса — Бонне. Это связано с тем, что явно получить вид *f* как функцию от *G* не удается. Так как возникает уравнение четвертого порядка (8), решить которое достаточно сложно. Однако это легко можно сделать в пределе больших H. В этом случае можно считать, что $G = 24H^4$.

Существует еще один метод реконструкции космологических моделей (см., например, работу [1]). Вводится дополнительное скалярное поле, которое впоследствии отождествляется с космологическим временем *t*. Продемонстрируем данный метод на нашем примере. Рассмотрим действие вида

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa^2}(R + P(\phi)G + Q(\phi)) + L_m\right],$$

где *P* и *Q* — некоторые функции скаляра $\phi$. Варьируя данное действие относительно поля $\phi$, мы получим следующее уравнение:

$$\frac{dP}{d\phi}G + \frac{dQ}{d\phi} = 0.$$

Данное уравнение необходимо разрешить и найти вид $\phi(G)$. Затем, подставив полученное выражение в действие, мы найдем искомую функцию *F(G)*:

$$F(G) = P(G)G + Q(G).$$

Теперь, отождествляя поле $\phi$ с космологическим временем $t$, нетрудно получить уравнения на $P$ и $Q$. Они примут следующую форму:

$$2\frac{d}{dt}\left(\dot{q}^2(t)\frac{dP(t)}{dt}\right)-2\dot{q}^3(t)\frac{dP(t)}{dt}+\ddot{q}(t)=0,$$

$$Q(t)=-24\dot{q}^3(t)\frac{dP(t)}{dt}-6\dot{q}^2(t). \qquad (15)$$

Здесь $q(t)$ определяется следующим выражением:

$$a(t)=a_0e^{q(t)}.$$

Для нашего примера $\dot{q}(t)=\alpha\beta e^{\beta t}$. Найдем решение уравнения на $P$ и $Q$ (15):

$$P(t)=c_2+\frac{1}{2\alpha^2\beta}\left(-\frac{e^{-2\beta t}}{2\beta}-\alpha^2e^{\alpha e^{\beta t}-2\beta t}(1+\alpha e^{\beta t})c_1+\alpha^4c_1 ExpIntegralEi[\alpha e^{\beta t}]\right),$$

$$Q(t)=-6\alpha\beta^2e^{\beta t}(2+\alpha e^{\beta t}+4c_1\alpha^2\beta e^{\alpha e^{\beta t}}).$$

Здесь $c_1$ и $c_2$ — постоянные интегрирования. Теперь необходимо выразить $t$ через $G$. Однако мы сразу приходим к уравнению (8) и получаем эквивалентную предыдущему методу картину. Окончательно вид функции $F(G)$ будет таким же. Проанализируем теперь полученное решение.

Нетрудно увидеть, что получившееся решение состоит из трех слагаемых (14). Первое слагаемое пропорционально различным степеням параметра Хаббла и играет ведущую роль при малых H. При росте параметра Хаббла ведущая роль перейдет сначала к третьему слагаемому, затем — ко второму, а при стремлении H к бесконечности — снова к третьему. Такое поведение связано с тем, что третье слагаемое состоит из двух частей одного порядка, но разного знака. Хотя они и растут быстрее всех остальных слагаемых, при средних значениях параметра Хаббла они компенсируют друг друга. Их разница становится преобладающей только при очень больших значениях H.

Использованный здесь метод реконструкции позволяет построить модель модифицированной гравитации Гаусса — Бонне, описывающей почти любые типы параметра Хаббла.

Рассмотрим в качестве примера характерную степенную зависимость метрики от времени, приводящую к сингулярности будущего. В этом случае параметр Хаббла выбирается в виде

$$H(t)=\frac{\alpha}{t_s-t}. \qquad (16)$$

Тогда нетрудно записать масштабный фактор:

$$a(t)=\frac{C}{(t_s-t)^{\alpha}}.$$

Здесь $\alpha$, $t_s$ и $C$ — постоянные числа.

В этом случае уравнение (10) принимает вид

$$0=\frac{-4(1+\alpha)\left(3\alpha^2-\kappa^2\rho_0(t_s-t)^2\right)+\kappa^2(t_s-t)^2\left(-4(1+\alpha)f(t)-(t_s-t)\left(-(6+\alpha)f'(t)+(t_s-t)f''(t)\right)\right)}{4(1+\alpha)\kappa^2(t_s-t)^2}. \quad (17)$$

В данном случае мы пренебрегли материальным вкладом ($\rho_m=0$). Нетрудно найти решение этого уравнения:

$$f(t)=\rho_0-\frac{6\alpha^2(1+\alpha)}{(-1+\alpha)\kappa^2(t_s-t)^2}+(t_s-t)^{-1-\alpha}C_1+\frac{C_2}{(t_s-t)^4}. \quad (18)$$

В данном случае можно явно выразить время через параметр Хаббла:

$$t_s-t=\frac{2^{3/4}3^{1/4}\left(\alpha^3G+\alpha^4G\right)^{1/4}}{\sqrt{G}}. \quad (19)$$

И мы получим функцию $f$ как функцию инварианта Гаусса — Бонне:

$$f(G)=-\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\alpha^3(1+\alpha)G}}{(-1+\alpha)\alpha\kappa^2}+\rho_0-i^{-2\alpha}2^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}3^{\frac{1}{4}(-1-\alpha)}G^{\frac{1+\alpha}{2}}\left(\alpha^3(1+\alpha)G\right)^{\frac{1}{4}(-1-\alpha)}C_1. \quad (20)$$

Если в качестве материи в пространстве выбрать пыль $\rho_m=\frac{\rho_0}{a^3}$, получим следующее решение уравнения (17):

$$\begin{aligned}f(G)=&-\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\alpha^3(1+\alpha)G}}{(-1+\alpha)\alpha\kappa^2}+\frac{2^{2+\frac{9\alpha}{4}}3^{3\alpha/4}(1+\alpha)G^{-3\alpha/4}\left(\alpha^3(1+\alpha)\right)^{3\alpha/4}\rho_0}{\left(4+19\alpha+12\alpha^2\right)C^3}-\\&-2^{-\frac{3}{4}(1+\alpha)}3^{\frac{1}{4}(-1-\alpha)}e^{-i\alpha\pi}G^{\frac{1+\alpha}{4}}\left(\alpha^3(1+\alpha)\right)^{\frac{1}{4}(-1-\alpha)}C_1.\end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, показано, что одна из перспективных моделей темной энергии может быть легко построена в рамках модифицированной гравитации Гаусса — Бонне. Хотя явно получить вид функции *f(G)* и не удается, было получено параметрическое решение. Кроме того, нетрудно провести численный анализ полученного решения и убедиться, что оно достаточно интересно и перспективно. В качестве примера в рамках модифицированной гравитации Гаусса — Бонне был получен вид функции *f(G)*, описывающий степенную зависимость масштабного фактора от времени и приводящий к сингулярности будущего.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Bamba K., Nojiri S., Odintsov S. D.* The Universe future in modified gravity theories: Approaching the finite-time future singularity // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2008. Vol. 0810. S. 045-1–045-23.
2. *Brevik I., Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S. D.* Viscous Little Rip Cosmology // Physical Review D. 2011. Vol. 84. S. 103508-1–103508-9.
3. *Elizalde E., Myrzakulov R., Obukhov V. V., Sáez-Gómez D.* LambdaCDM epoch reconstruction from F(R,G) and modified Gauss-Bonnet gravities // Classical and Quantum Gravity. 2010. Vol. 27. № 9. S. 095007-1–095007-9.
4. *Komatsu E. et al.* Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Cosmological Interpretation // The Astrophysical Journal. Supplement Series. 2009. Vol. 180. № 2. S. 330–376.
5. *Frampton P. H., Ludwick K. J., Scherrer R. J.* The Little Rip // Physical Review D. 2011. Vol. 84. S. 063003-1–063003-5.
6. *Nojiri S., Odintsov S. D.* Modified Gauss-Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy // Physics Letters B. 2005. Vol. 631. S. 1–6.
7. *Nojiri S., Odintsov S. D.* Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models // Physics Reports. 2011. Vol. 505. S. 59–144.
8. *Riess A. G., et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant // *The Astronomical Journal*. 1998. Vol. 116. № 3. S. 1009–1038.



***Е. Н. Лушин, Р. А. Кастро***


# СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ СТЕКЛОВАНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ТЕТРАЗОЛА


*Представлены результаты исследования частотной зависимости диэлектрической проницаемости в широком интервале температур в тетразолсодержащих полимерах. Обнаружено, что температура, при которой происходит смена характера зависимости обратной величины диэлектрической проницаемости от температуры для всех изученных нами систем, совпадает с их температурой стеклования.*



**Ключевые слова:** тетразолсодержащие полимеры, температура стеклования, диэлектрическая релаксация.



***E. Lushin, R. Castro***


## DETERMINATION OF GLASS TRANSITION TEMPERATURE IN COMPOSITE POLYMER MATERIALS BASED ON TETRAZOLE


*The results of the study of the frequency dependence of the dielectric constant in a wide range of temperatures in the tetrazole polymers are presented. It has been found that the temperature at which the dielectric constant changes sharply in all systems is the glass transition temperature.*



**Keywords:** tetrazole polymers, glass transition temperature, dielectric relaxation.