МАТЕМАТИКА

В. Ф. Зайцев, Хоанг Нгы Хуан

АНАЛОГИ ВАРИАЦИОННЫХ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЙ ВИДА $y''' = F(y, y', y'')$

Рассматривается задача поиска симметрий уравнений 3-го порядка, содержащих «предстаршую» производную, аналогичных вариационным симметриям.

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальное уравнение 3-го порядка, автономный первый интеграл, вариационная симметрия.

V. Zaitsev, Hoang Ngu Huan

ANALOGUES OF VARIATIONAL SYMMETRY OF THE EQUATION OF THE TYPE $y''' = F(y, y', y'')$

We discuss the problem of search of the «variational» symmetries of the equation of the type $y''' = F(y, y', y'')$.

Keywords: Inverse problem, 3d-order differential equation, autonomous first integral, variational symmetry.

Настоящая работа продолжает исследование уравнений третьего порядка, обладающих аналогами вариационных симметрий [1]. Напомним, что вариационной симметрией называется симметрия, «наследуемая» первым интегралом исследуемого уравнения, что позволяет понизить его порядок сразу на две единицы. В отличие от работы [1], в данной статье исследуются уравнения, содержащие «предстаршую» производную y''.

Очевидно, поиск подобных уравнений в общем виде сводится к доказательству совместности условий инвариантности и условий существования первого интеграла заданного вида с такими же условиями инвариантности. При этом трудоёмкость реализации такого алгоритма оказывается слишком высокой. Поэтому в качестве исходного подкласса мы рассмотрим подкласс автономных уравнений, априорно допускающий оператор $X = \partial_x$, и будем искать для него автономный первый интеграл. Для нахождения общего класса достаточно будет (в силу принципа подобия локальных однопараметрических групп на плоскости) применить произвольное преобразование, являющееся элементом группы эквивалентности исследуемого класса.

1. Рассмотрим уравнения вида

$$y''' = F(y, y', y'')G(y''), \tag{1}$$

где $G(y'')$ — произвольная функция, а F подлежит определению. Потребуем, чтобы уравнение (1) имело автономный первый интеграл. Очевидно, после деления на G уравнение (1) принимает форму

$$\frac{y'''}{G(y'')} = F(y, y', y''), \tag{2}$$

и левая часть выражения (2) становится полной производной. Для выполнения поставленных условий необходимо и достаточно, чтобы и правая часть (2) являлась бы точной производной:

$$F(y, y', y'') = D_x H(y, y') = \frac{\partial H}{\partial y'} y'' + \frac{\partial H}{\partial y} y'.$$

Отсюда следует, что возможны следующие случаи:

1а. Функция F линейна по второй производной, тогда первый интеграл уравнения [1] имеет вид

$$P = \int \frac{dy''}{G(y'')} - H(y, y').$$

1б. Функция F не зависит от второй производной, тогда первый интеграл уравнения [1] имеет вид

$$P = \int \frac{dy''}{G(y'')} - H(y).$$

В этом случае функция F линейна по первой производной: $F = H(y)y'$, где H — произвольна.

1в. Отметим важный случай степенной зависимости функции G от «предстаршей» производной, когда $G = (y'')^n$. Тогда

$$P = \begin{cases} (y'')^{1-n} - (1-n)H(y, y'), & \text{если} \quad n \neq 1, \\ \ln y'' - H(y, y'), & \text{если} \quad n = 1. \end{cases}$$

Уравнения подобного типа встречаются в теории пограничного слоя. Представляется интересным изучение физических приложений полученных результатов, аналогичных вариационным (нётеровым) симметриям уравнений чётных порядков.

2. Наряду с классом (1) будем рассматривать ещё один вид уравнений, содержащих «предстаршую» производную y'':

$$y''' = F(y, y'') \tag{3}$$

и имеющих автономные первые интегралы, которые, естественно, будут «наследовать» симметрию $X = \partial_x$ исходного уравнения. Класс (3) допускает точечную группу эквивалентности

$$y = \alpha(t)u + \beta(t), \qquad x = \gamma(t), \tag{4}$$

где $\gamma(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(\gamma'')^2 = C_1(\gamma')^3$, $\alpha(t) = C_2\sqrt{\gamma_t}$, функция $\beta(t)$ произвольна. Заметим, что в общем случае функция $\gamma(t)$ представима через интеграл от эллиптических функций Вейерштрасса. Применение группы эквивалентности (4) к найденным уравнениям (3) позволит нам получить решение нашей обратной задачи. Выпишем условия, при выполнении которых уравнение (3) будет иметь автономный первый интеграл

$$P = P(y, y', y''). \tag{5}$$

По определению первого интеграла,

$$D_x(P) = R(y, y', y'')[y''' - F(y, y', y'')]; \tag{6}$$

здесь R — интегрирующий множитель, D_x — символ полной производной. Из определения следует, что $R = P_{y''}$, и для поиска класса функций F остаётся одно уравнение

$$y' \frac{\partial P}{\partial y} + y'' \frac{\partial P}{\partial y'} + F \frac{\partial P}{\partial y''} = 0. \tag{7}$$

1. Рассмотрим класс уравнений

$$y''' = F(y)(y'')^2 + G(y)y'' + H(y) \tag{8}$$

и будем искать автономный первый интеграл, линейный по старшей производной (y''):

$$P = R(y, y')y'' + Q(y, y'). \tag{9}$$

Теорема 1. Существует единственное нетривиальное автономное уравнение (8) с $F \equiv 0$ (т. е. линейное по второй производной), имеющее автономный первый интеграл вида (9), а именно:

$$y''' = \frac{cy''}{ay+b}, \tag{10}$$

где a, b, c — произвольные константы.

Доказательство. Подставляя (8), (9) в (7) и расщепляя по y'', получим систему

$$\begin{cases} R_{y'} + RF = 0, \\ Q_{y'} + R_y y' + RG = 0, \\ Q_y y' + RH = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Так как $F \equiv 0$, из первого уравнения системы следует, что интегрирующий множитель зависит только от y: $R = R(y)$. Из оставшихся уравнений получаем

$$Q = -\frac{1}{2}R'(y')^2 - RGy' + \omega(y),$$

где $\omega(y)$ — произвольная функция y. Наконец, из последнего уравнения следует выражение

$$-\frac{1}{2}R''(y')^3 - (G'R + GR')(y')^2 + \omega' y' + RH = 0,$$

откуда (после расщепления по y') с необходимостью следует

$$R'' = 0, \quad (GR)' = 0, \quad \omega' = 0, \quad RH = 0.$$

Поэтому, если $R \not\equiv 0$, то $H \equiv 0$, $R = ay + b$, $G = \dfrac{c}{ay+b}$, $\omega = C$. Окончательно получаем первый интеграл в виде

$$P = (ay+b)y'' - \frac{a}{2}(y')^2 - cy'. \tag{12}$$

Пусть теперь $F \not\equiv 0$. Тогда из первого уравнения системы (9) находим $R = S(y)e^{-Fy'}$, из второго уравнения — функцию Q:

$$Q = -\frac{e^{-Fy'}}{F^3}\left[SF^2F'(y')^2 + F(2SF' - S'F)y' + 2SF' - S'F - SF^2G\right].$$

Очевидно, третье уравнение (после сокращения на $e^{-Fy'}$) примет вид

$$A_4(y)(y')^4 + A_3(y)(y')^3 + A_2(y)(y')^2 + A_1(y)y' + SH = 0,$$

поэтому при $S \not\equiv 0$ оказывается, что $H \equiv 0$, и все $A_i = 0, \quad i = 1, \dots 4$. Из равенства $F_4 = 0$ следует $F' = 0$, т. е. $F = \alpha$. Из остальных условий без труда получаем $S = ay + b, \quad G = \dfrac{c}{ay+b}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Уравнение

$$y''' = \alpha(y'')^2 + \frac{cy''}{ay+b} \tag{13}$$

является единственным уравнением вида (8) с $F \not\equiv 0$, имеющим автономный первый интеграл вида (9), а именно:

$$P = \left[(ay+b)y'' + \frac{\alpha a y' + a + \alpha c}{\alpha^2}\right] e^{\alpha y'}. \tag{14}$$

1. Будем теперь для уравнения (8) искать автономный первый интеграл, квадратичный по старшей производной (y'')

$$P = R(y, y')(y'')^2 + Q(y, y')y'' + S(y, y'). \tag{15}$$

Рассуждая аналогично п. 1, приходим к системе

$$\begin{cases} R_{y'} + 2RF = 0, \\ Q_{y'} + R_y y' + QF + 2RG = 0, \\ S_{y'} + Q_y y' + QG + 2RH = 0, \\ S_y y' + QH = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Если $F \equiv 0$, интегрирующий множитель зависит от y: $R = R(y)$, из второго уравнения находим Q

$$Q = -\frac{1}{2}R'(y')^2 - 2RGy' + \omega(y).$$

Из второго уравнения находится S, а четвёртое расщепляется по степеням y' до системы

$$\begin{cases} R''' = 0, \\ (5R'G + 4RG')' = 0, \\ (2RG^2 - \omega')' = 0, \\ 2(\omega G)' + 5R'H + 4RH' = 0, \\ \omega H = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Системы (16) и (17) при $H \equiv 0$ имеют несколько «серий» решений, но соответствующие им уравнения тривиальны (линейные с коэффициентами, вообще не зависящими от y).

Теорема 3. Не существует нетривиальных уравнений класса (8) с $H \equiv 0,$ имеющих квадратичный по второй производной первый интеграл вида (15).

З а м е ч а н и е 1. Для уравнений (10) и (13) легко найти квадратичные первые интегралы, но они представляют собой квадратичные формы линейных первых интегралов, указанных в теоремах 1, 2.

При $H \not\equiv 0$ система (16) имеет единственное нетривиальное решение и справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Существует единственное уравнение класса (8) с $F \equiv 0, \quad H \not\equiv 0,$ а именно:

$$y''' = \frac{cy''}{ay+b} + \frac{k}{(ay+b)^{5/2}},$$

имеющее первый интеграл вида (15):

$$P = \left[(ay+b)y'' + \frac{1}{2}a(y')^2 - cy' \right]^2 - \frac{2k}{a} \frac{ay' + 2c}{(ay+b)^{1/2}},$$

и единственное уравнение класса (8) с $F, \quad H \not\equiv 0,$ а именно:

$$y''' = \alpha(y'')^2 - \frac{ay''}{\alpha(ay+b)} + \frac{c}{(ay+b)^4},$$

имеющее первый интеграл вида (15):

$$P = \left\{ [\alpha(ay+b)y'' + ay']^2 + \frac{\alpha c}{(ay+b)^2} \right\} e^{-2\alpha y'}.$$

Работа может быть продолжена поиском на случай кубичного первого интеграла, то есть

$$P = R(y,y')(y'')^3 + Q(y,y')(y'')^2 + S(y,y')y'' + T(y,y'), \tag{18}$$

для класса (8) с $F \equiv 0,$ (т. е. линейное по второй производной).

Аналогично предыдущим случаям получим систему

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_y y' + Q_{y'} = -3RG, \\ Q_y y' + S_{y'} = -2QG - 3RH, \\ S_y y' + T_{y'} = -SG - 2QH, \\ T_y y' = -SH. \end{cases} \tag{19}$$

Из первого уравнения следует

$$Q(y,y') = -\frac{1}{2}R'(y')^2 - 3RGy' + \alpha(y), \tag{20}$$

а из третьего —

$$\mathrm{S} = \frac{1}{8}\mathrm{R}''(\mathrm{y}')^4 + \left(\frac{4}{3}\mathrm{R}'\mathrm{G} + \mathrm{R}\mathrm{G}'\right)(\mathrm{y}')^3 + \left(3\mathrm{R}\mathrm{G}^2 - \frac{1}{2}\alpha'\right)(\mathrm{y}')^2 - (3\mathrm{RH} + 2\alpha\mathrm{G})\mathrm{y}' + \beta(\mathrm{y}). \tag{21}$$

Четвёртое уравнение даёт

$$\begin{aligned} T = &-\frac{1}{48}R'''(y')^6 - \left(\frac{7}{24}R''G + \frac{7}{15}R'G' + \frac{1}{5}RG''\right)(y')^5 - \\ &-\left(\frac{7}{4}RGG' - \frac{1}{8}\alpha'' + \frac{13}{12}R'G^2\right)(y')^4 + \\ &+\left(\frac{5}{6}\alpha'G + \frac{2}{3}\alpha G' + RH' + \frac{4}{3}R'H - RG^3\right)(y')^3 + \\ &\qquad +\left(\alpha G^2 + \frac{9}{2}HRG - \frac{1}{2}\beta'\right)(y')^2 - (G\beta + 2H\alpha)y' + \gamma(y). \end{aligned} \tag{22}$$

Подставив (20), (21) в последнее уравнение системы (18) и затем расщепив по первой производной y', получим

$$\begin{cases} R^{(IV)} = 0, \\ \dfrac{7}{24} R'''G + \dfrac{91}{120} R''G' + \dfrac{2}{3} R'G'' + \dfrac{1}{5} RG''' = 0, \\ \dfrac{13}{12} R''G^2 + \left(\dfrac{47}{12} R'G' + \dfrac{7}{4} RG'' \right) G + \dfrac{7}{4} R(G')^2 - \dfrac{1}{8} \alpha''' = 0, \\ -3G'RG^2 + RH'' + \dfrac{5}{6} \alpha''G - R'G^3 + \dfrac{2}{3} \alpha G'' + \dfrac{3}{2} \alpha'G' + \dfrac{35}{24} R''H + \dfrac{7}{3} R'H' = 0, \\ \alpha'G^2 + \left(2\alpha G' + \dfrac{35}{6} R'H + \dfrac{9}{2} RH' \right) G - \dfrac{1}{2} \beta'' + \dfrac{11}{2} HRG' = 0, \\ 3HRG^2 - \dfrac{5}{2} H\alpha' - 2H'\alpha - G\beta' - G'\beta = 0, \\ 3RH^2 - \gamma' + 2GH\alpha = 0, \\ \beta H = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует

$$R(y) = ay^3 + by^2 + cy + d, \tag{23}$$

а из последнего —

$$\beta(y) \equiv 0. \tag{24}$$

Пятое уравнение теперь становится

$$2H'\alpha = \left(3RG^2 - \frac{5}{2} \alpha' \right) H. \tag{25}$$

Переписав его в виде

$$\frac{H'}{H} = \frac{6RG^2 - 5\alpha'}{4\alpha},$$

легко находим решение

$$H(y) = k \exp\left(\int \frac{6RG^2 - 5\alpha'}{4\alpha} dy \right), \tag{26}$$

где k — произвольная константа.

Оставшиеся четыре уравнения составляют переопределённую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функции $G(y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{7}{24}R'''G+\dfrac{91}{120}R''G'+\dfrac{2}{3}R'G''+\dfrac{1}{5}RG'''=0, \\ \dfrac{13}{12}R''G^2+\left(\dfrac{47}{12}R'G'+\dfrac{7}{4}RG''\right)G+\dfrac{7}{4}R(G')^2-\dfrac{1}{8}\alpha'''=0, \\ RH''-3G'RG^2+\dfrac{5}{6}\alpha''G-R'G^3+\dfrac{2}{3}\alpha G''+\dfrac{3}{2}\alpha'G'+\dfrac{35}{24}R''H+\dfrac{7}{3}R'H'=0, \\ \alpha'G^2+\left(2\alpha G'+\dfrac{35}{6}R'H+\dfrac{9}{2}RH'\right)G+\dfrac{11}{2}HRG'=0. \end{cases} \tag{27}$$

Однако система (27) совместна и имеет решение, так как, согласно теореме 1, класс уравнений (8) с $F\equiv 0$ имеет линейный первый интеграл. Из этого следует, что этот класс уравнений также имеет тривиальный кубичный первый интеграл, полученный в результате возведения в третью степень линейного интеграла (13), т. е.

$$P=\left[(ay+b)y''-\frac{a}{2}(y')^2-cy'\right]^3.$$

Этот интеграл является, по построению, одним из решений системы (27).

Замечание 2. Очевидно, что алгоритм решения обратной задачи для классов уравнений, содержащих «предстаршую» производную, существенно отличается от метода, реализованного в работе [1]: если в уравнении имеются только младшие производные, мы в конечном итоге приходим к системе двух уравнений, в которых вспомогательная функция (один из коэффициентов первого интеграла) входит в виде частных производных по разным переменным. Тогда условие совместности приводит к получению уравнения в частных производных для искомой функции — правой части уравнения. В рассматриваемом в настоящей работе случае младшие (в данном случае — первая y') производные отсутствуют, и окончательное уравнение, к которому приводится определяющая система, необходимо расщеплять по y', в результате чего возникает новая система.

В заключение отметим, что для уравнений 3-го (и вообще нечётного) порядка свойство «наследования» первым интегралом симметрии исходного уравнения (т. е. свойство, аналогичное свойству вариационной симметрии) оказывается существенно более «редким», чем для уравнений чётных порядков. Это может объясняться рядом причин — отсутствием самосопряжённых форм для уравнений нечётных порядков и для их симметрий; отсутствием аналогий в уравнениях механики и вообще в вариационных задачах (уравнение Эйлера — Лагранжа может иметь только чётный порядок); отсутствием простых интегрируемых комбинаций с младшими производными (для сравнения: если k — целое, то выражение $y'y^{(2k)}$ является точной производной, а выражение $y'y^{(2k+1)}$ — нет). Исследование этих вопросов, безусловно, представляет значительный интерес.

Тем не менее множество уравнений, обладающих описываемым свойством, может быть существенно расширено, если использовать не точечную группу эквивалентности, а общее преобразование Беклунда, сохраняющее автономность [6].

$$\begin{cases} y = \int f(u, \dot{u}) dt, \\ x = at + \int g(u, \dot{u}) dt. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хоанг Нгы Хуан, Зайцев В. Ф.* Аналоги вариационных симметрий ОДУ нечётных порядков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: Материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2012». 16–21 апреля 2012 г. СПб.: Изд-во БАН, 2012. С. 116–120.
2. *Зайцев В. Ф., Линчук Л. В.* Дифференциальные уравнения. Структурная теория. СПб.: ООО «Книжный дом», 2008. Ч. 1. 128 с.
3. *Зайцев В. Ф., Линчук Л. В.* Дифференциальные уравнения. Структурная теория. СПб.: ООО «Книжный дом», 2008. Ч. 2. 100 с.
4. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: приложения в механике, точные решения. М.: Наука, 1993. 464 с.
5. *Bluman G. W., Anco S. C.* Symmetry and integration methods for differential equations (AMS 154). Springer, 2002. 418 p.
6. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of exact solutions for ordinary differential equations, 2nd edition. Chapman & Hall / CRC, 2003. 814 p.

REFERENCES

1. *Hoang Ngy Huan, Zajtsev V. F.* Analogi variatsionnyh simmetrij ODU nechjotnyh porjadkov // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija: Material nauchnoj konferencii «Gercenovskie chtenia — 2012». 16–21 aprelja 2012 g. SPb.: Izd-vo BAN, 2012. S. 116–120.
2. *Zajtsev V. F., Linchuk L. V.* Differentsial'nye uravnenija. Strukturnaja teorija. Ch. 1. SPb.: OOO «Knizhnyj dom», 2008. 128 s.
3. *Zatsev V. F., Linchuk L. V.* Differentsial'nye uravnenija. Strukturnaja teorija. Ch. 2. SPb.: OOO «Knizhnyj dom», 2008. 100 s.
4. *Zajtsev V. F., Poljanin A. D.* Spravochnik po nelinejnym differentsial'nym uravnenijam: prilozhenija v mehanike, tochnye reshenija. M.: Nauka, 1993. 464 s.
5. *Bluman G. W., Anco S. C.* Symmetry and integration methods for differential equations (AMS 154). Springer, 2002. 418 p.
6. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of exact solutions for ordinary differential equations, 2nd edition. Chapman & Hall / CRC, 2003. 814 p.