МАТЕМАТИКА

А. В. Коптев

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ 3D УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА И ЕГО ОСОБЕННОСТИ

В работе представлено решение начально-краевой задачи для 3D уравнений Навье — Стокса с краевыми условиями на бесконечности и гладкими начальными условиями при t = 0. Выявлены и проанализированы особенности полученного решения.

Ключевые слова: частная производная, дифференциальное уравнение, движение, жидкость, интеграл, вязкость, вихрь, гладкость, потенциал.

A. Koptev

The Solution of Initial and Boundarry Value Problem for 3D Navier — Stokes Equation and its Features

The paper presents a solution of the initial and boundary value problem for 3D Navier − Stokes equations with boundary conditions at infinity and smooth initial conditions at t = 0. The main features of the solution are described and analyzed.

Keywords: partial derivative, differential equation, motion, fluid, integral, viscosity, vortex, smoothness, potential.

Уравнения Навье — Стокса — это известный тип нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые описывают движение жидкостей и газов при наличии вязкости. Они представляют и чисто математический интерес, и имеют многочисленные приложения к практическим задачам.

Для случая движения вязкой несжимаемой жидкости безразмерный вариант уравнений Навье — Стокса может быть представлен в следующем виде

$$,\ \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial\left(p+\Phi\right)}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial\left(p+\Phi\right)}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{4}$$

Здесь u, v, w, p — основные неизвестные, скорости и давление. Каждая из этих величин является функцией независимых переменных — координат и времени;

Φ — потенциал внешних сил, заданная функция;

Re — число Рейнольдса, положительный параметр.

Отличительной особенностью уравнений Навье — Стокса является наличие нелинейных членов, что значительно усложняет исследование и решение. Такие члены присутствуют в левых частях уравнений (1)–(3).

На сегодняшний день многие вопросы, связанные с уравнениями (1)–(4), изучены недостаточно и требуют дополнительного исследования. Не ясна структура решений и нет общего подхода к решению как самих уравнений, так и краевых и начальных задач для них. Нет окончательного решения проблемы существования гладкого решения [5–6]. Нет четкого представления об асимптотике решения при $\mathrm{Re}\to+\infty$ и при $t\to+\infty$. Не ясен механизм ламинарно-турбулентного перехода.

Важность и сложность теоретических проблем этого плана подтверждает следующий факт. Математический институт Клэя (Clay Mathematical Institute, USA), один из известных центров изучения математики, определил теоретическое исследование уравнений Навье — Стокса как одну из семи главных проблем третьего тысячелетия. Общее описание и постановка представлены в работе [7]. Согласно этой постановке, требуется доказать в общем случае существование гладкого решения при условии, что функции, задающие начальные и краевые условия, обладают достаточной гладкостью.

Теоретическое изучение уравнений Навье — Стокса не исключает и другой подход к проблеме — от частного к общему. А именно — от построения конкретных решений и изучения их свойств к дальнейшим обобщениям.

Даная работа представляет шаг на этом пути. Основная цель состоит в том, чтобы построить аналитическое решение начально-краевой задачи для 3D уравнений Навье — Стокса и произвести анализ особенностей полученного решения.

Предлагается к рассмотрению начально-краевая задача с асимптотическими условиями на бесконечности и гладкими начальными условиями при $t = 0$.

Условия на бесконечности задаются следующим образом. Рассмотрим некоторую малую положительную величину ε. Пусть при $\varepsilon\to+0$ выполнено

$$x=\frac{c_x}{\varepsilon}+o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ y=\frac{c_y}{\varepsilon}+o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ z=\frac{c_z}{\varepsilon}+o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{5}$$

$$u \to u_0, \; v \to v_0, \; w \to w_0, \tag{6}$$

где u_0, v_0, w_0 — предельные значения скоростей на бесконечности, которые изначально должны быть заданы;

$o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ обозначает величины, имеющие на бесконечности порядок меньший, чем $\frac{1}{\varepsilon}$;

c_x, c_y, c_z — постоянные, определяющие закон приближения аргументов x, y, z к бесконечности. Они также должны быть заданы и должны удовлетворять ограничениям $c_x \neq 0$, $c_y \neq 0$, $c_z \neq 0$.

Согласно условию (5), x, y, z приближаются к бесконечности «примерно одинаково», имея в качестве старшего члена на бесконечности величину, пропорциональную $\frac{1}{\varepsilon}$.

Итак, краевые условия определяются соотношениями (5)–(6), которые вносят в постановку шесть дополнительных параметров: u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z.

Начальные условия зададим при $t = 0$. Будем считать, что в начальный момент $t = 0$ неизвестные u, v, w заданы, причем они представляются достаточно гладкими функциями координат.

Наша задача состоит в решении уравнений (1)–(4) при краевых условиях (5)–(6) и указанных выше начальных условиях.

Стационарная задача. На первом этапе решения рассмотрим более простую стационарную задачу. Пусть $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ и все функции зависят лишь от координат. Тогда в уравнениях (1)–(4) выпадают из рассмотрения нестационарные члены и исходные уравнения упрощаются.

Построим решения этих уравнений, удовлетворяющих краевым условиям (5)–(6). Кроме того, предлагается еще одно важное упрощение. Будем исходить не из уравнений Навье — Стокса непосредственно, а из первого интеграла этих уравнений [1–2].

Первый интеграл 3D уравнений Навье — Стокса для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости сводится к следующим шести соотношениям более низкого порядка по отношению к основным неизвестным:

$$p + \Phi + \frac{U^2}{2} + d = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \tag{7}$$

$$u^2 - v^2 + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial y \partial z} + 3(\alpha_1 - \beta_1); \tag{8}$$

$$v^2 - w^2 + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_5}{\partial x \partial y} + 3(\beta_1 - \gamma_1); \quad (9)$$

$$uv + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_5}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial x \partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha'_{2\,z} + \beta'_{2\,z}\right); \quad (10)$$

$$uw + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_5}{\partial y \partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma'_{2\,y} - \alpha'_{2\,y}\right), \quad (11)$$

$$vw + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_5}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\beta'_{2\,x} + \gamma'_{2\,x}\right). \quad (12)$$

Здесь: Ψ_j — ассоциированные неизвестные, $j = 1,2,\ldots,6$;

α_m, β_m, γ_m — аддитивные функции, каждая из которых зависит лишь от двух переменных из трех, так что

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial x} = \frac{\partial \beta_m}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_m}{\partial z} = 0;$$

$\frac{U^2}{2} = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$ — скоростной напор;

d — диссипативный член, вычисляемый по формуле

$$d = -\frac{U^2}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 \Psi_4}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_5}{\partial x \partial y} - \Delta_{xy}\Psi_1 + \Delta_{xz}\Psi_2 - \Delta_{yz}\Psi_3\right),$$

а Δ_{xy}, Δ_{yz}, Δzx обозначают неполные операторы Лапласа по координатам, т. е.

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_{zx} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Как показано в работе [2], всякое достаточно гладкое решение уравнений (7)–(12) приводит к решению уравнений Навье — Стокса (1)–(4). Но уравнения (7)–(12) более просты, чем (1)–(4), поэтому именно с этих уравнений выгоднее начинать решение задачи.

Отметим некоторые закономерности, связанные с формулами (7)–(12). Неизвестное p присутствует лишь в уравнении (7), причем в этом уравнении оно фигурирует аддитивно. Достаточно найти все остальные неизвестные, и тогда p определится по формуле (7) в результате простых операций. Так что основная задача сводится к нахождению основных неизвестных u, v, w и ассоциированных неизвестных Ψ_j. Эти величины должны быть определены из выражений (8–12) вместе с уравнением неразрывности (4). Нужно разрешить эту систему шести уравнений относительно u, v, w, Ψ_j и удовлетворить при этом краевым условиям (5–6).

Определяющие уравнения обладают очевидной симметрией по основным неизвестным u, v, w. Чтобы свойства симметрии использовать в полной мере, добавим в систему определяющих уравнений еще одно. Оно получается, как почленная сумма уравнений (8) и (9), умноженных на минус единицу. Это новое уравнение — следующее:

$$w^2 - u^2 + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Psi_5}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Psi_6}{\partial y\partial z} + 3(\gamma_1 - \alpha_1). \qquad (13)$$

Рассмотрим уравнения (8–12) и (13) попарно. Первую пару образуют уравнения (8) и (10), вторую — уравнения (9) и (12) и третью — уравнения (11) и (13). В каждой из указанных пар уравнений фигурируют лишь два из трех основных неизвестных в циклическом порядке, соответственно $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ или $\{w, u\}$. Первая пара неизвестных фигурирует в уравнениях (8) и (10). Вторая пара — в уравнениях (9) и (12). И третья пара — в уравнениях (11) и (13).

Чтобы в полной мере учесть попарные взаимосвязи, предлагается использовать методы теории функций комплексного переменного [4]. Рассмотрим, например, первую пару — уравнения (8) и (10). Предварительно умножим (10) на $-2i$. Введем функцию комплексного переменного:

$$F(z_1) = u - iv. \qquad (14)$$

Тогда левые части уравнений (8) и (10), умноженные на $-2i$, есть соответственно действительная и мнимая части величины $F^2(z_1) - \frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{dF}{dz_1}$, где Re — число Рейнольдса, а $\frac{dF}{dz_1}$ означает производную функции $F(z_1)$ как функции комплексного переменного [4].

Обоснованием последнего утверждения являются следующие равенства:

$$F^2(z_1) = u^2 - v^2 - 2iuv, \quad \frac{dF}{dz_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

В результате пара рассмотренных уравнений равносильна одному комплексному уравнению

$$-\frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{dF}{dz_1} + F^2 = r_1(z_1),$$

где $r_1(z_1)$ есть некоторая правая часть, независимая от u, v и F.

Для двух других пар уравнений ситуация аналогична. Каждое из уравнений (11) и (12) умножим почленно на $-2i$ и введем функции и комплексные аргументы, сохранив циклический порядок. Для второй пары вводим функцию комплексного переменного $G(z_2) = v - iw$, где $z_2 = y + iz$. Для третьей пары $H(z_3) = w - iu$, где $z_3 = z + ix$.

Каждая из рассмотренных пар дифференциальных уравнений равносильна одному комплексному уравнению вида

$$-\frac{4}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{dR}{dz_k}+R^2=r_k(z_k)\,, \tag{15}$$

где в качестве неизвестного $R(z_k)$ фигурирует $F(z_1)$, $G(z_2)$, $H(z_3)$ и правые части представляют соответственно $r_1(z_1)$, $r_2(z_2)$, $r_3(z_3)$.

Уравнение (15) есть обыкновенное дифференциальное уравнение известного вида, а именно — специальное уравнение Риккати. Этот вид дифференциальных уравнений хорошо изучен.

При вводе в рассмотрение функций $r_k(z_k)$ фактически было произведено разделение переменных [3]. Для *u*, *v*, *w* возникают уравнения вида (15), а для неизвестных Ψ_j — линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка. Неоднородные члены в этих уравнениях определяются функциями $r_k(z_k)$. Все эти уравнения линейные, и, значит, их решение представляет существенно более простую задачу.

Уравнение Риккати (15) нелинейно, но оно разрешимо в квадратурах при многих различных вариантах правой части $r_k(z_k)$. Поэтому, имея в виду аналитическое решение задачи, нужно выбрать один из таких вариантов. Кроме того, выбор $r_k(z_k)$ диктуется и краевыми условиями. Для нашего случая, когда краевые условия заданы в виде выражений (5)–(6), можно правые части уравнения (15) взять в виде квадрата некоторых комплексных постоянных

$$r_k(z_k)=C_k^2\,. \tag{16}$$

Здесь $C_k=A_k+iB_k$, где A_k, B_k — некоторые действительные постоянные.

Поскольку уравнение (13) для третьей пары (k = 3) получалось как сумма уравнений (8) и (9) с обратными знаками, то необходимо ограничение

$$-(A_1^2-B_1^2)-(A_2^2-B_2^2)=A_3^2-B_3^2\,. \tag{17}$$

Рассмотрим более подробно уравнение (15), когда правые части заданы согласно (16). Для этого случая имеем уравнение с разделяющимися переменными. Его решения определяются выражениями трех видов: $R(z_k)=-C_k th(\theta_k)$ или $R(z_k)=-C_k cth(\theta_k)$, или $R(z_k)=\pm C_k$, где

$$\theta_k=\frac{\mathrm{Re}}{4}\cdot C_k(z_k-z_k^{(0)})\,. \tag{18}$$

Третья возможность соответствует особому решению. Эта возможность предлагает простое решение в виде постоянной. Оно не представляет интереса. Вторая возможность предлагает решение с полюсами в точках $z_k=z_k^{(0)}$. Значит, при таком выборе заметно ухудшаются свойства гладкости. Первая возможность допускает гладкое решение без особых точек. К тому же, эти решения имеют предельные значения на бесконечности, что удобно, имея в виду краевые условия (5)–(6). Поэтому выбираем первую возможность. Таким образом, решения уравнения (15) задаются формулой

$$R(z_k) = -C_k th(\theta_k)\,. \tag{19}$$

Теперь удобно от комплексных решений вновь перейти к действительным. Для этого в равенстве (19) отделяем действительные и мнимые части и получаем выражения для u, v, w. При этом наблюдается следующая закономерность. Каждая из компонент скорости u, v или w встречается в полученных выражениях дважды. Так, u представляет действительную часть $F(z_1)$ и, одновременно, — мнимую часть с обратным знаком от $H(z_3)$. Точно так же v представляет мнимую часть с обратным знаком от $F(z_1)$ и в то же время — действительную часть $G(z_2)$.

Искомое значение для каждого неизвестного u, v, w получаем как сумму обоих выражений, его представляющих.

Таким образом, значения неизвестных определяем равенствами

$$u = \mathrm{Re}\{F(z_1)\} - \mathrm{Im}\{H(z_3)\}\,,\; v = -\mathrm{Im}\{F(z_1)\} + \mathrm{Re}\{G(z_2)\};$$

$$w = -\mathrm{Im}\{G(z_2)\} + \mathrm{Re}\{H(z_3)\}\,, \tag{20}$$

где Re и Im обозначают соответственно действительную и мнимую части комплексной величины.

Действуя указанным образом, мы заведомо обеспечиваем выполнимость и уравнения неразрывности (4). Так, введение функций комплексного переменного $F(z_1)$, $G(z_2)$, $H(z_3)$ вносит условия Коши — Римана на их действительные и мнимые части [4]. Если положить в выражении (19) $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, $w = w_1 + w_2$, тогда будет быть выполнено

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0\,,\; \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0\,,\; \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0\,,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0\,,\; \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0\,,\; \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0\,. \tag{21}$$

В этом случае левая часть уравнения (4) преобразуется как

$$\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(w_1 + w_2)}{\partial z} = (\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}) + (\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z}) + (\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z})\,.$$

Последнее, с учетом первого, третьего и пятого равенств (21), тождественно равно нулю. Таким образом, уравнение неразрывности (4) выполнено.

В результате сказанного решение уравнений (8–12) и (4) можно представить в виде

$$u = -\frac{A_1 sh(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_1}{2}) - B_1 \sin(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_1}{2})}{2(\cos^2(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_1}{4}) + sh^2(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_1}{4}))} + \frac{A_3 \sin(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_3}{2}) + B_3 sh(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_3}{2})}{2(\cos^2(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_3}{4}) + sh^2(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_3}{4}))}; \tag{22}$$

$$v = -\frac{A_2\,\mathrm{s}h(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_2}{2}) - B_2 \sin(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_2}{2})}{2(\cos^2(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_2}{4}) + sh^2(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_2}{4}))} + \frac{A_1 \sin(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_1}{2}) + B_1\,\mathrm{s}h(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_1}{2})}{2(\cos^2(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_1}{4}) + sh^2(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_1}{4}))}, \tag{23}$$

$$w = -\frac{A_3\,\mathrm{s}h(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_3}{2}) - B_3 \sin(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_3}{2})}{2(\cos^2(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_3}{4}) + sh^2(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_3}{4}))} + \frac{A_2 \sin(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_2}{2}) + B_2\,\mathrm{s}h(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_2}{2})}{2(\cos^2(\frac{\mathrm{Re}\,\eta_2}{4}) + sh^2(\frac{\mathrm{Re}\,\xi_2}{4}))}, \tag{24}$$

где A_k, B_k — некоторые постоянные, а вспомогательные величины ξ_k, η_k определены равенствами

$$\xi_1 = A_1(x - x_0) - B_1(y - y_0), \quad \eta_1 = B_1(x - x_0) + A_1(y - y_0),$$

$$\xi_2 = A_2(y - y_0) - B_2(z - z_0), \quad \eta_2 = B_2(y - y_0) + A_2(z - z_0),$$

$$\xi_3 = A_3(z - z_0) - B_3(x - x_0), \quad \eta_3 = B_3(z - z_0) + A_3(x - x_0), \tag{25}$$

где x_0, y_0, z_0 — произвольные постоянные интегрирования.

При любых значениях A_k, B_k формулы (22)–(24) соответствуют потенциальному движению жидкости. Потенциал скорости определяется выражением

$$\varphi = \frac{2}{\mathrm{Re}} \ln \prod_{k=1}^{3} \left(\cos^2 \frac{\mathrm{Re}\,\eta_k}{4} + sh^2 \frac{\mathrm{Re}\,\xi_k}{4} \right). \tag{26}$$

Для этого случая диссипативный член в (7) обращается в нуль, $d = 0$, и необходимость в нахождении ассоциированных неизвестных Ψ_j отпадает.

Последнее из основных неизвестных, давление, определяется из равенства (7). С учетом $d = 0$ приходим к выражению

$$p - p_0 = -\Phi - \frac{U^2}{2}, \tag{27}$$

где p_0 — аддитивная постоянная давления.

Осталось выбрать величины A_k, B_k так, чтобы удовлетворить краевым условиям (5)–(6). Эта частная задача решается следующим образом. Согласно выражениям (6) необходимо, чтобы правые части (22)–(24) на бесконечности асимптотически приближались к заданным постоянным — соответственно u_0, v_0, w_0. Асимптотическое поведение указанных выражений во многом определяется знаками аргументов гиперболических функций. Рассмотрим, например, первое слагаемое правой части выражения (22).

Если ξ_1 положительно, то эта величина при больших значениях аргументов приближается к $-A_1$. Если же ξ_1 отрицательно, то эта величина приближается к A_1. Значит, нужно рассматривать различные возможности в зависимости от знаков ξ_k.

Рассмотрим первую возможность, связанную с предположениями

$$\xi_1 > 0, \; \xi_2 > 0, \; \xi_3 > 0.$$

С учетом выражений (25) при больших x, y, z, в качестве предположений имеем неравенства

$$A_1c_x - B_1c_y > 0, \; A_2c_y - B_2c_z > 0, \; A_3c_z - B_3c_x > 0. \tag{28}$$

Тогда для выполнимости условий (6) необходимо

$$u_0 = -A_1 + B_3, \; v_0 = -A_2 + B_1, \; w_0 = -A_3 + B_2. \tag{29}$$

К этим равенствам нужно добавить уравнение (17) и разрешить получающуюся систему относительно шести неизвестных A_k, Bk.

Вычисления приводят к следующим результатам. Величины A_1 и B_1 можно задать в качестве базовых. Остальные неизвестные при $w_0 \neq 0$ определяются выражениями

$$A_2 = B_1 - v_0, \; B_2 = \frac{v_0^2 - u_0^2 + w_0^2 - 2u_0A_1 - 2v_0B_1}{2w_0},$$

$$A_3 = \frac{v_0^2 - u_0^2 - w_0^2 - 2u_0A_1 - 2v_0B_1}{2w_0}, \; B_3 = u_0 + A_1. \tag{30}$$

Для рассматриваемой возможности исходные предположения определяются неравенствами (28), а результирующие выражения — формулами (30). Нужно проверить эти выражения на соответствие с неравенствами (28). Подстановка (30) в (28) приводит к системе трех линейных неравенств относительно A_1, B_1, где в качестве параметров выступают величины u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z.

Все другие предположения относительно знаков ξ_k приводят к неравенствам, отличающимся от (28) хотя бы одной заменой “ > “ на “< ”. Всего имеем восемь различных возможностей. Анализ всех этих возможностей приводит к следующим результатам. Для того чтобы система неравенств относительно A_1, B_1, имела решение, необходимо и достаточно одно дополнительное условие. Оно сводится к неравенству

$$u_0c_x + v_0c_y + w_0c_z < 0. \tag{31}$$

Если это условие не выполнено, то решений указанного вида, удовлетворяющих условиям (5)–(6) не существует. Если условие (31) выполнено, то существует множество решений. На плоскости переменных A_1, B_1 существует область значений A_1, B_1, так что каждая внутренняя точка этой области приводит к решению указанного вида. Эта область представляет внутренность треугольника. Его границы задаются следующими уравнениями прямых в плоскости A_1, B_1:

$$B_1 c_y - A_1 c_x = 0\,, \quad B_1\left(c_y + \frac{v_0}{w_0} c_z\right) + A_1 c_z \frac{u_0}{w_0} = v_0 c_y + \frac{w_0^2 - u_0^2 + v_0^2}{2w_0} c_z\,,$$

$$B_1 c_z \frac{v_0}{w_0} + A_1\left(c_x + \frac{u_0}{w_0} c_z\right) = -u_0 c_x - \frac{w_0^2 + u_0^2 - v_0^2}{2w_0} c_z\,. \tag{32}$$

Таким образом, при выполнении условия (31) стационарная задача имеет множество решений. Они определяются формулами (22)–(24) и (27).

Каждое решение определяется парой A_1, B_1 внутри области с границами (32). Все другие величины A_k, B_k, задаются согласно (30).

Нестационарная задача. Рассмотрим теперь основную нестационарную задачу. Предположим, что A_1 и B_1 зависят от времени. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ значения этих определяющих параметров равны соответственно $A_1(0)$, $B_1(0)$, и эти значения находятся внутри нужной области. Можно считать, что начальные условия для скоростей определены выражениями (22)–(24), когда $A_1 = A_1(0)$ и $B_1 = B_1(0)$. Эти выражения задают гладкие функции координат.

Пусть теперь $A_1(t)$ и $B_1(t)$ изменяются во времени так, что всегда находятся внутри области с границами (32). Тогда выражения для скоростей (22)–(24) приобретают зависимость от времени и в левых частях уравнений Навье — Стокса (1)–(3) появляются нестационарные члены. Движение будет по-прежнему потенциальным, и давление будет определяться из интеграла Лагранжа — Коши

$$p - p_0 = -\Phi - \frac{U^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(t)\,, \tag{33}$$

где φ — потенциал скорости, определенный согласно формуле (26); $f(t)$ — произвольная функция времени.

Давление приобретает дополнительное нестационарное слагаемое, и оно компенсирует нестационарные члены в левых частях уравнений (1)–(3). Уравнения Навье — Стокса (1)–(4) выполнены. Значит, выражения (22)–(24), (33) для данного случая удовлетворяют и уравнениям Навье — Стокса, и краевым, и начальным условиям.

Таким образом, если только $A_1(t)$ и $B_1(t)$ находятся внутри указанной области и выполнено условие (31), то поставленная выше начально-краевая задача имеет решения. Различным вариантам зависимостей $A_1(t)$ и $B_1(t)$ будут соответствовать различные варианты решений.

Получающиеся таким путем решения могут обладать различными особенностями. Рассмотрим некоторые из таких вариантов решений и проанализируем их возможные особенности.

1. Пусть, например, $A_1(t) = A_1(0) + s \cdot \cos \omega t$, $B_1(t) = B_1(0) + s \cdot \sin \omega t$, где $A_1(0)$, $B_1(0)$ — координаты центра треугольника, ограничивающего область, а S — положительная величина, меньшая радиуса вписанной окружности. Имеем параметрические уравнения некоторой окружности внутри треугольника, определяющего область. Такому варианту функций $A_1(t)$ и $B_1(t)$ соответствует решение основной задачи, периодическое по времени с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Такое решение существует при всех $0 \le t < +\infty$. Свойства гладкости такого решения очевидны.

2. Пусть $A_1(t) = A_1(0) + t$, $B_1(t) = B_1(0) + gt$, где g — некоторое конечное число. Тогда имеем параметрические уравнения прямой, проходящей через центр треугольника, определяющего область. Этому случаю соответствует некоторое решение основной задачи, но до тех пор, пока точка $A_1(t)$, $B_1(t)$, не выйдет за пределы треугольника. Но последнее обязательно произойдет, так как прямая, проходящая через центр треугольника, обязательно пересекает его границу. Такое пересечение происходит к некоторому конечному моменту времени $t = t_*$. Значит, имеем гладкое решение, но лишь для промежутка времени $0 < t < t_*$. Следовательно, для данного нестационарного решения есть конечное “время жизни” t_*.

3. Пусть $A_1(t) = A_1(0) + t$, $B_1(t) = B_1(0) + g_1 t$ при $0 < t \le t_1$ и

$A_1(t) = (A_1(0) + t_1) + t$, $B_1(t) = (B_1(0) + g_1 t_1) + g_2 t$ при $t_1 \le t < t_*$.

Имеем параметрические уравнения ломаной с точкой сопряжения $A_1(t)$, $B_1(t)$, в момент $t = t_1$. Если $g_1 \ne g_2$, то решение основной задачи имеет разрывные производные по времени. Разрыв возникает при $t = t_1$. Значит, для этого решения свойства гладкости значительно ухудшаются. Кроме того, данное решение имеет конечное “время жизни” t_*.

Еще одна интересная особенность, характерная для решения уравнений (22)–(24), (33) состоит в следующем. В правых частях формул, задающих решения, фигурируют тригонометрические функции с аргументами, пропорциональными числу Рейнольдса *Re*. Наличие таких функций при $\mathrm{Re} \to +\infty$ соответствует колебательным движениям с бесконечно малым периодом. Такие колебания не могут осуществиться, и указанные решения не могут существовать при $\mathrm{Re} \to +\infty$.

Выводы. Таким образом, решения поставленной начально-краевой задачи для 3D уравнений Навье — Стокса построены.

Данные решения существуют лишь при ограничении неравенства (31) на исходные параметры.

Свойства гладкости и многие другие свойства данных решений существенно зависят от выбора функций $A_1(t)$ и $B_1(t)$. Причем, наличие краевых и начальных условий не в полной мере ограничивают этот выбор.

Для того чтобы решение поставленной задачи обладало достаточными свойствами гладкости и было бы единственным, нужны дополнительные условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коптев А. В*. Интегралы уравнений Навье — Стокса. Саранск // Труды Средне-Волжского математического общества. 2004. № 1. Т. 6. С. 215–225.

2. *Коптев А. В.* Первый интеграл и пути дальнейшего интегрирования уравнений Навье — Стокса // Известия РГПУ им. А. И. Герцена: Научный журнал. 2012. № 147. С. 7–17.

3. *Коптев А. В*. Принципы построения решений уравнений Навье — Стокса // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования // Герценовские чтения–2013. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2013. С. 76–78.

4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

5. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

6. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.

7. *Charles L*. Fefferman. Existence and Smoothness of the Navier — Stokes equation: Preprint, Princeton Univ., Math. Dept. Princeton, NJ, 2000. P. 1–5.

REFERENCES

1. *Koptev A. V.* Integraly uravnenij Nav'e — Stoksa. Saransk // Trudy Sredne-Volzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2004. № 1. T. 6. S. 215–225.

2. *Koptev A. V.* Pervyj integral i puti dal'nejshego integrirovanija uravnenij Nav'e — Stoksa // Izvestija RGPU im. A. I. Gertsena. 2012. № 147. S. 7–17.

3. *Koptev A. V.* Printsipy postroenija reshenij uravnenij Nav'e — Stoksa // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija // Gercenovskie chtenija–2013. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gertsena, 2013. S. 76–78.

4. *Lavrent'ev M. A., Shabat B. V.* Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. M.: Nauka, 1987. 688 s.

5. *Ladyzhenskaja O. A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti. M.: Nauka, 1970. 288 s.

6. *Temam R.* Uravnenija Nav'e — Stoksa. Teorija i chislennyj analiz. M.: Mir, 1981. 408 s.

7. *Charles L*. Fefferman. Existence and Smoothness of the Navier — Stokes equation. Preprint, Princeton Univ., Math. Dept. Princeton, NJ, 2000. P. 1–5.