

*Ю. В. Шуплецов, Н. Б. Ампилова*

### **АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ МИНКОВСКОГО ДЛЯ ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

(Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 13-01-00782).

*В работе реализован метод анализа полутоновых изображений, основанный на вычислении размерности Минковского для поверхности, построенной по данному изображению в соответствии с интенсивностями пикселей. Приведены результаты численных экспериментов для четырех классов биомедицинских препаратов.*

**Ключевые слова:** полутоновые изображения, фрактальный анализ, размерность Минковского.

*Yu. Shupletsov, N. Ampilova*

### **The Algorithm of Calculating Minkovsky Dimension for Gray-scale Images**

*The method of image analysis based on the calculation of the Minkovski dimension for the surface constructed by a grey-scale image with using pixel intensities values was implemented. For 4 classes of biomedical drugs experimental results are given.*

**Keywords:** gray-scale images, fractal analysis, Minkovsky dimension.

Обработка цифровых изображений давно стала составляющей исследований практически во всех областях науки. Работа с образцами из какой-либо предметной области подразумевает не только извлечение некоторых данных из изображений, но и классификацию снимков, работу со сложноструктурированными образцами, с неочевидными закономерностями и особенностями, зачастую заметными лишь специалистам в этой области. В медицине возможность автоматически обрабатывать большие наборы изображений, распознавать снимки микроскопа определенной тематики, определять тип ткани, обнаруживать опухоли, определять наличие каких-либо соединений может значительно повлиять на ход исследований, облегчить процесс работы с изображениями, например, ускорить обнаружение болезни, постановки диагноза, что помогает подобрать своевременное и адекватное лечение. Существует большое количество методов обработки: фрактальный и текстурный анализ, фильтрация, вейвлет-преобразования и нейросетевое моделирование [1; 2; 3]. К настоящему моменту сложилась определенная практика применения тех или иных методов в определенных областях исследований. Тем не менее сочетание нескольких методов всегда более надежно, а, кроме того, применение “нестандартного” способа может неожиданно привести к интересным результатам.

Один из широко используемых подходов к анализу изображений — фрактальный анализ. Фракталами, по определению Б. Мандельброта, называют множества, для которых их фрактальная размерность больше топологической. Как правило, такие множества обладают сложной геометрической структурой, а также свойствами самоподобия. Характеристикой, отражающей это самоподобие, является фрактальная размерность. Понятие размерности фрактала уже получило применение во многих дисциплинах, в том числе в информатике, например, для сжатия и кодирования изображений, анализа текстур, обработки документов. Нетрадиционные для классической геометрии подходы, применяемые во фрактальном анализе, помогают получить новые данные об исследуемом образце, проанализировать его часто довольно сложную, нерегулярную структуру — снимки фармакологических препаратов, тканей живых организмов, разломов геологических пород и т. п. Как хорошо известно, одним из источников изображений, обладающих сложной структурой, являются динамические системы. Их фазовые портреты демонстрируют необычайное богатство структур — как фрактальных, так и мультифрактальных, а изображение инвариантных множеств рациональных преобразований плоскости (множеств Жюлиа) можно отнести также к искусству компьютерной графики.

В данной работе мы применяем один из алгоритмов оценки фрактальной размерности (размерности Минковского) для анализа и классификации полутоновых изображений, который был предложен в работе [7], затем применялся в литературе [8] для анализа текстовых документов. Идея заключается в построении поверхности графика функции градации серого, вычисления объема специального “покрывала” для этой поверхности и затем — в вычислении фрактальной размерности поверхности. Оказывается, что в этом случае размерность Минковского совпадает с чаще всего используемой емкостной, но способ вычисления проще. Кроме того, предложенный авторами работы [7] вариант дает возможность строить последовательность покрывал и вычислять набор фрактальных размерностей. Таким образом, каждому изображению сопоставляется вектор размерностей, близость изображений оценивается по близости векторов. Описанная техника применяется для классификации изображений костной ткани, гистологических препаратов, соединительной ткани и препаратов крови.

При измерении фрактальной размерности различных естественных и искусственных объектов возникает ряд проблем, связанных с тем, что существует несколько определений фрактальной размерности. Базовым понятием является размерность Хаусдорфа [5], но ее оценка часто оказывается весьма непростым делом. Поэтому на практике чаще используются размерности, относящиеся к так называемому классу box-computing (или box-counting) [5].

При таком подходе исследуемое множество покрывается ячейками (box) одинакового размера  $\delta$  и рассматривается число элементов покрытия  $N(\delta)$ . Предполагается, что это число пропорционально размеру ячейки в некоторой степени ( $-d$ ). Рассматривается отношение  $\log N(\delta) / (-\log N(\delta))$  и исследуется его поведение при изменении масштаба  $\delta$ . Если существует предел этого отношения, то он равен числу  $d$ , которое и называется емкостной размерностью данного множества. Для точки, отрезка, квадрата и т. п. эта величина совпадает с хорошо известной размерностью и является целым числом. Для фрактальных множеств емкостная размерность не равна целому. Таким образом, основной идеей введения этого класса размерностей является понятие «измерения по шкале  $\delta$ »: для каждого  $\delta$  мы измеряем объект таким образом, что игнорируем неравномерность объектов размером менее  $\delta$  и рассматриваем эти измерения при  $\delta$  стремящемся к 0.

Рассмотрим непустое ограниченное множество  $F$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega = \{\omega_i\}$  — его конечное покрытие множествами с диаметром  $\delta$ . Обозначим  $N_\delta(F)$  число элементов покрытия.

Определим нижнюю и верхнюю границу емкостной размерности для  $F$ :

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log_2 N_\delta(F)}{-\log_2 \delta}, \overline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log_2 N_\delta(F)}{-\log_2 \delta}.$$

Если верхняя и нижняя границы существуют и совпадают, то их общее значение называется емкостной размерностью:

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log_2 N_\delta(F)}{-\log_2 \delta}.$$

На практике подсчет числа элементов покрытия заданного диаметра, в которые попадают точки изображения, оказывается не очень эффективным. Поэтому целесообразно использовать другую размерность — размерность Минковского. Она совпадает с емкостной для непустых ограниченных множеств в  $\mathbb{R}^3$ . А в качестве этих множеств для изображения рассматривается специальная конструкция —  $\delta$ -параллельное тело.

**Определение 1[5].** Пусть  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда  $\delta$ -параллельное тело  $F_\delta$  — множество точек, удаленных от  $F$  не более, чем на  $\delta$ :  $F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq \delta, y \in F\}$ .

**Определение 2[5].** Пусть  $F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F \neq \emptyset$ . Обозначим за  $F_\delta$   $\delta$ -параллельное тело  $F$ , а за  $\text{Vol}^n(F_\delta)$  его  $n$ -мерный объем. Если для некоторой константы  $D$  при  $\delta \rightarrow 0$  предел  $\text{Vol}^n(F_\delta)/\delta^{n-D}$  положителен и ограничен, то размерностью Минковского множества  $F$  является число  $D$ . (Обозначается  $\dim_M F$ .)

Примеры  $\delta$ -параллельных тел в  $\mathbb{R}^3$ :

- $F$  — одноточечное множество, тогда  $F_\delta$  — шар с объемом  $\text{Vol}^3(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$ .
- $F$  — отрезок длины  $L$ , тогда  $F_\delta$  — цилиндр с объемом  $\text{Vol}^3(F_\delta) = \pi L\delta^2$ .
- $F$  — прямоугольник площадью  $A$ , тогда  $F_\delta$  — параллелепипед высотой  $2\delta$  объемом  $\text{Vol}^3(F_\delta) = 2A\delta$ .

В каждом случае справедливо следующее:  $\text{Vol}^3(F_\delta) \sim \beta\delta^{3-D}$ , где  $D$  — фрактальная размерность  $F$ , а  $\beta$  — некоторая константа. В приведенных примерах  $D = 0, 1, 2$  соответственно.

**Теорема 1.[5].** Пусть  $F$  — непустое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда  $\dim_B F = \dim_M F$ .

Метод основан на построении над полутоновым изображением графика поверхности функции градации серого. Затем эта поверхность «утолщается» — для нее строится специальное  $\delta$ -параллельное тело, называемое покрывалом. Вычисляется его объем, приближение к площади поверхности и фрактальная размерность поверхности. Техника построения покрывала основана, видимо, на идее Б. Мандельброта о способе приближенного вычисления длины береговой линии [6]: построить около линии ленту шириной  $2\delta$ , сосчитать ее площадь и поделить ее на  $2\delta$ . С другой стороны, можно построить приближение к береговой линии с помощью ломаной, составленной из интервалов длины  $\delta$ . Тогда длина линии оценивается как число интервалов, умноженное на  $\delta$ , т. е. и  $L(\delta) \approx s\delta^{1-D}$ , где  $s$  — некоторая константа. Аналогично площадь фрактальной поверхности может быть вычислена по формуле  $A(\delta) = s\delta^{2-D}$ .

Пусть для полутонового изображения задано преобразование

$$F = \{X_{ij}, i=0,1,\dots,K, j=0,1,\dots,L\},$$

где  $X_{ij}$  — значение интенсивности для пикселя с координатами  $(i, j)$ . Поскольку градация серого определена только для пикселя,  $F$  можно рассматривать как функцию от целочисленных аргументов. Доопределим  $F$  для точек с вещественными координатами  $(x, y)$ ,  $i < x < i+1$ ,  $j < y < j+1$ , тогда мы можем говорить о площади поверхности графика построенной функции  $F$ . (Доопределить можно значением  $X_{ij}$  или используя какую-либо аппроксимацию.) Если рассматривать полученную поверхность как фрактал, то по значению ее площади определяется фрактальная размерность. В анализе изображений множество значений функции градации серого всегда не пусто и ограничено в  $\mathbb{R}^3$ .

Рассмотрим все точки, находящиеся на расстоянии  $\delta$  от поверхности графика функции градации серого. Они образуют «покрывало» толщиной  $2\delta$ , которое является  $\delta$ -параллельным телом и определяется верхней поверхностью (слоем)  $u_\delta(i, j)$  и нижней поверхностью  $b_\delta(i, j)$ . Для  $\delta = 1, 2, \dots$  слои определяются итеративно:

$$u_\delta(i, j) = \max \left\{ u_{\delta-1}(i, j) + 1, \max_{|(m,n)-(i,j) \leq 1} u_{\delta-1}(m, n) \right\}; \quad (1)$$

$$b_\delta(i, j) = \min \left\{ u_{\delta-1}(i, j) - 1, \min_{|(m,n)-(i,j) \leq 1} u_{\delta-1}(m, n) \right\}. \quad (2)$$

(В вычислениях мы используем окрестность из четырех соседей.)

Точка  $F(x, y)$  включается в  $\delta$ -параллельное тело, если  $b_\delta(i, j) < F(x, y) < u_\delta(i, j)$ . Заметим, что покрывало с меньшим  $\delta$  содержится в покрывале с большим  $\delta$ . Объем  $\delta$ -параллельного тела вычисляется как

$$\text{Vol}_\delta = \sum_{i,j} (u_\delta(i, j) - b_\delta(i, j)). \quad (3)$$

Площадь поверхности фрактала может быть вычислена по следующим формулам:

$$A_\delta = \frac{\text{Vol}_\delta}{2\delta}; \quad (4)$$

$$A_\delta = \frac{\text{Vol}_\delta - \text{Vol}_{\delta-1}}{2}. \quad (5)$$

Как отмечалось в работе [7], формула (4) больше подходит для строго фрактальных объектов, в то время как формула (5) используется как для фрактальных так и для не фрактальных поверхностей. Ее применение более оправдано в том случае, если значения  $\text{Vol}_\delta$  зависят от изменений, которые происходят при уменьшении масштабов: вычитание  $\text{Vol}_{\delta-1}$  отделяет только те особенности, которые изменяются при переходе от  $\delta-1$  к  $\delta$ . В данной работе мы используем формулу (5). Так как  $A(\delta) \approx \beta \delta^{2-D}$ , то

$$D = 2 - \frac{\log_2 A_\delta}{\log_2 \delta}. \quad (6)$$

Вычисление площади поверхности графика функции  $F$  можно провести для всего изображения или разбить его на части и выполнить вычисления для каждой ячейки. Такой

способ позволяет более точно оценить площадь поверхности, получить ее зависимость от размера ячейки разбиения, а также построить карту изображения, где в цветовом режиме показаны полученные значения площадей ячеек разбиения (или их размерностей). При-

ближенное значение отношения  $\frac{\log_2 A_\delta}{\log_2 \delta}$  находится по методу наименьших квадратов как

угловой коэффициент прямой в осях  $(\log_2 \delta, \log_2(A_\delta))$ .

*Алгоритм вычисления.*

1. Разбиваем изображение на  $n$  квадратных ячеек размера  $N \times N$ .

2. Для каждой ячейки строим функцию градации серого  $F$ .

3. Определяем  $u_0^k$  и  $b_0^k$  как  $u_0^k(i,j)=b_0^k(i,j)=F(i,j)$ ,  $k=1, \dots, n$ .

Для  $\delta = 1, 2$ .

4. Вычисляем  $u_\delta^k$ ,  $b_\delta^k$  по формулам (1) и (2).

5. По (3) вычисляем объемы  $\delta$ -параллельных тел для поверхностей, построенных над ячейками.

6. Определяем площади  $A_\delta^k$  по формуле (5).

7. Суммируем полученные площади по всем ячейкам:

$$A_1 = \sum_{k=1}^n A_1^k, \quad A_2 = \sum_{k=1}^n A_2^k.$$

Из формулы (6) определяем фрактальную размерность документа.

При использовании описанной техники естественным образом возникает вопрос: как будет вести себя последовательность значений  $A_\delta$  при изменении  $\delta$  от 1 до некоторого числа  $K$ ? Так как для произвольных фрактальных множеств величина размерности  $D$  зависит от  $\delta$ , авторы работы [7] предложили рассматривать вектор фрактальных размерностей, полученных при изменении  $\delta$  как характеристику изображения при изменении разрешения: большие значения  $D(\delta)$  при малых  $\delta$  говорят о сильном изменении интенсивности на расстоянии  $\delta$ , в то время как большие значения размерности для больших  $\delta$  показывают, что интенсивность меняется мало. Не обсуждая вопросы сходимости, авторы, тем не менее, на исследовании большого числа различных текстур экспериментально показали, что существует некоторый интервал значений  $\delta$ , на котором значения площади принимают весьма близкие значения, иначе говоря, в определенном смысле стабилизируются. Это согласуется с наблюдением Б. Мандельброта, который при обсуждении способов измерения длины береговой линии указывал, что можно определить экспериментально некий диапазон параметров, определяющих ширину полосы, охватывающей эту линию, такой, что в этом диапазоне измерения будут давать близкие значения.

Получаемые векторы фрактальных размерностей позволяют определить некоторое «расстояние» ( $\rho$ ) между изображениями. Малое расстояние между полученными векторами может характеризовать близость изображений в смысле близости их текстур.

Для изображений  $I$  и  $J$  определим

$$\rho(I, J) = \sum_{\delta} (D_I(\delta) - D_J(\delta))^2 \log \frac{(\delta + 0,5)}{(\delta - 0,5)}. \quad (7)$$

В методе наименьших квадратов  $D(\delta)$  определяется через  $A_\delta, A_{\delta+1}, A_{\delta-1}$ .

Программное средство для реализации описанного метода было реализовано на языке Java, что делает его независимым от платформы, на которой выполняется приложение, а простой и понятный интерфейс обеспечивает удобство использования для широкого круга

пользователей. Приложение писалось и тестировалось на среде разработки Eclipse 3.5 под Windows XP и Windows 7. В качестве тестовых образцов были рассмотрены снимки биомедицинских препаратов следующих классов: костная и соединительная ткани, кровь, гистологические препараты. Для большинства изображений оказывалось достаточно применения первого метода, чтобы отличить изображения разных классов. Для классификации внутри класса использовался метод вычисления расстояний между изображениями.

На следующих рисунках показаны образцы снимков здоровой крови (рис. 1) и крови, пораженной лейкемией (рис. 2). Для диагностики использовался первый метод, т. е. вычислялась площадь поверхности графика функции градации серого в зависимости от размера ячейки разбиения. Соответствующие графики (площадь нормирована) приведены ниже, на рис. 3.

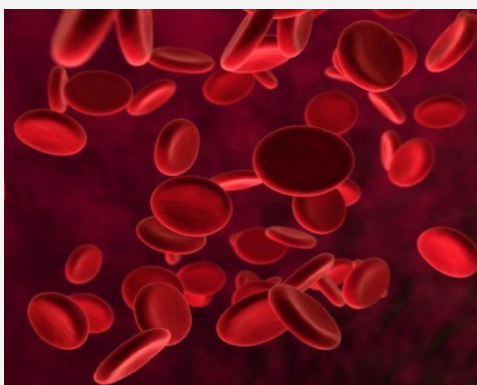


Рис. 1. Здоровая кровь

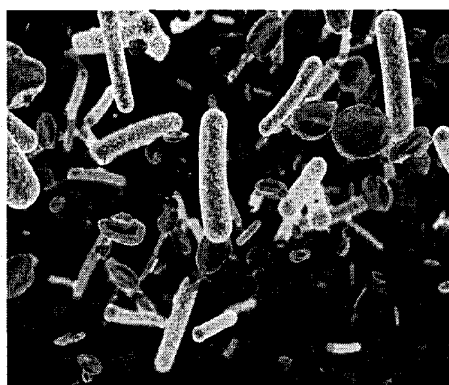


Рис. 2. Лейкемия

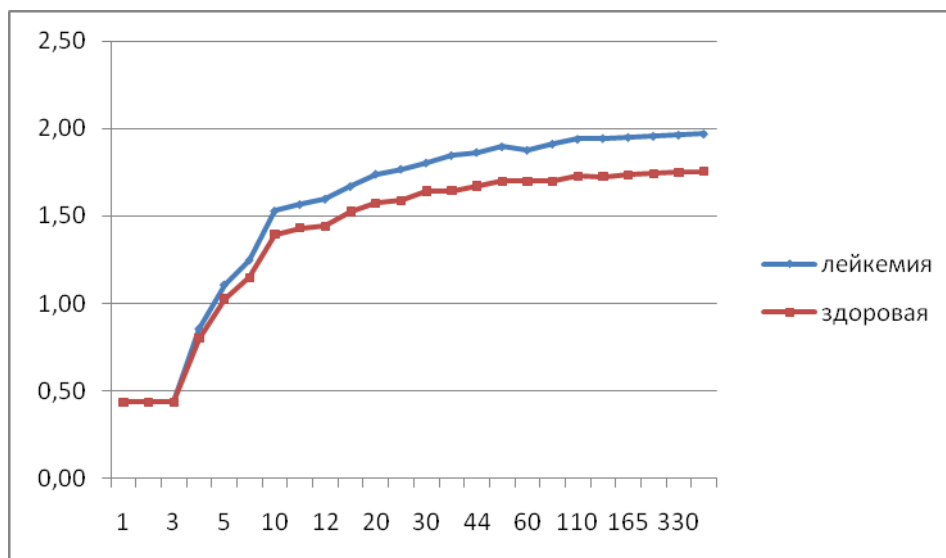


Рис. 3. Зависимость площади поверхности от размера ячейки

Для сравнений изображений здоровой костной ткани (рис. 4) и ткани, пораженной остеопорозом (рис. 5), был применен второй метод, где параметр  $\delta$  менялся от 1 до 20. Расстояние между изображениями — 1,357.

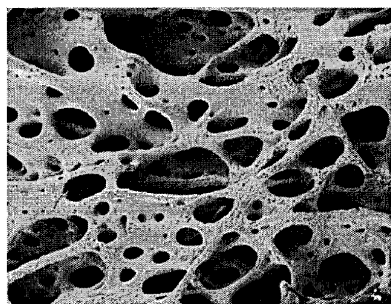


Рис. 4. Здоровая костная ткань

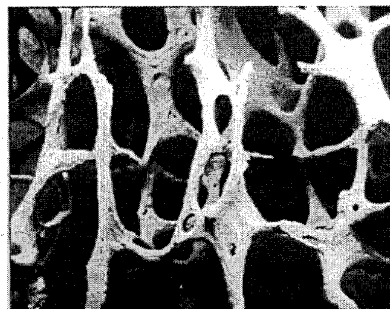
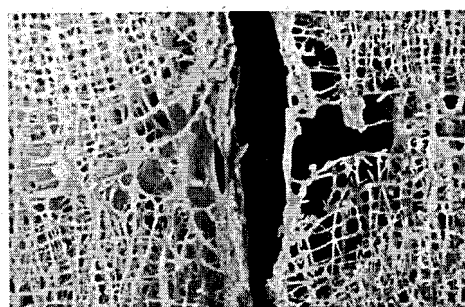
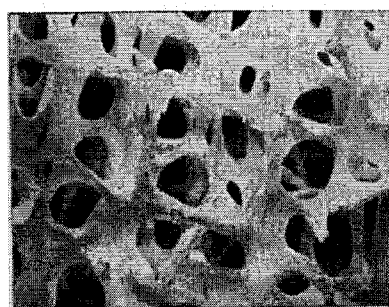


Рис. 5. Остеопороз

В приведенной ниже таблице изображения 4, 14, 53 представляют снимки ткани с остеопорозом, а изображения 1, 2, 20 — снимки здоровой ткани. Хорошо видно, что внутри второго класса изображения близки по структуре, в то время как изображение 53 отличается от 4 и 14. И действительно, снимки показывают разные виды остеопороза (слева — 4, справа — 53). А по вычисленным расстояниям снимок 53 больше тяготеет к изображениям первого класса.

Таблица расстояний между изображениями

	4	14	53	1	2	20
4	0	0.05485	0.12859	0.24468	0.20343	0.23325
14	0.05485	0	0.06087	0.13042	0.13503	0.12700
53	0.12859	0.06087	0	0.09143	0.08259	0.03802
1	0.24468	0.13042	0.09143	0	0.02802	0.06814
2	0.20343	0.13503	0.08259	0.02802	0	0.04120
20	0.23325	0.12700	0.03802	0.06814	0.04120	0



Таким образом, эксперименты показали, что метод достаточно надежно отличает текстурно различные изображения. В то же время возможна ситуация, когда изображения разных по смыслу классов могут иметь близкие текстуры и тогда полученные числовые значения не могут гарантировать успешную классификацию. Следовательно, необходима более тонкая смысловая классификация, а также более совершенный метод разделения (как, например, предложенный в работе [7] вариант асимметричного построения верхнего и нижнего покрывал).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Техносфера, 2005. 1041 с.
2. Каллан Р. Основные концепции нейронных сетей. М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. 208 с.
3. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника. Теория и практика. М.: Мир, 1992. 184 с.
4. Chen C. Pau., L. F., Wang P. S. P. The handbook of Pattern recognition and computer vision. World scientific publishing co., 1998, 418 с.
5. Falconer K. J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons, 1990. 288 p.
6. Mandelbrot B. The fractal geometry of nature W. H. Freeman and Co., 1982. 480 p.
7. Peleg Shmuel, Naor Joseph, Hartley Ralph, Avnir David. Multiple Resolution Texture Analysis and Classification. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. PAMI-6. No.4, 1984. P. 518–523.
8. Tang Y. Y., Hong Ma, Dihua Xi, Xiaogang Mao, Suen C. Y. Modified Fractal Signature (MFS): A New Approach to Document Analysis for Automatic Knowledge Acquisition. IEEE Trans. Knowledge and Data Eng., vol. 9. No. 5. 1997. P. 742–762.
9. Xia Y., Feng D., Zhao R. Morphology-Based Multifractal Estimation for Texture Segmentation. IEEE Trans. on Image Proc., vol. 15. No. 3. 2006. P. 614–623.
10. Yong Xu, Hui Ji, Fermuller Cornelia. Viewpoint Invariant Texture Description Using Fractal Analysis. Int. J. Comput. Vis (2009) 83. P. 85–100.
11. [http://neuroface.narod.ru/files/NN\\_FFI.pdf](http://neuroface.narod.ru/files/NN_FFI.pdf)

## REFERENCES

1. Gonsales R., Vuds R. Cifrovaja obrabotka izobrazhenij Tehnosfera, 2005. 1041 с.
2. Kallan R. Osnovnye koncepcii nejronnyh setej. M.: Izd. dom "Vil'jams", 2001. 208 с.
3. Uossermen F. Nejrokomp'juternaja tehnika. Teorija i praktika. M.: Mir, 1992. 184 с.
4. Chen C. H., Pau L. F., Wang P. S. P. The handbook of Pattern recognition and computer vision — World scientific publishing co., 1998. 418 с.
5. Falconer K. J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons, 1990. 288 p.
6. Mandelbrot B The fractal geometry of nature. W. H. Freeman and Co., 1982. 480 p.
7. Peleg Shmuel, Naor Joseph, Hartley Ralph, Avnir David. Multiple Resolution Texture Analysis and Classification. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. Vol. PAMI-6. No. 4. 1984. P. 518–523.
8. Tang Y. Y., Hong Ma, Dihua Xi, Xiaogang Mao, Suen C. Y. Modified Fractal Signature (MFS): A New Approach to Document Analysis for Automatic Knowledge Acquisition. IEEE Trans. Knowledge and Data Eng. Vol. 9. No. 5. 1997. P. 742–762.
9. Xia Y., Feng D., Zhao R. Morphology-Based Multifractal Estimation for Texture Segmentation. IEEE Trans. on Image Proc. Vol. 15. No. 3. 2006. P. 614–623.
10. Yong Xu, Hui Ji, Fermuller Cornelia. Viewpoint Invariant Texture Description Using Fractal Analysis. Int.J.Comput.Vis (2009) 83. P. 85–100.
11. [http://neuroface.narod.ru/files/NN\\_FFI.pdf](http://neuroface.narod.ru/files/NN_FFI.pdf)

*Б. Х. Ал Нуаири*

### КЛАССИФИКАЦИИ ФОРМ РЕЛЬЕФА КОТЛОВИНЫ ХАМРИН (ИРАК) НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

*В работе впервые представлены результаты геоморфологического исследования котловины Хамрин, основанного на данных дистанционного зондирования. Для этого нами были использованы данные съемок Land sat TM и Land sat ETM на*