

9. Горбунова И. Б., Романенко Л. Ю., Родионов П. Д. Музыкально-компьютерные технологии в формировании информационной компетентности современного музыканта // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2013. № 1 (167). С. 39–48.

10. Горбунова И. Б., Чибирев С. В. Музыкально-компьютерные технологии: к проблеме моделирования процесса музыкального творчества: Монография. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2012. 160 с.

#### REFERENCES

1. Gorbunova I. B. Informatsionnye tehnologii v muzyke. T. 1: Arhitektonika muzykal'nogo zvuka: Uchebnoe posobie. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gertsena, 2009. 175 s.

2. Gorbunova I. B. Informatsionnye tehnologii v muzyke. T. 3: Muzykal'nyj komp'juter: Uchebnoe posobie. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gertsena, 2011. 412 s.

3. Gorbunova I. B. Fenomen muzykal'no-komp'juternyh tehnologij kak novaja obrazovatel'naja tvorcheskaja sreda // Izvestija RGPU im. A. I. Gertsena: Nauchnyj zhurnal. 2004. № 4 (9). S. 123–138.

4. Gorbunova I. B., Zalivadnyj M. S. Informatsionnye tehnologii v muzyke. T. 4: Muzyka, matematika, informatika: Uchebnoe posobie. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gertsena, 2013. 190 s.

5. Gorbunova I. B., Zalivadnyj M. S. Opyt matematicheskogo predstavlenija muzykal'no-logicheskikh zakonernostej v knige Ja. Ksenakisa «Formalizovannaja muzyka» // Obshestvo — Sreda — Razvitie: Nauchno-teoreticheskij zhurnal. 2012. № 4(25). S. 135–139.

6. Gorbunova I. B., Zalivadnyj M. S., Kibitkina E. V. Osnovy muzykal'nogo programmirovaniya: Uchebnoe posobie. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gertsena, 2012. 195 s.

7. Gorbunova I. B., Zalivadnyj M. S. O matematicheskikh metodah v issledovanii muzyki i podgotovke muzykantov // Problemy muzykal'noj nauki. 2014. № 1(12). S. 272–276.

8. Gorbunova I. B., Kibitkina Je. V. Muzykal'noe programmirovaniye: voprosy podgotovki specialistov // Iskusstvo i obrazovanie. 2010. № 5 (67). S. 104–111.

9. Gorbunova I. B., Romanenko L. Ju., Rodionov P. D. Muzykal'no-komp'juternye tehnologii v formirovanii informatsionnoj kompetentnosti sovremennogo muzykanta // Nauchno-tehnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. 2013/ № 1 (167). S. 39–48.

10. Gorbunova I. B., Chibirjov S. V. Muzykal'no-komp'juternye tehnologii: k probleme modelirovaniya protsesssa muzykal'nogo tvorchestva: Monografija. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gertsena, 2012. 160 s.

*А. А. Денисевич, А. В. Ляцев*

#### КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМООРГАНИЗАЦИИ В ПРОСТЕЙШИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

*Рассмотрена компьютерная модель, иллюстрирующая образование пространственных структур на траектории движения частицы в бильярде. Приводятся результаты численных расчетов, а также анализ возможных аттракторов в зависимости от параметров модели.*

**Ключевые слова:** процессы самоорганизации, математическая модель, пространственные структуры, компьютерное моделирование.

*A. Denisevich, A. Liaptcev*

**Computer Simulation of Self-Organization Processes  
in the Simplest Mechanical Systems**

*A computer model for illustration of spatial structures formation on the chart trajectory of the motion of particles in billiards is proposed. The paper contains results of numerical calculations and analysis possible attractors depending of the parameters of models.*

**Keywords:** processes of self-organization, mathematical model, spatial structures, computational simulation.

Процессы самоорганизации характерны для эволюции сложных систем, какими являются многие системы в природе и в обществе. Их изучение является основной задачей *синергетики* — области междисциплинарных исследований, цель которых — выявление общих закономерностей в процессах образования, устойчивости и разрушения упорядоченных временных и пространственных структур в сложных неравновесных системах различной природы. Современное определение этого термина было дано Г. Хакеном в 1977 г. [11], и в настоящее время эта наука широко применяется для изучения как процессов, происходящих в природе, так и общественных процессов. Во многом возможность реального продвижения в понимании процессов самоорганизации появилась благодаря компьютерному моделированию. Часто при помощи вычислительных методов «нащупываются» примеры процессов самоорганизации, которые лишь затем получают некоторое объяснение на основе традиционных аналитических методов исследования.

Помимо чисто научной задачи, компьютерное моделирование позволяет эффективно использовать полученные результаты в учебном процессе для демонстрации методов синергетики и полученных на ее основе научных результатов. В этом случае целесообразно использовать модели, с одной стороны, достаточно простые для понимания учащимися и, с другой стороны, наглядно демонстрирующие основные свойства самоорганизующихся систем. Более того, в ряде случаев эффективным в учебном процессе может быть использование моделей, которые могут быть воспроизведены самими учащимися в рамках занятий по обучению программированию или математическому моделированию. Так, например, при изучении процессов самоорганизации временных упорядоченных структур достаточно простыми моделями являются модели, демонстрирующие переходы между упорядоченным и хаотическим движением в системах, находящихся под действием периодического воздействия [3]. Ряд подобных моделей, которые могут быть успешно применены даже на занятиях с учащимися физико-математических классов, приведены в учебном пособии [7]. Примером модели, демонстрирующей процессы самоорганизации с возникновением упорядоченных временных структур и переходами между хаосом и упорядочением в системах, находящихся под внешним постоянным воздействием, может служить модель автоколебаний в системе с двумя степенями свободы [9].

Более сложна ситуация с моделями, демонстрирующими возникновение упорядоченных пространственных структур. Одной из первых имитационных моделей, наглядно демонстрирующих самоорганизацию, является придуманная Дж. Конвеем игра *жизнь*, в которой из бесструктурного набора клеток, подчиняющихся определенным правилам эволюции, возникают упорядоченные пространственные структуры (см., например, работу [5]). Другой традиционно демонстрируемой системой, в которой возникают упорядоченные

пространственные структуры, является подогреваемый слой жидкости с возникающими в нем ячейками Бенара. Математическая модель этой системы, используемая в учебном процессе, приведена в монографии [10].

Следует заметить, что адекватное по простоте объяснение причин возникновения структур и их устойчивости далеко не всегда оказывается возможным. Как правило, соответствующие объяснения требуют владения серьезным математическим аппаратом, используемым в задачах нелинейной динамики (см., например, работы [1; 2; 4]). Однако в ряде случаев подобное объяснение для достаточно простых систем может быть дано на уровне, не требующем владения методами нелинейной динамики [8]. В данной работе мы предлагаем модель, которая, демонстрируя процессы образования пространственных структур в достаточно простой и наглядной физической системе, может быть достаточно просто реализована на практических занятиях со студентами, причем могут быть достаточно просто объяснены причины образования и устойчивости подобных структур.

Исходной моделью является модель бильярда, в которой материальная точка движется по прямолинейным траекториям с постоянной скоростью, упруго отражаясь от стенок. Более сложные модели бильярдов, в которых область пространства, ограничивающая движение частицы, имеет сложный вид, традиционно исследуются в задачах нелинейной динамики (см., например, литературу [6]). Как правило, предметом исследования является существование и устойчивость периодических траекторий. Для рассматриваемого нами простейшего прямоугольного бильярда нахождение периодических траекторий является школьной задачей. Суть решения легко понять, рассмотрев сетку соответствующих прямоугольников (рис. 1).

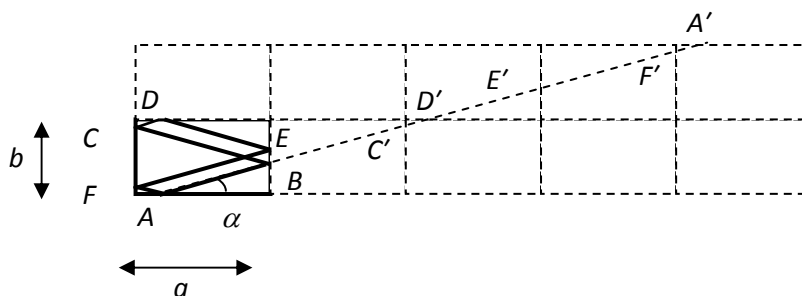


Рис. 1

Вместо реального движения частицы после отражения от стенки можно представить, что частица, не изменяя скорости, продолжает движение в соседней клетке. Таким образом, вместо движения по замкнутой ломаной линии  $ABCDEFA$  можно рассматривать движение по прямой линии, состоящей из соответствующих отрезков  $ABC'D'E'F'A'$ . Точка  $A'$  на сетке эквивалентна точке  $A$ . Несложно увидеть, что если изначально частица находилась у горизонтальной прямой, то для завершения цикла она должна четное число раз отразиться от вертикальной стенки и нечетное число раз — от горизонтальной стенки. Соответственно прямая, идущая в эквивалентную точку, должна нечетное число раз пересечь горизонтальные линии и четное число раз — вертикальные линии. Отсюда следует, что эквивалентная точка должна быть сдвинута относительно исходной точки на величину  $2ma$  по горизонтали и  $2nb$  по вертикали, где  $a$  и  $b$  — размеры бильярда,  $m$  и  $n$  — целые числа. Определяющий наклон прямой угол  $\alpha$  соответственно задается выражением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{nb}{ma}.$$

Из этих рассуждений следует, что траектория является замкнутой, т. е. движение частицы — периодичным, если число

$$r = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

является рациональным. В случае иррационального числа  $r$ , например, при  $a=b$  и  $\alpha=30^\circ$ , траектория будет незамкнутой, а движение — непериодичным. Здесь следует отметить, что иррациональным числам соответствуют лишь идеализированные объекты, любая реальная величина определяется с некоторой погрешностью, а следовательно, может быть выражена рациональным числом. Точно так же при каких-либо численных расчетах все получаемые результаты выражаются рациональными числами. Тем не менее траектории для близких чисел  $r$  могут существенно различаться по виду. Например, при  $r=1$  траектория будет представлять собой параллелограмм, а для близкого числа  $99/100$  траектория будет состоять примерно из 398 линий, и то, что эта траектория является замкнутой, визуальнo определить трудно. Как мы далее покажем, самоорганизация может проявляться в эволюции траектории, так что конечным этапом эволюции является траектория, состоящая из небольшого числа линий.

Чтобы привести в модель свойства, способствующие самоорганизации, акцентируем внимание на двух основных свойствах самоорганизующихся систем. Эти системы должны быть *открытыми*, т. е. подвергающимся некоторому внешнему воздействию, и эти системы должны быть *диссипативными*. Не приводя строгое определение диссипативности (см. выше процитированные книги [4]), отметим, что для рассматриваемой здесь механической системы это означает присутствие процессов, преобразующих энергию упорядоченного движения (механическую энергию) в энергию хаотического движения (внутреннюю тепловую энергию). Из курса физики известно, что такие процессы происходят при наличии сил трения. В соответствии с этим дополним модель силами трения, которые будем считать пропорциональными скорости (силы вязкого трения):

$$F = -C_v \cdot \quad (2)$$

Знак «минус» в выражении (2) соответствует тому, что векторы силы и скорости направлены противоположно.

Очевидно, что наличие силы трения в конце концов приведет к остановке частицы, если не оказывать на нее внешнего воздействия. Шары на бильярдном столе останавливаются, если не воздействовать на них кием. Чтобы ввести внешнее воздействие, предположим, что стенка подталкивает столкнувшийся с нею шар, сообщая ему некоторую энергию. Подобная модель не лишена физического смысла, при столкновении с теплой стенкой молекулы газа приобретают дополнительную энергию, которую потом передают другим молекулам при столкновениях. Именно так происходит повышение температуры воздуха в помещении при обогреве какими-либо отопительными приборами. Соответственно будем называть нашу модель «бильярд с теплыми стенками».

Сделаем также некоторые дополнительные предположения относительно внешнего воздействия. Во-первых, будем считать, что при каждом столкновении восстанавливается первоначальная (по модулю) скорость, то есть скорость, которую сообщили частице в начале движения. Во-вторых, будем считать, что при столкновениях изменяется лишь составляющая скорости, перпендикулярная поверхности, с которой сталкивается частица (нормальная составляющая скорости). Если оси  $X$  и  $Y$  направить соответственно по горизонтали и

вертикали (естественно, имеется в виду вертикаль на рисунке), то при столкновении с горизонтальной стенкой проекции скорости изменяются по закону:

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x, \\ v'_y &= -\text{sign}(v_y)\sqrt{v_0^2 - v_x^2} \end{aligned} \quad (3)$$

( $v_0$  — начальная скорость молекулы, штрихами обозначены проекции скорости после столкновения,  $\text{sign}(x)$  — функция, определяющая знак числа  $x$ ), а при столкновении с вертикальной стенкой — по закону:

$$\begin{aligned} v'_x &= -\text{sign}(v_x)\sqrt{v_0^2 - v_x^2}, \\ v'_y &= v_y. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение, описывающее движение частицы между столкновениями, определяется вторым законом Ньютона:

$$ma = -C_v,$$

откуда следует дифференциальное уравнение для скорости:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\gamma\mathbf{v}, \quad (5)$$

где  $\gamma = C/m$ , а в левой части уравнения (2) стоит производная от скорости по времени. Решение уравнения (5) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 \exp(-\gamma(t - t_0)), \quad (6)$$

где  $\mathbf{v}_0$  — скорость в некоторый начальный момент времени  $t_0$ . Векторное равенство (6) эквивалентно двум скалярным равенствам для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} \exp(-\gamma(t - t_0)), \\ v_y(t) &= v_{0y} \exp(-\gamma(t - t_0)). \end{aligned} \quad (7)$$

Зависимость координат от времени получается при интегрировании выражений (7):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}(1 - \exp(-\gamma(t - t_0))) / \gamma, \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}(1 - \exp(-\gamma(t - t_0))) / \gamma, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $x_0$  и  $y_0$  — координаты частицы в момент времени  $t_0$ . Как обычно, в подобных моделях перед проведением вычислений удобно провести масштабирование. В данном случае за единицу длины удобно принять значение  $a/2$ , а за единицу скорости — значение  $v_0$ . Единицей времени в этом случае будет половина времени пролета между вертикальными стенками при единичной скорости, направленной горизонтально.

Результаты расчетов изображены на рис. 2. Параметр диссипации  $\gamma = 0,01$ . Соотношение между сторонами бильярда выбрано 2:1. Первый рисунок (рис. 2а) соответствует траектории движения на временном интервале  $t \in [0, 100]$ , второй — на интервале  $t \in [100, 200]$  и третий — на интервале  $t \in [900, 1000]$ . Как видно из рисунков, уже на втором интервале устанавливается практически одинаковый наклон отрезков траектории. За время порядка  $10\gamma^{-1}$  происходит визуально наблюдаемое установление структур (рис. 2в).

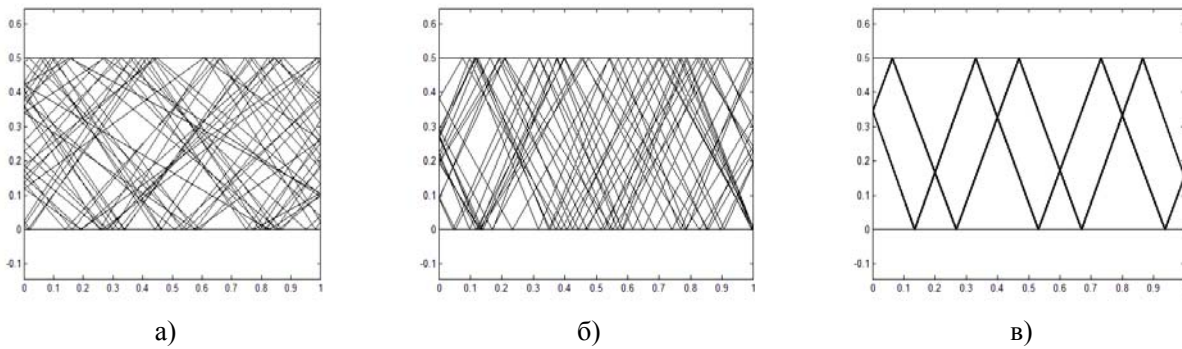


Рис. 2

Численный эксперимент показывает, что при заданной конфигурации бильярда (отношение сторон) при произвольных начальных состояниях существует конечное число устойчивых периодических траекторий, являющихся аттракторами, по сравнению с бесконечным количеством периодических траекторий, определяемых соотношениями (1). Возникает вопрос, можно ли найти какие-либо критерии, определяющие устойчивость траекторий, и объяснить факт, что такие траектории являются аттракторами. В общем случае произвольных значений параметров какие-либо аналитические оценки оказываются невозможными, однако, как часто происходит в математических моделях, анализ предельных случаев малых параметров позволяет получить некоторые результаты.

Ограничимся далее рассмотрением малого значения диссипации, т. е. малого значения параметра  $\gamma$ . Как уже говорилось, движение частицы в бильярде можно представить как переход в соседнюю эквивалентную ячейку при каждом отражении от стенки (см. рис. 1). При отличном от нуля параметре  $\gamma$  траектория частицы при переходе в соседнюю ячейку будет «преломляться» в соответствии с тем, что ее скорости изменяются в соответствии с формулами (3) и (4). Без потери общности можно считать, что рациональное число  $r$  в формуле (1), определяющее замкнутую траекторию движения частицы, больше единицы; для рассмотрения противоположного случая достаточно поменять местами горизонтальную и вертикальную оси. При  $r > 1$  при перемещении частицы по вертикали на одну длину ячейки достаточно рассмотреть два различных случая, изображенных на рис. 3 (а, б).

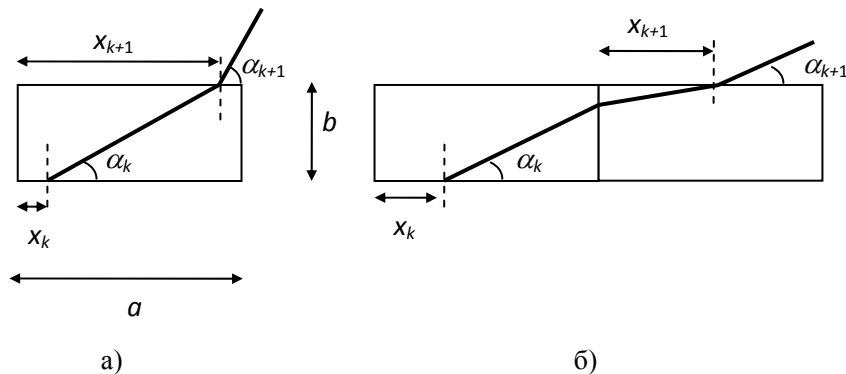


Рис. 3

В обозначениях на рис. 3 индекс  $k$  нумерует очередной  $k$ -й шаг,  $x_k$  — расстояние от левого края ячейки при вхождении траектории в ячейку,  $\alpha_k$  — угол между линией траектории и горизонталью. Смысл дальнейшего анализа — в написании рекуррентных соотношений для величин  $\{x_k, \alpha_k\}$  и в использовании этих соотношений для периодического процесса, при котором величины  $\{x_k, \alpha_k\}$  после нескольких шагов становятся равными начальным значениям.

Чтобы упростить выражения, введем малый параметр  $\xi = \gamma/v_0$ . Используя далее выражения (3) и (4), можно получить для случая «а» на рис. 3 рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= \arccos(\cos \alpha_k - \xi \operatorname{ctg} \alpha_k), \\ x_{k+1} &= x_k + b \operatorname{ctg} \alpha_k,\end{aligned}\quad (9)$$

а для случая «б» — соотношения:

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= \arccos\left(\sqrt{1-s_k^2}\left(1-\xi\frac{b-(a-x_k)\operatorname{tg}\alpha_k}{s_k}\right)\right), \\ x_{k+1} &= \frac{(b-(a-x_k)\operatorname{tg}\alpha_k)\sqrt{1-s_k^2}}{s_k},\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$s_k = \sin \alpha_k - \xi(a-x_k)\operatorname{tg} \alpha_k.$$

При учете малости параметра  $\xi$  выражения (10) можно упростить, ограничившись линейными членами в разложении по этому параметру:

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= \alpha_k + \frac{\xi}{\sin \alpha_k}\left(b \operatorname{ctg} \alpha_k - \frac{a-x_k}{\cos^2 \alpha_k}\right), \\ x_{k+1} &= x_k + b \operatorname{ctg} \alpha_k - a + \xi \frac{(a-x_k)(b \operatorname{ctg} \alpha_k - (a-x_k))}{\cos^3 \alpha_k}.\end{aligned}\quad (11)$$

При стремлении параметра  $\xi$  к нулю ломаная линия траектории будет переходить в прямую, идущую под углом  $\alpha$ , а величины  $x_k \rightarrow x_k^{(0)}$  определяются простыми соотношениями:

$$x_k^{(0)} = x_0 + kb \operatorname{ctg} \alpha. \quad (12)$$

При малом, но отличном от нуля значении параметра  $\xi$ , величины  $\alpha_k$  и  $x_k$  должны быть близки к  $\alpha$  и  $x_k^{(0)}$  соответственно. Рассмотрим малые отклонения этих величин как элементы вектора  $U^{(k+1)}$ :

$$U^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_k - \alpha \\ x_k - x_k^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда для случая «а» рекуррентные соотношения (9) можно записать в матричном виде:

$$U^{(k+1)} = BU^{(k)} + D, \quad (14)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \xi b_{11} & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \xi d \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_{11} = \frac{b}{\sin^3 \alpha}, \quad q = \frac{b}{\sin^2 \alpha}, \quad d = b \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Аналогично для случая «б» рекуррентные соотношения можно, исходя из формул (11), записать в виде

$$U^{(k+1)} = AU^{(k)} + C, \quad (15)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \xi a_{11} & \xi a_{12} \\ -q - \xi a_{21} & 1 - \xi a_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \xi \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = b \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} + \frac{(a - x_k^{(0)})(\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha \cos^3 \alpha},$$

$$a_{22} = \frac{b \operatorname{ctg} \alpha - 2(a - x_k^{(0)})}{\cos^3 \alpha},$$

$$a_{12} = \frac{1}{\sin \alpha \cos^2 \alpha},$$

$$a_{21} = (a - x_k^{(0)}) \left( \frac{b(\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha \cos^3 \alpha} + \frac{3(a - x_k^{(0)}) \sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \right),$$

$$c_1 = \frac{1}{\sin \alpha} \left( b \operatorname{ctg} \alpha - \frac{a - x_k^{(0)}}{\cos^2 \alpha} \right),$$

$$c_2 = \frac{a - x_k^{(0)}}{\cos^3 \alpha} \left( b \operatorname{ctg} \alpha - (a - x_k^{(0)}) \right).$$

Использование рекуррентных соотношений позволяет проводить поиск устойчивых периодических траекторий при малом значении  $\gamma$ . При  $\gamma = 0$  любая периодическая траектория определяется в соответствии с формулой (1) рациональным числом  $r$ , определяющим при заданных размерах бильярда угол  $\alpha$ . Пусть на этой предельной траектории сторона  $b$  пересекается  $n$  раз. Тогда, применяя последовательно рекуррентные соотношения (14) и (15), приходим к уравнению:

$$U^{(n)} = FU^{(0)} + G, \quad (15)$$

где матрица  $F$  и вектор  $G$  определяются через матрицы  $A$ ,  $B$  и векторы  $C$ ,  $D$  в выражениях (14) и (15). Матрица  $F$  и вектор  $G$  зависят от угла  $\alpha$ , характеризующего рассматриваемую траекторию, и в соответствии с формулами (12) от начального значения  $x_0$ , который не определяется при  $\gamma = 0$ . Для нахождения значения  $x_0$  полагаем, что траектория периодична, т. е.  $U^{(n)} = U^{(0)}$ , в результате чего получаем уравнение



$$(E - F)U^{(0)} = G, \quad (16)$$

где  $E$  — единичная матрица. Равенство (16) можно рассматривать как уравнение, определяющее вектор  $U^{(0)}$ . Один из элементов этого вектора, а именно  $U_2^{(0)} = x_0 - x_0^{(0)}$ , без потери общности можно положить равным нулю. Вторая компонента этого вектора должна быть отлична от нуля, иначе траектория при  $\gamma \neq 0$  будет совпадать с траекторией при  $\gamma = 0$ . В соответствии с общими свойствами систем линейных уравнений отличное от тождественного нуля решение для  $U^{(0)}$  возможно лишь при выполнении равенства

$$\det(E - F) = 0. \quad (17)$$

Это нелинейное относительно величины  $x_0$  уравнение определяет совокупность возможных значений  $x_0$ . Далее для каждого из найденных значений  $x_0$  можно из уравнения (16) найти значение  $U^{(0)}$ , т. е. фактически значение  $\alpha^{(0)}$ .

Полученное решение, однако, не обязательно будет устойчивым, т. е. будет являться аттрактором, к которому будут сходиться траектории, близкие к этому решению. Для исследования устойчивости сделаем следующую замену в уравнении (15):

$$U^{(0)} \rightarrow U^{(0)} + \Delta U^{(0)}, \quad U^{(n)} \rightarrow U^{(0)} + \Delta U^{(n)}. \quad (18)$$

Из уравнения (15) с учетом того, что  $U^{(0)}$  является решением уравнения (16), получим соотношение, связывающее векторы  $\Delta U^{(0)}$  и  $\Delta U^{(n)}$ :

$$\Delta U^{(n)} = F \Delta U^{(0)}. \quad (19)$$

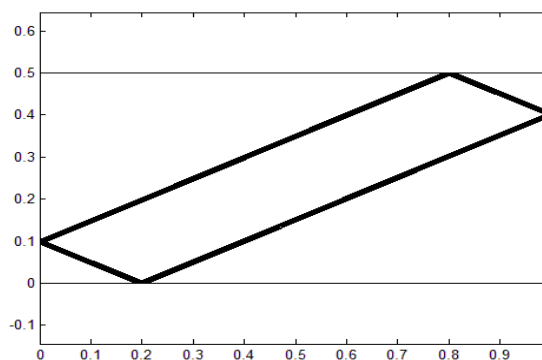
Это уравнение позволяет исследовать устойчивость решения. Если отклонение  $\Delta U^{(n)}$  больше, чем  $\Delta U^{(0)}$ , то решение неустойчиво, и наоборот. Детальные оценки показывают, что в данном приближении (линейный порядок по  $\xi$ ) достаточно вычислить  $|\det(F)|$ . Решение будет устойчивым при  $|\det(F)| < 1$  и неустойчивым при  $|\det(F)| > 1$ .

Полученные выражения достаточно громоздки, однако в простейших случаях позволяют провести исследование. Так, например, для простейшей траектории в виде параллелограмма (четыре отражения от стенок за цикл) получается простое выражение для  $x_0$ :

$$x_0 = a \sin^2 \alpha,$$

однако численный расчет при данных начальных условиях, показывает, что сходимости к замкнутой траектории нет (жирная линия на рис. 4 соответствует большому числу близких линий).

Рис. 4



В то же время при шести отражениях за цикл (аналог траектории, изображенной на рис. 1) расчет по формуле (17) дает:

$$x_0 = -a \cos(2\alpha) / 2,$$

а траектория является устойчивой. На рис. 5а изображены траектории на интервале  $t \in [0, 100]$ , а на рис. 5б на интервале времени  $t \in [1100, 1200]$ .

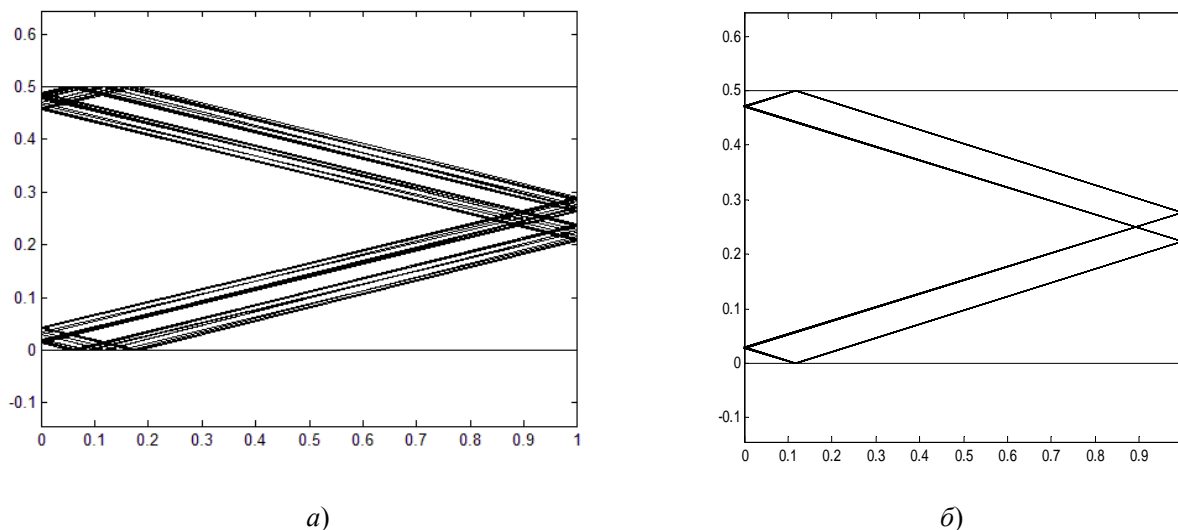


Рис. 5

Проведенный анализ, естественно, не дает возможности полностью решить задачу, заменив численный расчет. Можно получить лишь параметры траекторий, являющихся аттракторами, однако определить область начальных значений, при которых решение будет сходиться к заданному аттрактору, аналитическими методами оказывается невозможным.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. Т. 1.
2. Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой. М.: Изд-во ЛКИ, 2013.
3. Бутиков Е. И. Необычное поведение маятника при синусоидальном внешнем воздействии. // Компьютерные инструменты в образовании. 2008. № 2. Ч. 2. С. 24–36.
4. Гритченко В. Т., Мацитура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
5. Клумова И. Н. Игра «Жизнь» // Квант. 1974. № 9. С. 26–30.
6. Козлов В. В., Трецез Д. В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М., 1991.
7. Кондратьев А. С., Ляцез А. В. Физика. Задачи на компьютере. М.: Физматлит, 2006.
8. Ляцез А. В. «Квантование» в задачах нелинейной динамики. Численный эксперимент и интерпретация // Известия РГПУ им. А. И. Герцена. 2012. № 147. С. 161–175.
9. Ляцез А. В. Странный аттрактор в простейшей механической системе // Компьютерные инструменты в образовании. 2010. № 6. С. 57–66.
10. Попов С. Е. Методическая система подготовки учителя в области вычислительной физики: Монография. Нижний Тагил: НТГСПА, 2005.
11. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.

## REFERENCES

1. Avramov K. V., Mihlin Ju. V. Nelinejnaja dinamika uprugih sistem. Modeli, metody, javlenija. M.; Izhevsk: NITs «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», 2010. T. 1.
2. Anishchenko V. S. Znakomstvo s nelinejnoj dinamikoj. M.: Izd-vo LKI, 2013.
3. Butikov E. I. Neobychnoe povedenie majatnika pri sinusoidal'nom vneshnem vozdejstvii. Chast' 2. // Komp'juternye instrumenty v obrazovanii. 2008. № 2. S. 24–36.
4. Gritchenko V. T., Macipura V. T., Snarskij A. A. Vvedenie v nelinejnuju dinamiku: Haos i fraktaly. M.: Izd-vo LKI, 2007.
5. Klumova I. N. Igra «Zhizn'» // Kvant. 1974. № 9. S. 26–30.
6. Kozlov V. V., Trewev D. V. Billiardy. Geneticheskoe vvedenie v dinamiku sistem s udarami. M., 1991.
7. Kondrat'ev A. S., Ljaptsev A. V. Fizika. Zadachi na komp'jutere. M.: Fizmatlit, 2006.
8. Ljaptsev A. V. «Kvantovanie» v zadachah nelinejnoj dinamiki. Chslennyj eksperiment i interpretatsa // Izvestija RGPU im. A. I. Gertsena. № 147. 20. S. 161–175.
9. Ljaptsev A. V. Strannyj attraktor v prostejshej mehanicheskoj sisteme // Komp'juternye instrumenty v obrazovanii. 2010. № 6. S. 57–66.
10. Popov S. E. Metodicheskaja sistema podgotovki uchitelja v oblasti vychislitel'noj fiziki: Monografija. Nizhnij Tagil: NTGSPA, 2005.
11. Haken G. Sinergetika. M.: Mir, 1980.

**О. Н. Камшилова**

### LC-ТЕХНОЛОГИИ В ИССЛЕДОВАНИИ ОСВОЕНИЯ ЯЗЫКА

*Обобщается опыт использования учебных корпусов текстов (LC) в исследовании освоения чужого языка и оцениваются новые перспективы применения LC-технологий. Анализируется результат корпусного анализа грамматических структур в речи русских школьников, изучающих английский язык.*

**Ключевые слова:** учебный корпус, LC-технологии, интерференция, интеръязык, перепроизводство грамматических структур.

**О. Kamshilova**

### LC-Technologies in Language Acquisition Studies

*The paper reviews the use of Learner Corpora in foreign language acquisition studies and new prospects for LC technologies. It also focuses on a corpus analysis of some grammatical structures in Russian EFL schoolchildren speech.*

**Keywords:** learner corpus, LC technologies, interference, interlanguage, structure overuse.

Учебные корпусы текстов (Learner Corpora, далее LC) изначально создавались с целью мониторинга и анализа ошибок, допускаемых при овладении инофонами чужим языком. Корпусные технологии позволили обнаружить наиболее распространенные ошибки в словоупотреблении и словообразовании, характер которых заставил пересмотреть содержание многих обучающих материалов, поскольку выявленные отклонения от нормы свидетельствовали о влиянии интерференции родных языков инофонов и так называемой «промежуточной грамматики», или интеръязыка, от чего не предупреждает ни один традиционный учебник или учебный словарь. Таким образом, известная поговорка «на ошибках