Н. С. Майкова

ПРОВОЦИРУЮЩИЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ ОШИБОК УЧАЩИХСЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Работа представлена кафедрой методики обучения математике.
Научный руководитель – кандидат педагогических наук, доцент В. П. Радченко

Статья посвящена одной из довольно сложных методических задач, которые приходится решать учителю, – отыскание способов и приемов предупреждения ошибок учащихся. В работе рассматриваются провоцирующие задачи как средство предупреждения ошибок учащихся в обучении математике.

The article dwells upon one of the most complicated methodic tasks to be solved by the teacher – looking for the ways and techniques for students' errors prevention. Provocative tasks are considered as a tool for students' errors prevention in mathematics training

Причины возникновения ошибок у учащихся в процессе обучения могут быть разнообразны, так как они связаны с психологическими, педагогическими и методическими особенностями самого процесса обучения.

Цели и задачи образования в развитом обществе состоят в единстве обучения и воспитания школьников, в развитии умения самостоятельно ориентироваться в знаниях и применять их на практике, которое достигается учеником в процессе учебной деятельности.

Понятие учебной деятельности, разрабатываемое В. В. Давыдовым, направлено на достижение этих целей. «Прежде всего речь идет именно о деятельности ученика, усваивающего такие знания, которые обеспечивают ему умственное развитие. Далее – о таких методах работы учителя с учеником, при которых они овладевают своеобразными умениями осуществлять эту учебную деятельность»[1].

Причины возникновения ошибок в процессе обучения могут быть связаны не только с учебной деятельностью ученика, но и с работой учителя с учеником. Это связано с тем, что учебная деятельность ученика осуществляется во взаимодействии с учителем, при этом организатором и руководителем этой деятельности является учитель. Именно он ставит цели и задачи предстоящей деятельности, дает учащимся для этой деятельности всю необходимую информацию, задания для конкретных действий.

В работах таких авторов, как М. И. Зайкин, И. С. Григорьева, И. Я. Субботин было высказано предположение о том, что одним из средств предупреждения ошибок учащихся при освоении системы знаний в процессе обучения математике могут стать провоцирующие задачи.

П. А. Шеварев отмечал, что «идеалом является такая методика обучения, при которой все учащиеся любое предложенное им задание всегда выполняют верно. Разумеется, здесь надо иметь ввиду лишь задания, соответствующие программе, и лишь задания, соответствующие тому, что учащиеся к данному моменту уже изучили»[2].

Методика обучения любому школьному предмету, конечно, опирается на знание причин и условий верного и ошибочного выполнения заданий.

Анализ литературы показал, что ряд авторов так или иначе обращались к проблеме использования провоцирующих задач на уроках математики.

Необходимость использования провоцирующих задач на уроках математики авторы Груденов Я. И., Середеа А. М.: Середа В. И. объясняют тем, что для «формирования прочных умений и навыков учащиеся должны решить достаточное число задач одного и того же типа по изучаемой теме. Однако в психологии установлено, что выполнение однотипных заданий приводит к ряду негативных явлений: учащиеся начинают решать задачи по аналогии с предыдущими, не вдумываясь в условие, опуская отдельные существенные рассуждения. Из-за этого в решениях появляются ошибки»[3].

Дать определение провоцирующей задачи можно исходя из названия данного вида задач. Можно сказать, что провоцирующая задача – это задача, в условии которой есть провокация.

Под провокацией в условии задачи будем понимать побуждение к ошибочным действиям при решении задачи. Следовательно, разновидности провоцирующих задач зависят от видов провокации.

Условно можно выделить следующие виды провокации: ошибка в рассуждении, ошибки и пробелы в доказательстве, действие по аналогии, противоречие в условии, стереотип действий, интерпретация ответа задачи, неоднозначное решение, выбор ответа по предложенному чертежу.

Учитывая выделенные нами виды провокации, рассмотрим разновидности соответствующих провоцирующих задач, примеры и методику работы с ними.

1. Задачи с ошибкой в рассуждении. Задачи данного вида провоцируют такие ошибки учащихся, как неправильности речи. «Интенсивному искоренению неправильностей, встречающихся в речи учащихся, способствует привлечение самих учащихся к корректированию ответов. Следует отчетливо донести до сознания учащихся, что неправильности речи не только затрудняют изучение математики, но и являются одним из источников различных заблуждений»[4].

Именно такие заблуждения учитель предлагает учащимся в виде провоцирующей задачи, которая начинается со слов «Верно ли, что…?» и содержит рассуждение с ошибкой.

Задача. Верно ли, что диаметр окружности – это линия, соединяющая две точки окружности?

Ученик. Да.

Учитель. Чертит хорду.

Ученик. Диаметр – это линия, которая соединяет две точки окружности и проходит через центр.

Учитель. Проводит извилистую линию, соединяющую две точки окружности и проходящую через центр.

Ученик. Диаметр – это отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через ее центр.

Рассмотренный выше вид провоцирующих задач можно использовать также для предупреждения ошибок построения. В качестве таких задач можно использовать геометрические софизмы. «Можно возразить, что здесь нет провокации, так как ошибку делает не сам ученик. Однако ее (провокацию) можно ввести, если на каждом этапе рассуждения спрашивать, верное ли оно. Обычно ученики отвечают «Да», не замечая подвоха, и тем самым принимают чужую ошибку на себя»[5].

Следовательно, провокация в задачах данного вида появляется в ошибках и пробелах при анализе доказательств софизмов или рассуждений, содержащих ошибку.

2. Задачи, побуждающие к применению неверных аналогий. Задачи данного вида провоцируют ошибку, которая «возникает за счет неоправданного распространения учащимися предшествующего опыта на новый объект при применении неверных аналогий»[6].

Ошибки в аналогиях можно предупреждать с помощью провоцирующих блоков задач. Рассмотрим пример.

Тренировка в применении формулы $S = 0{,}5ab\sin C$ часто сопровождается ошибками, связанными с неверным определением положения угла C по отношению к сторонам a и b треугольника.

Блок задач. 1. Вычислите площадь треугольника, у которого
$AB = 6\ см,\ BC = 4\ см,\ \angle ABC = 30^0$.
2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна $12\ см$, а угол при вершине 60^0. Найдите площадь треугольника.
3. В треугольнике ABC
$AB = BC = 8\ см,\ \angle BAC = 30^0$. Вычислите площадь треугольника.

Замечание. Первые две задачи требуют непосредственного применения формулы, а третья по формуле сразу не решается.

3. Задачи, содержащие противоречие в условии. С помощью задач этого вида можно предупредить ошибки учащихся, связанные с работой над математическими объектами, которые не существуют при заданных условиях. Если учащиеся решают задачу, работая с несуществующим объектом, то происходит выход за границы применимости теоремы, свойства и т. д. Эти ошибки возникают по той причине, что большинство учебных задач содержит информацию непротиворечивую и приводящую к единственному решению.

Задача. Периметр треугольника равен 6, его стороны относятся как 1:2:3. Чему равна его средняя по величине сторона?

Замечание. Задача провоцирует учащихся на то, чтобы дать ответ: 2. При этом не выполняется неравенство треугольника.

Ответ. Задача не имеет решения.

4. Задачи на выбор ответа по предложенному чертежу. Если в задаче предлагается выбрать ответ, глядя на рисунок, то возможны зрительные ошибки. Провокация в такой задаче может заключаться в том, что если ученик не понимает определение или теорему, то чертеж может подтолкнуть его к выбору неправильного решения.

Задача. В вашем распоряжении есть только данные, приведенные на рис. 1, и известно, что радиус окружности ра-

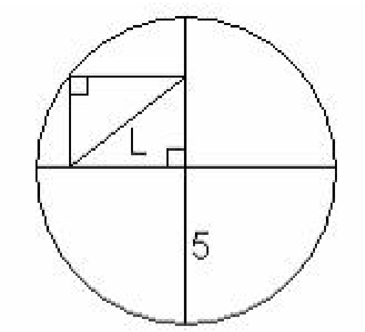

Рис. 1.

вен 5 см. Сможете ли вы определить длину отрезка L?[7]

Замечание. Одна из причин сложности этой задачи – ее данное графическое представление, когда отрезок L оказывается гипотенузой двух прямоугольных треугольников. Ответ. Длина отрезка L равна 5 см.

5. Задачи на стереотип действий (тестовые задачи). В тестовых заданиях, с которыми сталкиваются учащиеся на разных предметах, чаще всего используются задания закрытого типа. Эта форма заданий наиболее известна и чаще всего употребляется в практике тестирования. В таких заданиях дается несколько ответов, из которых хотя бы один правильный.

В результате, получая тестовое задание, учащиеся интуитивно выбирают один правильный ответ и не рассматривают все возможные варианты предложенных ответов. Таким образом, у учащихся складывается стереотип действий при решении тестовых заданий и появляются ошибки, допущенные интуицией.

Тестовое задание будет провоцирующим, если среди предложенных вариантов ответа будет не один правильный или не будет правильных совсем. Учащимся необходимо в таком случае не выбирать правильный ответ, а анализировать каждый из предложенных вариантов, поэтому обязательное условие при решении провоцирующих задач данного типа – это пояснения к каждому из вариантов, если он не подходит в качестве правильного ответа.

В задачах данного вида используется «ложная, отвлекающая альтернатива среди перечня возможных вариантов на вопрос тестового задания – дистрактор. Дистракторы могут нести некоторую обучающую нагрузку и… являться «ключом» к ответу на задание»[8].

Рассмотрим задачу, предназначенную для контроля знаний теоремы косинусов. Но приведенный в ней набор дистракторов позволяет выбрать верный ответ, не применяя теорему.

Задача. Если длины двух сторон треугольника равны 10 см и 15 см, то длина третьей стороны, лежащей против угла 120^0, равна: 1) 15 см, 2) 25 см, 3) $5\sqrt{19}$ см, 4) $25\sqrt{2}$ см, 5) $5\sqrt{7}$ см. Замечание. Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны, что исключает ответы 2) и 4).

Сторона не может быть равна 15 см, так как в этом случае получаем равнобедренный треугольник с углом в основании 120^0 (исключаем первый ответ). Остается выбрать между ответами 3) и 5). Так как $5\sqrt{7} < 5\sqrt{19}$ и против большего угла (120^0) в треугольнике лежит большая сторона, то правильный ответ $5\sqrt{19}$ см. Ответ. 3)

6. Задачи, требующие интерпретации ответа. «Чтобы заострить проблему интерпретации ответа задачи, учитель должен предлагать такие задачи, в которых получаются посторонние, на первый взгляд, ответы, но их появление нужно объяснять»[9].

Рассмотрим примеры задач, в которых появляется провокация при интерпретации ответа, но учащиеся могут также отбросить посторонний, на первый взгляд, отрицательный корень и допустить ошибку по интуиции.

Задача. Дана окружность радиуса 13 см. Точка M – середина радиуса OK. Хорда AC перпендикулярна радиусу OK.

Известно, что $AB = BK = 4$ *см*. Найдите расстояние ВМ (см. рис. 2). Решение.

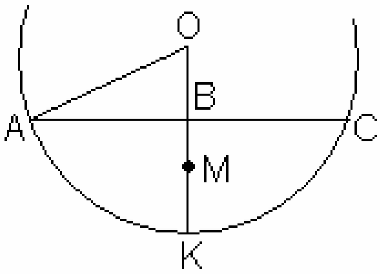

Рис. 2.

Пусть $BM = x$, тогда $OB = 6{,}5 - x$ и $AB = \sqrt{169 - (6{,}5 - x)^2}$, $BK = 6{,}5 + x$. Получим уравнение

$$\sqrt{169 - (6{,}5 - x)^2} = 10{,}5 + x,$$

которое приводится к уравнению

$2x^2 + 8x - 16{,}5 = 0$, корни которого $x_1 = 1{,}5$ и $x_2 = -5{,}5$.

Замечание. Отрицательный корень интерпретируем следующим образом: точка В находится между точками М и К, т. е. отрезок МВ откладывается в противоположном от выбранного нами первоначально, направлении.

Ответ. $BM = 1{,}5\,см$ или $BM = 5{,}5\,см$.

7. Задачи, содержащие неоднозначное решение. Провоцирующие задачи данного вида можно использовать для предупреждения ошибок, связанных с использованием допущений, которые не оговорены условием.

Такие ошибки возникают, когда в геометрической задаче мало данных для однозначного установления взаимного расположения фигур. Следовательно, задача содержит неоднозначное решение, т. к. возможны несколько случаев расположения, а ученики работают только с одним. Для предупреждения таких ошибок необходимо решать задачи, условие которых «навязывает» учащимся одно решение, а на самом деле их несколько.

Задача. В окружность радиуса 8 см вписан равнобедренный треугольник АВС. Радиус ОА образует с основанием АВ треугольника АВС угол в 30^0. Найдите боковую сторону треугольника[10] (см. рис. 3).

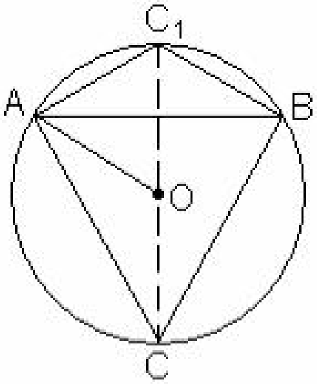

Рис. 3.

Замечание. Известные элементы (радиус окружности и угол, образуемый радиусом ОА с основанием АВ вписанного равнобедренного треугольника), заданные в условии этой задачи, определяют две сложные фигуры: а) окружность центра О радиуса 8 см и вписанный в эту окружность остроугольный равнобедренный треугольник АВС; б) та же окружность и вписанный в нее тупоугольный равнобедренный треугольник $АВС_1$.

Приведенные выше разновидности провоцирующих задач не исчерпывают всего их многообразия, но дают представление о способах составления таких задач и путях их использования в обучении математике.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Формирование учебной деятельности школьников / Под ред. В. В. Давыдова. М.: Педагогика, 1982. С. 10.

[2] *Шеварев П. А*. Обобщенные ассоциации в учебной работе школьника. – М.: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1959. С. 141.

[3] *Груденов Я. И., Середеа А. М.: Середа В. И*. Психология подсказывает методике // Математика в школе. 1990. № 6. С. 33.

[4] *Брадис В. М*. Ошибки в математических рассуждениях. М.: Учпедгиз. 1959. С. 14.

[5] *Григорьева И. С*. Отклики на статьи прошлого учебного года // Математика в школе. № 6. 1996. С. 72.

[6] *Субботин И. Я., Якир М. С*. Обучающая функция ошибки // Математика в школе. № 2–3. 1992. С. 27.

[7] *Халперн Д*. Психология критического мышления. СПб.: Питер. 2000. С. 408.

[8] *Солонин Е. В*. Дистракторы – ключ к решению тестового задания. //Математика в школе. № 8. 2005. С. 59.

[9] *Цукарь А. Я*. О полезности интерпретации решения задачи // Математика в школе. № 7. 2000. С. 35.

[10] *Фридман Л. М*. О требованиях к решению геометрических задач на вычисление // Математика в школе. № 4. 1955. С. 8.