Ю. И. Фёдоров

ПОТЕНЦИАЛЫ СОПРЯЖЁННЫХ ПАР ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ

Автором вводится понятие потенциала сопряжённой пары для гиперболических уравнений второго порядка и связанное с ним понятие двойственного уравнения. Рассмотрены применения потенциалов для нахождения интегральных представлений решений гиперболических уравнений и продолжения решений по параметрам. Обсуждается прикладное значение потенциалов.

Ключевые слова: потенциалы сопряжённых пар гиперболических уравнений второго порядка.

Yu. Fedorov

POTENTIALS OF CONJUGATE PAIRS OF HYPERBOLIC EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

The article introduces the concept of a potential conjugate pair for second order hyperbolic equations and an associated with it concept of dual equation. The applications of the potential for integral representations of solutions of hyperbolic equations and the parameter continuation are regarded, and the potential practical value is discussed.

Keywords: potentials conjugate pairs of second order hyperbolic equations.

В односвязной области D плоскости XOY рассматривается линейное гиперболическое дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с двумя переменными

$$L(u) \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0 \tag{1}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$a(x,y), b(x,y), c(x,y), a_x(x,y), b_y(x,y) \in C(D). \tag{2}$$

Условия гладкости решения $u\,(x, y)$: $u(x,y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$.

Введём основное понятие рассматриваемого метода, то есть понятие потенциала сопряжённой пары гиперболического уравнения, и рассмотрим построение потенциалов. Пусть $L^*(u)$ — дифференциальный оператор, действующий на функцию $v(x,y)$, формально сопряжённый с оператором $L(u)$ [3]:

$$L^*(v) = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv.$$

Если выполняются условия (2), то $\forall u(x,y), v(x,y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$ справедливо тождество Грина:

$$2(vL(u) - uL^*(v)) = (vu_y - uv_y + 2auv)_x - (uv_x - vu_x - 2buv)_y. \tag{3}$$

Из этого тождества следует, что если $L(u)=0,\ L^*(v)=0$ в области *D*, то

$$(uv_x - vu_x - 2buv)_y = (vu_y - uv_y + 2auv)_x \text{, то есть } P_y(x,y) = Q_x(x,y)\,, \tag{4}$$

где $P(x,y) = uv_x - vu_x - 2buv;\quad Q(x,y) = vu_y - uv_y + 2auv$.

Для выражения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ выполнены условия известного признака полного дифференциала в односвязной области *D* [2]. Поэтому выражение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (uv_x - vu_x - 2buv)dx + (vu_y - uv_y + 2auv)dy$$

является полным дифференциалом в области *D*, то есть существует функция *Z* (*x*, *y*), определённая в области *D* такая, что

$$dZ = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \equiv (uv_x - vu_x - 2buv)dx + (vu_y - uv_y + 2auv)dy\,.$$

В векторном анализе условие $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ означает, что векторное поле $\vec{F}(x,y) = (P(x,y); Q(x,y))$ — безвихревое в *D* [2]. При этом функцию *U*(*x*, *y*), у которой $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -dU(x,y)$, называют скалярным потенциалом безвихревого векторного поля $\vec{F}$. Из этих соображений далее рассматривается *U*(*x*, *y*), а не *Z*(*x*, *y*):

$$dU(x,y) = -P\cdot dx - Q\cdot dy \equiv (vu_x - uv_x + 2buv)dx + (uv_y - vu_y - 2auv)dy\,. \tag{5}$$

Сравнивая форму первого дифференциала функции двух переменных

$$dU = U_x \cdot dx + U_y \cdot dy$$

и формулу (5), заключаем, что это дифференциальное равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} U_x = vu_x - uv_x + 2buv, \\ U_y = uv_y - vu_y - 2auv. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь *u*(*x*, *y*) и *v*(*x*, *y*) — любые решения из $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$ уравнений *L*(*u*) = 0 и $L^*(v) = 0$ соответственно.

Если $M_0(x_0, y_0)$ — фиксированная начальная точка линии интегрирования, *M*(*x*, *y*) — точка области *D*, $M_0M \subset D$, то *U*(*x*, *y*) восстанавливается по своему полному дифференциалу с точностью до вещественного постоянного слагаемого $U_0 = U(x_0, y_0)$ по формуле

$$U(x,y)=U_0+\int_{M_0}^{M}(vu_s-uv_s+2buv)ds+(uv_t-vu_t-2auv)dt\,, \tag{7}$$

где s, t — переменные интегрирования, криволинейный интеграл не зависит от формы дуги M_0M [2]. Рассматриваемые дуги кусочно-гладкие.

Функцию $U(x, y)$ будем называть потенциалом сопряжённой пары $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в области D, так как векторное поле

$$\vec{F}(x,y)=\left(P(x,y);Q(x,y)\right)\equiv(uv_x-vu_x-2buv;\; vu_y-uv_y+2auv)\,,$$

потенциалом которого является $U(x, y)$, формируется с помощью решений $u(x, y)$ исходного и $v(x, y)$ сопряжённого уравнений [5].

Отметим, что в книге [2] в сходной ситуации, но для обыкновенных дифференциальных операторов $L(u)=a_0(x)\dfrac{d^2u}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{du}{dx}+a_2(x)u$ и $L^*(u)=\dfrac{d^2}{dx^2}\left[a_0(x)v\right]-\dfrac{d}{dx}\left[a_1(x)v\right]+a_2(x)v$ в тождестве $vL(u)-uL^*(v)=P'(x)$, где $P(x)=a_0(vu'-uv')+(a_1-a_0{}')uv$, функция $P(x)$ называется конъюнкцией $u(xy)$ и $v(x)$ относительно оператора L.

Вопрос о разрешимости уравнения (1) сводится к вопросу о разрешимости системы уравнений первого порядка (6). Рассмотренная схема построения потенциала $U(x, y)$ применима не только для классических линейных гиперболических уравнений, но и для уравнений, вырождающихся на границе области, и для уравнений, коэффициенты которых имеют особенности на этой границе, для уравнений другого типа и вообще для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Представление (6) потенциала позволяет записать уравнение (1) в дивергентной форме:

$$(vu_x-uv_x+2buv)_y-(uv_y-vu_y-2auv)_x=0\,.$$

Теперь определим понятие двойственного уравнения, связанное с понятием потенциала сопряжённой пары. Для этого выведем уравнение, которому удовлетворяет потенциал $U(x, y)$. С этой целью исключим функцию $u(x, y)$ из системы уравнений (6). Это можно сделать, например, с помощью следующих элементарных преобразований системы (6):

$$\begin{cases} U_x=vu_x-(v_x-2bv)u \\ U_y=-vu_y+(v_y-2av)u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{U_x}{v}=u_x-\left(\dfrac{v_x}{v}-2b\right)\cdot u, \\ \dfrac{U_y}{v}=-u_y+\left(\dfrac{v_y}{v}-2a\right)\cdot u. \end{cases} \tag{8}$$

Полагая $\frac{v_x}{v}-2b, \frac{v_y}{v}-2a \in C^1(D)$, первое уравнение системы (8) продифференцируем по y, а второе — по x:

$$\begin{cases} \left(\frac{U_x}{v}\right)_y = u_{xy} - \left(\frac{v_x}{v}-2b\right)\cdot u_y - \left(\frac{v_x}{v}-2b\right)_y \cdot u \\ \left(\frac{U_y}{v}\right)_x = -u_{yx} + \left(\frac{v_y}{v}-2a\right)\cdot u_x + \left(\frac{v_y}{v}-2a\right)_x \cdot u. \end{cases} \tag{9}$$

Затем выразим из системы уравнений (8) производные u_x и u_y и подставим их выражения в систему (9):

$$\begin{cases} \left(\frac{U_x}{v}\right)_y = u_{xy} - \left(\frac{v_x}{v}-2b\right)\cdot\left(-\frac{U_y}{v}+\left(\frac{v_y}{v}-2a\right)\cdot u\right) - \left(\frac{v_x}{v}-2b\right)_y \cdot u, \\ \left(\frac{U_y}{v}\right)_x = -u_{yx} + \left(\frac{v_y}{v}-2a\right)\cdot\left(\frac{U_x}{v}+\left(\frac{v_x}{v}-2b\right)\cdot u\right) + \left(\frac{v_y}{v}-2a\right)_x \cdot u. \end{cases}$$

Выполним элементарные преобразования и умножим обе части каждого уравнения на $v(x, y)$:

$$\begin{cases} U_{xy} - \frac{v_y}{v}U_x - \left(\frac{v_x}{v}-2b\right)\cdot U_y = vu_{xy} - \left(\frac{v_x}{v}-2b\right)\left(\frac{v_y}{v}-2a\right)uv - \left(\frac{v_x}{v}\right)_y \cdot uv + 2b_y \cdot vu, \\ U_{yx} - \frac{v_x}{v}U_y - \left(\frac{v_y}{v}-2a\right)\cdot U_x = -vu_{yx} + \left(\frac{v_x}{v}-2b\right)\left(\frac{v_y}{v}-2a\right)uv + \left(\frac{v_y}{v}\right)_x \cdot uv - 2a_x \cdot vu. \end{cases}$$

Сложив почленно уравнения этой системы, получим следующее уравнение:

$$U_{xy} - \left(\frac{v_y}{v}-a\right)\cdot U_x - \left(\frac{v_x}{v}-b\right)\cdot U_y = \left(b_y - a_x\right)\cdot v \cdot u\,. \tag{10}$$

Уравнение, которому удовлетворяет потенциал $U(x, y)$, в данном случае (10), будем называть двойственным уравнению (1), а решения двойственного уравнения — двойственными решениями к $u(x, y)$. Таким образом, потенциал $U(x, y)$ — двойственное решение к $u(x, y)$.

Если в области D выполняется условие $a_x = b_y$, то двойственное уравнение становится линейным гиперболическим уравнением. Таким образом, справедлива теорема 1.

Теорема 1. Если выполняются условия (2), $a_x = b_y$, $\frac{v_x}{v} - 2b, \frac{v_y}{v} - 2a \in C^1(D)$, то каковы бы ни были решения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ исходного и сопряжённого уравнений класса $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$, соответствующий потенциал $U(x, y)$, определяемый системой уравнений (6) и построенный на сопряжённой паре $u(x, y)$, $v(x, y)$, является решением двойственного линейного гиперболического уравнения

$$U_{xy} + \left(a - \frac{v_y}{v}\right) \cdot U_x + \left(b - \frac{v_x}{v}\right) \cdot U_y = 0 . \tag{11}$$

Потенциал $U(x, y)$, как двойственное решение, имеет интегральное представление (7).

Вопрос о виде двойственного уравнения, если условие $a_x = b_y$ в области D не выполняется, обсуждается в других работах автора.

Так как коэффициенты двойственного уравнения зависят от $v(x, y)$, то двойственное уравнение — это не одно уравнение, а класс уравнений. Выбирая различные $v(x, y)$, будем получать различные уравнения этого класса и различные двойственные решения, то есть различные потенциалы. Объединяет эти уравнения то, что потенциал $U(x, y)$ является их решением и имеет интегральное представление (7). Эта точка зрения позволяет рассматривать некоторые уравнения как двойственные к другим, исходным, более изученным (модельным, базовым) и найти двойственное решение (общее решение или решение начальной, краевой задачи) в виде потенциала $U(x, y)$ с помощью интегрального представления (7), если известны $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Таким образом, предлагаемая теория потенциалов предоставляет ещё один метод интегрирования уравнений.

Простейшей реализацией метода интегрирования с помощью потенциалов сопряжённых пар является продолжение решений гиперболических уравнений по параметрам. В качестве примера рассмотрим уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу (Э-П-Д) с равными параметрами:

$$E(A, A; u) \equiv u_{xy} + \frac{A}{y-x} u_x - \frac{A}{y-x} u_y = 0 \tag{12}$$

в области $G = \{(x, y) \in R^2 : y > x\}$, где A — действительный параметр [3]. Зная решение уравнения Э-П-Д с положительными параметрами, построим его продолжение для отрицательных параметров.

Хотя уравнение Э-П-Д исследовано достаточно подробно и найдено общее решение при различных значениях параметров A, B [4], нам важно показать возможность построения продолжения решений уравнения (12) с помощью нового метода потенциалов сопряжённых пар. При $0 < A < \frac{1}{2}$ решения уравнения (12) хорошо известны [3]; решения этого уравнения будем обозначать $u(A, A, x, y)$. Функция $v(x, y) = (y - x)^{24}$ будет одним из решений сопряжённого уравнения

$$E^*(v) \equiv v_{xy} - \left(\frac{A}{y-x} v\right)_x + \left(\frac{A}{y-x} v\right)_y = 0 .$$

Полагая в (1) $a(x,y)=\dfrac{A}{y-x}$, $b(x,y)=-\dfrac{B}{y-x}$, $c(x, y) = 0$, убеждаемся, что условия теоремы 1 выполняются (в том числе и условие $a_x = b_y$), находим коэффициенты двойственного уравнения вида (11):

$$a-\frac{v_y}{v}=\frac{A}{y-x}-\frac{\left((y-x)^{2A}\right)_y}{(y-x)^{2A}}=\frac{-A}{y-x},\ b-\frac{v_x}{v}=-\frac{A}{y-x}-\frac{\left((y-x)^{2A}\right)_x}{(y-x)^{2A}}=\frac{A}{y-x}$$

и записываем двойственное уравнение:

$$E(-A,-A;U)\equiv U_{xy}+\frac{(-A)}{y-x}U_x-\frac{(-A)}{y-x}U_y=0. \tag{13}$$

Двойственное уравнение (13), так же как и исходное (12), является уравнением Э-П-Д с равными, но отрицательными параметрами, и потенциал $U(x, y)$ является решением двойственного уравнения.

Система уравнений (6) и формула (7), определяющие потенциал $U(x, y)$ сопряжённой пары $u(A, A, x, y)$, $v(x, y) = (y - x)^{24}$, в данном примере принимают вид

$$\begin{cases} U_x=(y-x)^{2A}u_x\,, \\ U_y=-(y-x)^{2A}u_y\,, \end{cases} \tag{14}$$

$$U(x,y)=U(0,0)+\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}(t-s)^{2A}u_s ds-(t-s)^{2A}u_t dt. \tag{15}$$

Итак, двойственное уравнение (13) является уравнением Э-П-Д с равными отрицательными параметрами. Потенциал $U(x, y)$, вычисленный по формуле (15) и являющийся решением двойственного уравнения, будет продолжением решения уравнения Э-П-Д для отрицательных параметров $-\dfrac{1}{2}<A<0$. Преобразование (14), (15), в результате которого получается потенциал $U(x, y)$, меняет знак каждого параметра уравнения Э-П-Д на противоположный: $U(x, y) = u(-A, -A, x, y)$.

До сих пор мы рассматривали гиперболическое уравнение (1), записанное в первом каноническом виде [3]. Пусть теперь в односвязной области D плоскости XOY дано гиперболическое уравнение во втором каноническом виде

$$L_1(u)\equiv u_{xx}-u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0,$$

$$c(x,y)\in C(D),\ \ a(x,y),\ \ b(x,y)\in C^1(\bar{D}).$$

Сопряжённое уравнение имеет вид

$$L_1^*(v)\equiv v_{xx}-v_{yy}-(av)_x-(bv)_y+cv=0.$$

Как и для уравнения (1), $\forall u(x,y), v(x,y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$ верно тождество Грина [6]

$$vL_1(u) - uL^*_1(v) = (vu_x - uv_x + auv)_x - (vu_y - uv_y - buv)_y .$$

Если теперь $L_1(u) = 0$, $L^*_1(v) = 0$, то $(vu_x - uv_x + auv)_x = (vu_y - uv_y - buv)_y$. Поэтому выражение $(vu_y - uv_y - buv)dx + (vu_x - uv_x + auv)dy$ является полным дифференциалом в области *D*. Функция *U*(*x*, *y*), определённая в области *D* таким образом, что $dU = -(vu_y - uv_y - buv)dx - (vu_x - uv_x + auv)dy$, также названа нами потенциалом сопряжённой пары *u*(*x*, *y*) и *v*(*x*, *y*). Потенциал *U*(*x*, *y*) определяется системой уравнений

$$\begin{cases} U_x = uv_y - vu_y + buv, \\ U_y = uv_x - vu_x - auv \end{cases}$$

или криволинейным интегралом, не зависящим от формы дуги интегрирования

$$U(x,y) = U(x_0, y_0) + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (uv_t - vu_t + buv)ds + (uv_s - vu_s - auv)dt .$$

Если $a_y + b_x = 0$ в области *D*, то такой потенциал *U*(*x*, *y*) является решением двойственного уравнения

$$U_{xx} - U_{yy} + \left(a - 2\frac{v_x}{v}\right)U_x + \left(b + 2\frac{v_y}{v}\right)U_y = 0 .$$

Потенциалы сопряжённых пар имеют важное прикладное значение в математических моделях, которые описываются задачами для линейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя переменными [7]. В качестве простого примера рассмотрим математическую модель процесса распространения плоских звуковых волн (малых возмущений) вдоль оси x в покоящейся среде [1]. Обозначим через *y* время, *u*(*x*, *y*) — скорость возмущённой среды, *p*(*x*, *y*) — давление в этой среде. Постоянные *r* и *c* характеризуют свойства покоящейся среды: *r* — плотность, *c* — скорость звука.

В рамках этой модели задача нахождения функции *u*(*x*, *y*) сводится к решению одномерного волнового уравнения [2]

$$L_0(u) \equiv c^2 \cdot u_{xx} - u_{yy} = 0 . \qquad (16)$$

Сопряжённое уравнение имеет вид

$$L^*_0(v) \equiv c^2 \cdot v_{xx} - v_{yy} = 0 . \qquad (17)$$

Волновой оператор $L_0(u)$ в (16) является самосопряжённым: $L_0^*(v) = L_0(v)$.

Выберем в области D решение сопряжённого уравнения (17) $v(x, y) \equiv r$, где r — постоянная: плотность покоящейся среды. В соответствии с рассматриваемым методом потенциалов сопряжённых пар составим тождество Грина (полагая $v(x, y) \equiv r$)

$$v \cdot L_0(u) - u \cdot L_0^*(v) = \left(c^2 \cdot r \cdot u_x\right)_x - \left(r \cdot u_y\right)_y .$$

Если $L_0(u) = 0$, $L_0^*(v) = 0$, то $(c^2 \cdot r \cdot u_x)_x = (r \cdot u_y)_y$. Поэтому выражение $(r \cdot u_y)dx + (c^2 \cdot r \cdot u_x)dy$ является полным дифференциалом в области D. Потенциал $U(x, y)$ сопряжённой пары $u(x, y)$ и $v(x, y) \equiv r$ в области D здесь определяется полным дифференциалом $dU = -(r \cdot u_y)dx - (c^2 \cdot r \cdot u_x)dy$ и является скалярным потенциалом векторного поля

$$\vec{F}(x, y) = (r \cdot u_y;\ c^2 \cdot r \cdot u_x) .$$

Потенциал $U(x, y)$ можно определить либо системой уравнений

$$\begin{cases} U_x = -r \cdot u_y, \\ U_y = -r \cdot c^2 \cdot u_x , \end{cases} \tag{18}$$

либо криволинейным интегралом, не зависящим от формы дуги интегрирования.

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} r \cdot u_t \cdot ds + c^2 \cdot r \cdot u_s \cdot dt .$$

Система уравнений (18), которой мы определили потенциал сопряжённых пар $U(x, y)$, описывает распространение плоских звуковых волн (малых возмущений) в покоящейся среде и называется системой уравнений акустики [1]. В литературе по математической физике её принято записывать в виде

$$\begin{cases} u_y + \dfrac{1}{r} \cdot U_x = 0, \\ U_y + r \cdot c^2 \cdot u_x = 0 , \end{cases}$$

причем потенциал $U(x, y)$ в этой системе выполняет роль давления $p(x, y)$ в этой среде.

Первое уравнение системы (18) продифференцируем по x, а второе — по y:

$$\begin{cases} U_{xx} = -r \cdot u_{yx}, \\ U_{yy} = -r \cdot c^2 \cdot u_{xy} . \end{cases} \tag{19}$$

Из системы уравнений (19) исключим $u_{xy}(x, y)$ и получим уравнение, которому удовлетворяет потенциал $U(x, y)$:

$$\begin{cases} c^2 \cdot U_{xx} = -r \cdot c^2 \cdot u_{yx}, \\ U_{yy} = -r \cdot c^2 \cdot u_{xy}, \end{cases}$$

$$c^2 \cdot U_{xx} - U_{yy} = 0. \quad (20)$$

Потенциал $U(x, y)$ (давление $p(x, y)$) является решением двойственного уравнения (20). Двойственное уравнение совпадает с исходным уравнением (16), поэтому исходное уравнение (16) является самодвойственным.

Следовательно, в рассматриваемой математической модели, описываемой уравнениями акустики, потенциал сопряжённых пар $U(x, y)$ имеет важный прикладной смысл: потенциал $U(x, y)$ равен давлению $p(x, y)$ в среде.

Итак, введённые автором понятия потенциала сопряжённой пары и двойственного уравнения позволили обосновать новый метод нахождения интегральных представлений решений и продолжения решений по параметрам для гиперболических уравнений второго порядка. Рассмотрена математическая модель, описываемая уравнениями акустики, в которой раскрыт важный прикладной смысл потенциала сопряжённых пар.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: ГИФ-МЛ, 1979. 392 с.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 720 с.
3. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: ГИФ-МЛ, 1962. 767 с.
4. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 304 с.
5. О свойствах линейных дифференциальных операторов, связанных с полными дифференциалами / Ю. И. Фёдоров // Тез. докл. на 3-й Международной конференции, посвящённой 85-летию чл.-корр. РАН, профессора Л. Д. Кудрявцева. М.: МФТИ, 2008. С. 341–344.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
7. *Фёдоров Ю. И.* Математические аспекты динамики сорбции газов // Известия Оренбургского государственного аграрного университета. 2014. № 3 (47). С. 46–48.

REFERENCES

1. *Godunov S. K.* Uravnenija matematicheskoj fiziki. M.: GIF-ML, 1979. 392 s.
2. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike. M.: Nauka, 1973. 720 s.
3. *Koshljakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M.* Differentsial'nye uravnenija matematicheskoj fiziki. M.: GIF-ML, 1962. 767 s.
4. *Nahushev A. M.* Uravnenija matematicheskoj biologii. M.: Vysshaja shkola, 1995. 304 s.
5. O svojstvah linejnyh differentsial'nyh operatorov, svjazannyh s polnymi differentsialami / Fjodorov Ju. I. // Tez. dokl. na 3-j mezhdunarodnoj konferentsii, posvjashchjonnoj 85-letiju chl.-korr. RAN, professora L. D. Kudrjavtseva. M.: MFTI, 2008. S. 341–344.
6. *Tihonov A. N., Samarskij A. A.* Uravnenija matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1972. 736 s.
7. *Fjodorov Ju. I.* Matematicheskie aspekty dinamiki sorbtsii gazov // Izvestija Orenburgskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2014. № 3 (47). S. 46–48.