УДК 532.516:517.958

А. В. Коптев

КАК РАЗРЕШИТЬ 3D УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА

Автором предложен метод построения решений 3D уравнений Навье — Стокса для случая неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости. Благодаря реализации метода задача построения решений 3D уравнений Навье — Стокса сводится к решению совокупности более простых задач.

Ключевые слова: движение, вязкая жидкость, дифференциальное **у**равнение, частная производная, нелинейность, интеграл, совместность.

A. Koptev

HOW TO SOLVE 3D NAVIER — STOKES EQUATIONS

A method for constructing solution of Navier — Stokes equations for 3D unsteady viscous incompressible fluid flow has been suggested. Owing to the implementation of the suggested method, the solutions of the 3D Navie — Stokes equations have been reduced to the solution of a set of simpler problems.

Keywords: motion, viscous fluid, differential equation, partial derivative, nonlinearity, integral, compatibility.

1. Уравнения Навье — Стокса. Уравнения под таким названием представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые описывают движение жидких и газообразных сред при наличии вязкости.

Для случая движения вязкой несжимаемой жидкости при условии, что внешние силы имеют потенциал, безразмерный вариант 3D уравнений Навье — Стокса может быть представлен в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,. \tag{4}$$

Основными неизвестными в уравнениях (1)–(4) являются скорости u, v, w и давление p. Каждая из этих величин является функцией четырех независимых переменных — координат x, y, z и времени t.

Φ обозначает заданную функцию потенциала внешних сил. Re — число Рейнольдса, представляющее положительный параметр.

Отличительной особенностью рассматриваемых уравнений является наличие нелинейных членов. Они присутствуют в левых частях уравнений (1)–(3). Это обстоятельство значительно усложняет и исследование, и решение, так как методы, разработанные для линейных уравнений, в данном случае не применимы.

На сегодняшний день существует целый перечень вопросов, связанных с уравнениями (1)–(4), которые изучены недостаточно и требуют дополнительного исследования. Нет окончательного решения проблемы существования гладкого решения 3D уравнений [4–5]. Не ясна структура решений и отсутствуют общие подходы к построению решений. Последнее относится как к построению частных решений, так и к построению решений начальных и краевых задач. К изученным не до конца проблемам следует отнести и ламинарно-турбулентный переход, который предположительно должен возникать при больших значениях числа Re.

Справедливо сказать, что на сегодняшний день теоретическое исследование уравнений Навье — Стокса значительно отстает от потребностей практики.

Как подтверждение значимости теоретического исследования рассматриваемых уравнений можно привести следующий факт. Известный центр изучения математики — Математический институт Клэя, США (Clay Mathematical Institute, USA) в 2000 году определил проблему существования гладкого решения уравнений Навье — Стокса как одну из семи главных математических проблем третьего тысячелетия [6].

Все перечисленные проблемы, связанные с уравнениями Навье — Стокса, заведомо получат дополнительный импульс в исследовании, если будет разработан конструктивный метод решения. Это позволит строить конкретные решения, изучать их свойства и переходить к обобщениям. Разработка такого метода, применимого при общих предположениях, есть сложная и интересная задача. Данная работа представляет шаг на этом пути.

2. Первый интеграл и структура решений. При построении решения будем исходить не из уравнений (1)–(4) непосредственно, а из первого интеграла этих уравнений.

Первый интеграл уравнений Навье — Стокса для случая 3D неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости сводится к следующим девяти соотношениям [1–2]:

$$p=-\Phi-\frac{U^2}{2}-d-d_t=\alpha_4+\beta_4+\gamma_4\,, \tag{5}$$

$$u^2-v^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial z^2}-$$
$$-\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_3}{\partial y}+\frac{\partial(\Psi_5+\Psi_6)}{\partial z}\right]+3(\alpha_4-\beta_4)\,, \tag{6}$$

$$v^2-w^2+\frac{2}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y^2}+$$
$$+\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(\Psi_1+\Psi_2)}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_4}{\partial y}-\frac{\partial\Psi_6}{\partial z}\right]+3(\alpha_4-\beta_4)\,, \tag{7}$$

$$uv+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial y\partial z}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}-\frac{\partial(\Psi_9+\Psi_8)}{\partial z}\right]+\frac{1}{2}\left(-\alpha'_{1\,z}-\alpha'_{3\,t}+\beta'_{1\,z}-\beta'_{2\,t}\right), \tag{8}$$

$$uw+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial x\partial z}+\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial y^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial y\partial z}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial\Psi_5}{\partial x}+\frac{\partial(\Psi_9-\Psi_7)}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_5}{\partial z}\right]+\frac{1}{2}\left(-\alpha'_{1\,y}-\alpha'_{2\,t}+\gamma'_{1\,y}-\gamma'_{3\,t}\right), \tag{9}$$

$$vw+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial x^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial x\partial z}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(\Psi_8+\Psi_7)}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_6}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right]-\frac{1}{2}\left(\beta'_{1\,x}+\beta'_{3\,t}+\gamma'_{1\,x}+\gamma'_{2\,t}\right). \tag{10}$$

$$u=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_7}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial\Psi_5}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_8}{\partial y}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right)\right]+\frac{1}{2}\left(\alpha'_{2\,z}+\alpha'_{3\,y}+\delta'_{2\,z}+\delta'_{1\,y}\right), \tag{11}$$

$$v=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi_3}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}-\frac{\partial\Psi_7}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Psi_9}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_6}{\partial y}-\frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right)\right]+\frac{1}{2}\left(\beta'_{2\,x}+\beta'_{3\,z}-\delta'_{1\,x}+\delta'_{3\,z}\right), \tag{12}$$

$$w=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi_5}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_8}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\Psi_9}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_6}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right)\right]+\frac{1}{2}\left(\gamma'_{2\,y}+\gamma'_{3\,x}-\delta'_{2\,x}-\delta'_{3\,y}\right). \tag{13}$$

Здесь Ψ_j — новые ассоциированные неизвестные с номерами от единицы до пятнадцати включительно. В работах [1–2] для них введено название псевдофункции тока;

α_m, β_m, γ_m, δ_m — произвольные функции, каждая из которых зависит лишь от трех переменных из четырех возможных и не зависит от одной переменной, соответственно *x*, *y*, *z* или *t*.

Для этих функций выполнены равенства

$$\frac{\partial\alpha_m}{\partial x}=\frac{\partial\beta_m}{\partial y}=\frac{\partial\gamma_m}{\partial z}=\frac{\partial\delta_m}{\partial t}=0\,;$$

$\dfrac{U^2}{2}=\dfrac{u^2+v^2+w^2}{2}$ — безразмерный скоростной напор;
d, d_t — диссипативные члены, вычисляемые по формулам

$$d=-\frac{U^2}{6}+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial x\partial y}-\Delta_{xy}\Psi_{10}+\Delta_{xz}\Psi_{11}-\Delta_{yz}\Psi_{12}\right), \qquad (14)$$

$$d_t=\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_2-\Psi_1)+\frac{\partial}{\partial y}(\Psi_4-\Psi_3)+\frac{\partial}{\partial z}(\Psi_6-\Psi_5)\right). \qquad (15)$$

Символами Δ_{xy}, Δ_{yz}, Δ_{zx}, в формуле (14) обозначены неполные операторы Лапласа по координатам

$$\Delta_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \Delta_{yz}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\ \Delta_{zx}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

В работе [2] показано, что существует комбинация первых производных от уравнений (5)–(13), которая приводит к уравнениям Навье — Стокса (1)–(4). Рассмотренные в совокупности девять соотношений (5)–(13) представляют первый интеграл уравнений Навье — Стокса (1)–(4).

Эти девять соотношений выбираем в качестве исходных для построения решений уравнений Навье — Стокса. Чтобы получить окончательные решения основных уравнений, нужно сосредоточиться на исследовании и интегрировании системы (5)–(13).

Проведем предварительный анализ и отметим некоторые закономерности, характерные для выражений (5)–(13). Всего имеем девять уравнений, связывающих основные неизвестные u, v, w, р, ассоциированные неизвестные Ψ_j и произвольные функции трех переменных α_m, β_m, γ_m, δ_m. Среди этих уравнений особо выделяются четыре уравнения: (5), (11), (12), (13). Эти уравнения определяют выражения для u, v, w, p через другие величины и задают, таким образом, структурные формулы для основных неизвестных.

Так, из уравнения (5) следует, что при нулевых α_m, β_m, γ_m, δ_m неизвестное ρ должно быть представлено суммой четырех различных по своей природе слагаемых. Такими слагаемыми являются: потенциал внешних сил Ф, скоростной напор $\dfrac{U^2}{2}$, и два диссипативных слагаемых d и d_t.

Уравнения (11)–(13) определяют выражения для неизвестных u, v, w. Согласно этим выражениям каждое из неизвестных u, v, w есть некоторая линейная комбинация вторых производных ассоциированных неизвестных Ψ_j, где $j = 1, 2, \ldots, 9$. Для этих девяти неизвестных, определяющих скорости, логично ввести уточненное название — скоростные псевдофункции тока.

Таким образом, уравнения (5) и (11)–(13) задают структуру решений уравнений Навье — Стокса [3]. Тогда как оставшиеся пять нелинейных уравнений (6)–(10) позволяют уточнить отдельные слагаемые структурных формул. Для получения окончательного решения нужно разрешить уравнения (6)–(10).

3. Условия совместности. Рассмотрим нелинейные уравнения (6)–(10). Из этих уравнений можно исключить u, v, w, если воспользоваться (11)–(13). Такой путь был предложен в работе [2]. В результате будем иметь систему пяти нелинейных уравнений с пятнадцатью неизвестными Ψ_j, где $j = 1, 2, \ldots, 15$.

Однако более подробный анализ позволяет получающуюся систему значительно упростить и привести ее к соотношениям, более удобным для дальнейшей работы. Обратим внимание на следующую закономерность. В каждом из трех уравнений (8), (9), (10) неизвестные Ψ_{10}, Ψ_{11}, Ψ_{12} представлены лишь одним слагаемым в правой части. Есть возможность с помощью уравнений (8), (9), (10) указанные неизвестные исключить.

Ограничимся здесь и далее простейшим случаем

$$\alpha_m = 0,\ \beta_m = 0,\ \gamma_m = 0,\ \delta_m = 0$$

и представим систему (6)–(10) в виде

$$f_2 = -\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial x\partial z}, \tag{16}$$

$$f_3 = \frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial x\partial z}, \tag{17}$$

$$f_4 = -\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial z^2}\right), \tag{18}$$

$$f_5 = \frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial x\partial z} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial y\partial z}\right), \tag{19}$$

$$f_6 = -\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi_{14}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial x\partial z}\right). \tag{20}$$

Левые части уравнений (16)–(20) представляют некоторые комбинации, не содержащие неизвестных Ψ_{10}, Ψ_{11}, Ψ_{12}, Ψ_{13}, Ψ_{14}, Ψ_{15}. Функции f_i определяются выражениями

$$f_2 = u^2 - v^2 + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}(\Psi_5 + \Psi_6)\right),$$

$$f_3 = v^2 - w^2 + \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_1 + \Psi_2) + \frac{\partial\Psi_4}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_6}{\partial z}\right),$$

$$f_4 = uv - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(\Psi_8 + \Psi_9)\right),$$

$$f_5 = uw - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\Psi_7 - \Psi_9) - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right),$$

$$f_6 = vw - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_7 + \Psi_8) + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial z}\right), \qquad (21)$$

где под u, v, w следует понимать правые части (11)–(13).

Рассмотрим подробнее уравнения (16)–(17) и исключим из них неизвестные Ψ_{10}, Ψ_{11}, Ψ_{12}. Все предлагаемые преобразования естественным образом разбиваются на два пункта, в результате осуществления которых будут получены два условия совместности.

Первое условие. Рассмотрим уравнение (16). Последовательно выполним следующие действия. Вычислим $-\frac{\partial}{\partial x}$ от выражения (18) и $\frac{\partial}{\partial y}$ от выражения (16). Складывая результаты, приходим к соотношению

$$-\frac{\partial f_4}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial^3 \Psi_{10}}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \Psi_{11}}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 \Psi_{12}}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 \Psi_{15}}{\partial y^2 \partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \Psi_{15}}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \Psi_{14}}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{\partial^3 \Psi_{13}}{\partial x \partial z^2}\right). \qquad (22)$$

Вычисляем, далее $\frac{\partial}{\partial x}$ от уравнения (22) и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ от уравнения (18). Складывая результаты, получаем равенство

$$\begin{gathered}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} = -\frac{\partial^4 \Psi_{11}}{\partial x \partial y \partial z^2} - \frac{\partial^4 \Psi_{12}}{\partial x \partial y \partial z^2} + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4 \Psi_{15}}{\partial x \partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^4 \Psi_{15}}{\partial x^3 \partial z} + \frac{\partial^4 \Psi_{14}}{\partial x^2 \partial y \partial z} + \frac{\partial^4 \Psi_{14}}{\partial y^3 \partial z} + \frac{\partial^4 \Psi_{13}}{\partial y^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 \Psi_{15}}{\partial x^2 \partial z^2}\right).\end{gathered} \qquad (23)$$

Вычислим $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$ от равенства (19) и сложим с равенством (23). В результате получаем

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_5}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4 \Psi_{15}}{\partial x^3 \partial z} + \frac{\partial^4 \Psi_{14}}{\partial x^2 \partial y \partial z} - \frac{\partial^4 \Psi_{13}}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 \Psi_{12}}{\partial x \partial y \partial z^2}\right). \qquad (24)$$

В качестве последних действий вычисляем $\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}$ от уравнения (20) и вычитаем результирующее равенство из выражения (24). Приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_5}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_6}{\partial x \partial z} = 0. \qquad (25)$$

Равенство (25) представляет первое необходимое условие разрешимости системы (16)–(20). Функции f_i определяются выражениями (21) с учетом (11)–(13). Правые части выражений, определяющих f_i, будут содержать производные третьего порядка относительно неизвестных Ψ_j, где $j = 1, \ldots, 9$. Поэтому уравнение (25) есть дифференциальное уравнение пятого порядка относительно этих неизвестных.

Второе условие. Рассмотрим уравнение (17) и аналогично тому, как это было сделано в предыдущем случае, исключим из него неизвестные Ψ_{10}, Ψ_{11}, Ψ_{12}.

Для этого предлагаются следующие преобразования. Вычисляем $\dfrac{\partial}{\partial y}$ от равенства (17) и $\dfrac{\partial}{\partial x}$ от уравнения (18). Складывая результаты, получаем равенство

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}+\frac{\partial f_4}{\partial x}=\frac{\partial^3\Psi_{11}}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^3\Psi_{12}}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\Psi_{12}}{\partial y\partial z^2}-\frac{\partial^3\Psi_{13}}{\partial x\partial y^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\Psi_{13}}{\partial x\partial z^2}-\frac{\partial^3\Psi_{14}}{\partial x\partial y\partial z}-\frac{\partial^3\Psi_{15}}{\partial x^2\partial z}\right). \tag{26}$$

Далее вычисляем $\dfrac{\partial}{\partial z}$ от равенства (26) и $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ от выражения (19). Вычитая второе из первого, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f_5}{\partial x\partial z}=-\frac{\partial^4\Psi_{12}}{\partial y^3\partial z}+\frac{\partial^4\Psi_{12}}{\partial y\partial z^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4\Psi_{13}}{\partial x\partial z^3}-\frac{\partial^4\Psi_{13}}{\partial x\partial y^2\partial z}+\right.\\ \left.+\frac{\partial^4\Psi_{14}}{\partial x\partial y^3}-\frac{\partial^4\Psi_{14}}{\partial x\partial y\partial z^2}-\frac{\partial^4\Psi_{15}}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4\Psi_{15}}{\partial x^2\partial y^2}\right).\end{aligned} \tag{27}$$

В качестве следующих преобразований предлагается вычислить $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ от уравнения (20) и результат вычесть из соотношения (27). Получаем равенство

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f_5}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_6}{\partial y^2}=\frac{\partial^4\Psi_{12}}{\partial y\partial z^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4\Psi_{13}}{\partial x\partial z^3}-\frac{\partial^4\Psi_{14}}{\partial x\partial y\partial z^2}-\frac{\partial^4\Psi_{15}}{\partial x^2\partial z^2}\right). \tag{28}$$

На заключительном этапе преобразований вычисляем $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ от равенства (20) и складываем результат с уравнением (28). Приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f_5}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_6}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_6}{\partial z^2}=0. \tag{29}$$

Равенство (29) представляет второе необходимое условие совместности системы (6)–(10). Равенство (29), как и (25), есть дифференциальное уравнение пятого порядка относительно неизвестных Ψ_j, где где $j = 1, 2, \ldots, 9$.

Таким образом, получены два необходимых условия совместности системы (6)–(10). Чтобы построить окончательные решения уравнений Навье — Стокса (1)–(4), нужно произвести второе интегрирование.

4. Второе интегрирование. Этот этап построения решений сводится к следующим двум задачам.

А. Нужно разрешить систему двух уравнений (25), (29) относительно девяти неизвестных Ψ_j, где $j = 1, 2, \ldots, 9$. Каждое из уравнений этой системы представляет нелинейное дифференциальное уравнение пятого порядка относительно указанных неизвестных. Обращает на себя внимание значительное превышение числа неизвестных над числом уравнений. Неизвестных — девять, а уравнений — два. Это обстоятельство представляется весьма выгодным при решении конкретных задач, поскольку некоторые из неизвестных можно выбрать удобным образом или подчинить некоторым условиям. После того, как указанная система разрешена и неизвестные Ψ_j найдены, по уравнениям (11)–(13) можно определить u, v, w. В результате три из основных неизвестных будут найдены, и останется определить только p.

Б. Для определения p вначале нужно обратиться к уравнениям (18)–(20). Поскольку все скоростные псевдофункции тока Ψ_j уже определены, то в качестве неизвестных в этих уравнениях фигурируют лишь Ψ_{10}, Ψ_{11}, Ψ_{12}, Ψ_{13}, Ψ_{14}, Ψ_{15}. Относительно этих неизвестных уравнения (18)–(20) линейны. Таким образом, имеем систему трех линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка. Причем имеем превышение числа неизвестных над числом уравнений. Неизвестных — шесть, а уравнения — три.

Замечаем также, что в каждом из уравнений присутствует лишь по одному члену с неизвестными Ψ_{10}, Ψ_{11}, Ψ_{12}. В уравнении (18) присутствует одно слагаемое с указанными неизвестными, а именно $-\dfrac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x\partial y}$, в уравнении (19) $\dfrac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial x\partial z}$ и в уравнении (20) $-\dfrac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y\partial z}$.

Один из простейших вариантов решения рассматриваемой системы предлагается таким. Неизвестные Ψ_{13}, Ψ_{14}, Ψ_{15} можно задать произвольно. Тогда каждое из уравнений (18)–(20) представляет уравнение с одним неизвестным, соответственно Ψ_{10}, Ψ_{11}, Ψ_{12}, Ψ_{13}. Эти уравнения имеют вид

$$g_4 = -\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial x\partial y},\; g_5 = \frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial x\partial z},\; g_6 = -\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y\partial z}, \tag{30}$$

где левые части g_i есть известные функции x, y, z, t.

Чтобы разрешить уравнения (30), достаточно левую часть два раза последовательно проинтегрировать — соответственно по x и y, x и z или y и z. Таким образом, все ассоциированные неизвестные будут определены. Ψ_{13}, Ψ_{14}, Ψ_{15} заданы произвольно, Ψ_j, при $j = 1, 2, \ldots, 9$ определены из решения уравнений (25), (29), и неизвестные Ψ_{10}, Ψ_{11}, Ψ_{12} — из решения уравнений (30).

Теперь можно определить p, последнее из основных неизвестных. Для этого достаточно воспользоваться уравнением (5) с учетом соотношений (14), (15). Уравнение (5) дает выражение для p через другие неизвестные, которые уже определены. Воспользовавшись выражением (5), находим p. Из предыдущего высказывания ясно, что результирующее выражение для p будет содержать не менее трех произвольных функций четырех независимых переменных. Такими функциями являются Ψ_{13}, Ψ_{14}, Ψ_{15}. Если допустить ненулевые значения произвольно выбираемых функций трех переменных α_m, β_m, γ_m, δ_m, то эти функции также будут присутствовать в выражениях для неизвестных.

Итак, все неизвестные определены и задачу построения решений уравнений Навье — Стокса (1)–(4) можно считать решенной полностью.

В ы в о д ы. Таким образом, основные этапы предлагаемого подхода к построению решений 3D уравнений Навье — Стокса сводятся к следующему.

Первый интеграл уравнений нужно взять за основу. Дальнейшее интегрирование сводится к решению совокупности более простых задач. Такими задачами являются две. Первая — это решение системы двух нелинейных уравнений пятого порядка относительно девяти неизвестных. Вторая — решение линейной неоднородной системы трех уравнений второго порядка с тремя неизвестными.

Результатом реализации указанного подхода являются выражения для основных неизвестных u, v, w, p, содержащие набор произвольных функций трех и четырех независимых переменных, что удобно при решении начальных и краевых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коптев А. В.* Интегралы уравнений Навье — Стокса // Труды Средне-Волжского математического общества. Саранск, 2004. № 1. Т. 6. С. 215–225.

2. *Коптев А. В.* Первый интеграл и пути дальнейшего интегрирования уравнений Навье — Стокса // Известия РГПУ им. А. И. Герцена: Научный журнал: Естественные и точные науки. 2012. № 147. С.7–17.

3. *Коптев А. В.* Структура решений уравнений Навье — Стокса: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования // Герценовские чтения — 2014. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. С. 71–74.

4. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

5. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.

6. *Charles L.* Fefferman. Existence and Smoothness of the Navier — Stokes equation. Preprint, Princeton Univ., Math. Dept. Princeton, NJ, 2000. P. 1–5.

REFERENCES

1. *Koptev A. V.* Integraly uravnenij Nav'e — Stoksa // Trudy Sredne-volzhskogo matematicheskogo obwestva. Saransk, 2004. № 1. T. 6. S. 215–225.

2. *Koptev A. V.* Pervyj integral i puti dal'nejshego integrirovanija uravnenij Nav'e — Stoksa // Izvestija RGPU im. A. I. Gercena: Estestvennye i tochnye nauki. 2012. № 147. S. 7–17.

3. *Koptev A. V.* Struktura reshenij uravnenij Nav'e — Stoksa: Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija // Gertsenovskie chtenija — 2014. SPb.: RGPU im. A. I. Gercena, 2014. C. 71–74.

4. *Ladyzhenskaja O. A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti. M.: Nauka, 1970, 288 s.

5. *Temam R.* Uravnenija Nav'e — Stoksa. Teorija i chislennyj analiz. M.: Mir, 1981, 408 s.

6. *Charles L.* Fefferman. Existence and Smoothness of the Navier — Stokes equation. Preprint, Princeton Univ., Math. Dept. Princeton, NJ, 2000. P. 1–5.