

**ПРОЯВЛЕНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ  
В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ.  
ЭФФЕКТЫ, АНАЛОГИЧНЫЕ ВЫРОЖДЕНИЮ  
В КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ**

*Исследуются свойства симметрии теоретической модели нелинейной динамической системы. Соответствующая модель представляет собой двумерный ротатор во внешнем периодическом поле. Симметрия поля в зависимости от параметров модели описывается различными точечными группами симметрии. Характер движения системы в зависимости от параметров может быть как хаотическим, так и регулярным (периодическим). Численный эксперимент показывает, что излучение подобной системы по свойствам симметрии подобно излучению аналогичной квантовомеханической модели и может быть исследовано на основе теории групп.*

**Ключевые слова:** нелинейная динамика, динамический хаос, симметрия, поляризация излучения.

*A. Liaptsev*

**MANIFESTATION OF SYMMETRY PROPERTIES  
IN PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS.  
EFFECTS ANALOGOUS TO DEGENERATION  
IN QUANTUM MECHANICAL PROBLEMS**

*Symmetry properties of a theoretical model of nonlinear dynamics are investigated. The model represents a two-dimensional rotator in an external periodic field. The symmetry of the field is described with different point groups depending of parameters of the model. The motion of the model can be chaotic or regular (periodic) depending on the parameters of the model. A numerical experiment shows that the symmetry properties of radiation of the system are similar to the same properties of the radiation of the analogous quantum mechanical system, and can be investigated by means of group theory.*

**Keywords:** nonlinear dynamics, dynamic chaos, symmetry, polarization of radiation.

Являясь универсальными по отношению к законам природы, принципы симметрии тем не менее по-разному проявляются при описании эволюции системы методами классической механики и методами квантовой физики. При классическом описании симметрия определяет интегралы движения и позволяет предсказать качественные особенности траектории системы в фазовом пространстве. При квантовом описании, когда понятие траектории теряет смысл, «предсказательная сила» принципов симметрии тем не менее возрастает. В частности, симметрия позволяет объяснить структуру спектров, фактически дающих информацию о системе, и на основе решения обратной задачи восстановить структуру самой системы. Во многом такое различие в проявлении симметрии связано с тем, что при классическом описании макроскопической системы мы можем проследить за движением соответствующей точки в фазовом пространстве, определяющей состояние системы. При квантовомеханическом описании из опытных данных можно лишь восстановить вероятность обнаружения системы в некоторой области фазового пространства.

---

Однако в ряде случаев и при классическом описании понятие траектории движения в фазовом пространстве, остающееся по сути справедливым, становится бесполезным в практическом смысле. К таким случаям относится, в частности, описание движения системы с большим числом степеней свободы, например, движения молекул в газе. В последнее время возрастает интерес к изучению систем другого рода — систем с небольшим числом степеней свободы, в которых движение является хаотическим (см., например, работы [2; 4]). При наличии диссипации в таких системах траектория системы в фазовом пространстве является незамкнутой кривой, стремящейся к некоторому предельному множеству — странному аттрактору. Поскольку траектории частиц в фазовом пространстве становятся в этом случае необычайно сложными и запутанными, бессмысленно следить за каждой траекторией в отдельности. Вместо этого следует рассматривать сразу совокупность траекторий, которые в любой момент времени занимают конечный объем фазового пространства, а распределение частиц в нем характеризуется некоторой плотностью [4]. Описание системы становится, таким образом, подобным квантовомеханическому описанию открытой системы при помощи матрицы плотности.

Численные эксперименты с такими системами, в частности при исследовании сечений Пуанкаре, показывают, что при наличии симметрии в такой системе распределение плотности вероятности при хаотическом движении имеет те же особенности, что и плотность вероятности, вычисленная для аналогичных систем при квантовомеханическом описании [6–8]. Переходы к регулярному движению в таких системах, которые могут происходить при адиабатическом изменении параметров системы, изменяют симметрию системы и фактически аналогичны спонтанному изменению симметрии, происходящему при фазовых переходах.

Представляет интерес исследование свойств симметрии, связанных с вырождением состояний при квантовомеханическом описании. Как правило, соответствующие эффекты связаны с тем, что стационарные состояния системы преобразуются по многомерным представлениям соответствующих групп симметрии. При понижении симметрии вследствие дополнительного возмущения такое вырождение может сниматься, что проявляется, в частности, в расщеплении соответствующих линий в спектрах.

Достаточно очевидно, что при классическом описании, когда при хаотическом движении в излучении системой электромагнитной волны отсутствуют дискретные частоты, подобные эффекты наблюдаться не могут. Однако если обратиться к вырождению функций, соответствующих фотону, то вырождение состояний проявляется в угловом распределении излучения и в поляризации этого излучения. Так, например, при излучении фотона сферически симметричной системой (атом, атомное ядро) волновая функция фотона, электрического дипольного фотона трехкратно вырождена [1]. Снятие вырождения в этом случае может проявляться в изменении пространственного распределения излучения и его поляризации. Но подобные эффекты могут иметь место и для классических систем. В работе [6] была исследована простейшая классическая система — одномерный заторможенный ротатор, находящийся под воздействием внешнего гармонического поля. В такой системе возможно хаотическое движение, а соответствующая ей группа симметрии имеет двумерные неприводимые представления. Численное исследование излучения такой системы показывает, что вырождение проявляется в деполяризации излучения, а снятие вырождения приводит к частично поляризованному излучению.

Можно предполагать, что при исследовании еще более «богатой» в смысле симметрии модели эффекты, связанные с поляризацией и пространственным излучением системы, позволят продемонстрировать в еще большей степени роль симметрии при хаотическом

движении. В данной работе мы рассмотрим систему, группа симметрии которой имеет трехмерные неприводимые представления, что соответствует трехкратному вырождению уровней энергии в аналогичной квантовомеханической модели. Мы покажем, что при понижении симметрии дополнительным возмущением снятие вырождения в классической системе проявляется как изменение пространственного распределения излучения и изменение поляризационных характеристик излучения.

### Модель

Для данной задачи необходимо сконструировать модель, которая, с одной стороны, была бы достаточно простой для проведения соответствующих численных расчетов и анализа излучения и, с другой стороны, соответствующая ей группа симметрии имела бы трехмерные неприводимые представления. Кроме того, необходимо, чтобы при некотором наборе параметров в подобной системе мог быть реализован хаотический режим движения, переходящий в регулярные движения при других значениях параметров. В качестве такой системы мы рассмотрим ротатор с двумя степенями свободы, который может быть реализован как стержень с зарядом на одном конце, шарнирно закрепленный на другом конце, способный свободно вращаться в двух измерениях. Необходимая симметрия обеспечивается внешним полем, которое создается зарядами. Изменяя величины этих зарядов, можно создавать внешнее периодическое воздействие. Соответствующая модель ротатора представлена на рисунке 1.

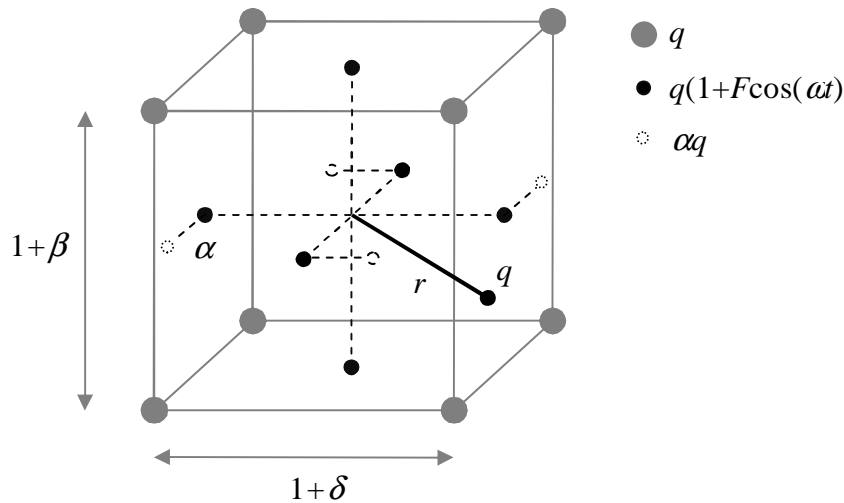


Рис. 1. Модель ротатора

Численный расчет показывает, что хаотический режим может быть реализован, если в углах куба расположить заряды  $q$ , а в центрах граней — заряды, изменяющиеся со временем по закону  $q(1 + F\cos(\alpha))$ . Группа симметрии системы зарядов, создающих поле, — группа симметрии куба  $O_h$ . Понижение симметрии можно обеспечить, изменяя значения ребер (параметры  $\beta$  и  $\delta$  на рисунке), а также добавляя заряды  $\alpha q$  на грань куба в точку, отстоящую на величину  $\alpha$  от центра грани, как указано на рисунке 1. Симметрия при параметрах  $\alpha = \beta = \delta$  соответствует группе симметрии  $O_h$ . В случае, когда один из параметров  $\beta$  или  $\delta$  отличен от нуля, группа симметрии понижается до  $D_{4h}$ . При  $\beta \neq 0$ ,  $\delta \neq 0$ ,  $\beta \neq \delta$

группа симметрии понижается до  $D_{2h}$ . Наконец, при отличном от нуля параметре  $\alpha$  и равных нулю параметрах  $\beta$  и  $\delta$  группа симметрии понижается до  $C_{4h}$ .

Поскольку фазовая траектория решения, имеющая вид странного аттрактора, появляется в системах с диссипацией, в качестве диссипативной силы в модели фигурирует сила вязкого трения, пропорциональная скорости и направленная против скорости вращающегося заряда. Уравнение движения системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}_d + \sum_i \mathbf{M}_i, \quad (1)$$

где  $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  — момент импульса ротатора,  $\mathbf{M}_d = -\gamma\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  — момент силы трения,  $\mathbf{M}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i$  — момент  $i$ -й кулоновской силы:

$$\mathbf{F}_i = qq_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}.$$

Численные расчеты удобно проводить, положив  $m = q = 1$ . В качестве двух переменных задачи можно использовать углы сферических координат  $\theta$  и  $\varphi$ , однако, поскольку функции, входящие в уравнение (1), выраженные через угловые переменные, являются сингулярными, удобнее использовать две из трех декартовых координат. При этом процесс вычисления контролируется следующим образом. Исключается координата по модулю, большая некоторого малого значения  $\varepsilon$ , и процесс вычисления происходит до тех пор, пока модуль этой координаты больше  $\varepsilon$ . Как только исключаемая координата по модулю становится меньше  $\varepsilon$ , процесс вычисления происходит с исключением другой координаты, по модулю большей  $\varepsilon$ , и новое решение сшивается с предыдущим.

Характер решений зависит от трех параметров:  $F$  — амплитуда периодического воздействия на систему,  $\omega$  — частота периодического воздействия и  $\gamma$  — величина диссипации, а также от параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  изменяющих симметрию системы. При вычислениях параметр  $\gamma$  полагался равным 0,1, а параметры  $\omega$  и  $F$  варьировались в области от 0,5 до 2. Численный расчет давал как хаотические решения, так и регулярные решения, имеющие вид колебаний или вращений в зависимости от совокупности параметров.

В соответствии с законами классической электродинамики подобная система должна излучать электромагнитную волну. Выражение для электрической составляющей электромагнитной волны:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} \left( (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n} - \ddot{\mathbf{d}} \right),$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, определяющий направление распространения волны (рис. 2).

Обозначим векторы, определяющие поляризацию волны, через  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , причем вектор  $\mathbf{e}_1$  лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости  $(X, Y)$  и проходящей через вектор  $\mathbf{n}$ . Вектор  $\mathbf{e}_1$  указывает направление увеличения угла  $\theta$ . Заметим, что такое определение не дает однозначного направления векторов поляризации при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Необходимо использовать свойства непрерывности при  $\theta \rightarrow 0$  и  $\theta \rightarrow \pi$ .

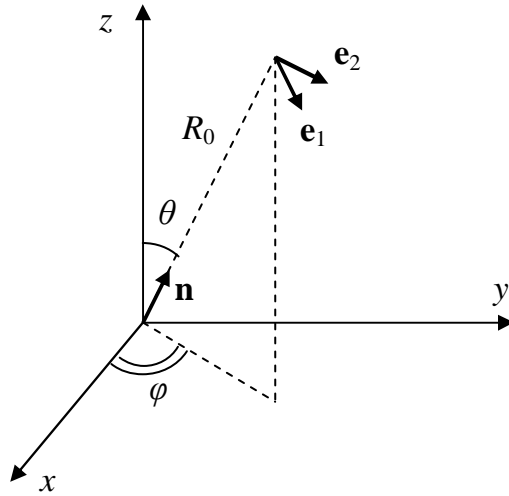


Рис. 2

Если же рассматривать двумерный случай и проводить наблюдение при  $\theta = 0$ , то следует считать векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , направленными по осям  $X$  и  $Y$  соответственно, для чего достаточно положить  $\varphi = \pi/2$ . Векторы  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{n}$  образуют тройку взаимно ортогональных векторов, и поле  $\mathbf{E}$  можно разложить по ним:

$$\mathbf{E} = \mathbf{n}E_n + \mathbf{e}_1E_1 + \mathbf{e}_2E_2.$$

Простые вычисления показывают, что  $E_n = 0$  (волна поперечна). Таким образом:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1E_1 + \mathbf{e}_2E_2.$$

Далее нас будет интересовать излучение системы на частоте внешнего воздействия  $\omega$ . В общем случае при эллиптической поляризации вектор  $\ddot{\mathbf{d}}$  можно представить в виде

$$\ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{R} \exp(i\omega t), \text{ где } \mathbf{R} = (X, Y, Z). \quad (2)$$

Опуская мультипликативную константу, составляющие  $E_1$  и  $E_2$  представим в виде:

$$E_j = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_j \exp(i\omega t), \quad j = 1, 2.$$

Векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  выражаются через угловые переменные:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} e_1^1 \\ e_1^2 \\ e_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} e_2^1 \\ e_2^2 \\ e_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, составляющие  $E_1$  и  $E_2$  выражаются через угловые переменные и комплексные амплитуды  $X, Y, Z$ :

$$E_j = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_j \exp(i\omega t) = (Xe_j^2 + Ye_j^2 + Ze_j^3) \exp(i\omega t), \quad j = 1, 2.$$

Интенсивности волн, поляризованных вдоль векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , определяется выражениями

$$I_1 = \frac{1}{2}|E_1|^2 = \frac{1}{2}|Xe_1^1 + Ye_1^2 + Ze_1^3|^2, \quad I_2 = \frac{1}{2}|E_2|^2 = \frac{1}{2}|Xe_2^1 + Ye_2^2 + Ze_2^3|^2. \quad (3)$$

Полная интенсивность определяется суммой  $I_1$  и  $I_2$ .

Для характеристики поляризации излучения используются параметры Стокса [1; 3]. Для вычисления параметров Стокса нужны интенсивности волн, поляризованных по векторам, повернутым относительно векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  под углом  $45^\circ$ , а также интенсивности циркулярно-поляризованных волн. Они задаются соответствующими выражениями:

$$I'_1 = \frac{1}{4}|E_1 - E_2|^2, \quad I'_2 = \frac{1}{4}|E_1 + E_2|^2, \quad I_+ = \frac{1}{4}|E_1 - iE_2|^2, \quad I_- = \frac{1}{4}|E_1 + iE_2|^2.$$

Эти выражения можно записать в виде, аналогичном (3), если ввести следующие орты:

$$\mathbf{e}'_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mp \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2).$$

В этих обозначениях получим:

$$\begin{aligned} I'_1 &= \frac{1}{2}|Xe_1^1 + Ye_1^2 + Ze_1^3|^2, & I_+ &= \frac{1}{2}|Xe_+^1 + Ye_+^2 + Ze_+^3|^2, \\ I'_2 &= \frac{1}{2}|Xe_2^1 + Ye_2^2 + Ze_2^3|^2, & I_- &= \frac{1}{2}|Xe_-^1 + Ye_-^2 + Ze_-^3|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) видно, что при эллиптической поляризации угловые зависимости интенсивностей и параметры Стокса определяются параметрами:

$$|X|^2, |Y|^2, |Z|^2, XY^*, XZ^*, YZ^*.$$

Если волна некогерентная, так что эллиптическую поляризацию можно считать заданной на интервале  $\tau = \gamma^{-1}$ , то нужны средние значения:

$$\langle |X|^2 \rangle, \langle |Y|^2 \rangle, \langle |Z|^2 \rangle, \langle XY^* \rangle, \langle XZ^* \rangle, \langle YZ^* \rangle. \quad (5)$$

Эти средние значения можно получить, усредняя соответствующие параметры, вычисленные на интервале  $\tau = \gamma^{-1}$ , по нескольким таким интервалам.

В результате вычислений получим следующие выражения для полной интенсивности  $I = I_1 + I_2$ , параметров Стокса, определяющих линейную поляризацию  $Q = I_1 - I_2$ ,  $U = I'_1 - I'_2$  и параметра Стокса, определяющего циркулярную поляризацию  $V = I_+ - I_-$ :

$$I = \frac{1}{2} \left( \langle |X|^2 \rangle + \langle |Y|^2 \rangle + \frac{\sin^2 \theta}{2} \left( \langle |Z|^2 \rangle - \langle |X|^2 \rangle + \langle |Z|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle - \cos(2\varphi) \left( \langle |X|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle \right) \right) \right) - \frac{1}{2} \left( \sin^2 \theta \sin(2\varphi) \operatorname{Re} \langle XY^* \rangle + \sin(2\theta) \cos \varphi \operatorname{Re} \langle XZ^* \rangle + \sin(2\theta) \sin \varphi \operatorname{Re} \langle YZ^* \rangle \right),$$

$$Q = \frac{1}{2} \left( \left( \langle |Z|^2 \rangle - \frac{1}{2} \left( \langle |X|^2 \rangle + \langle |Y|^2 \rangle \right) \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \left( \langle |X|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle \right) \cos(2\varphi) (1 + \cos^2 \theta) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \langle XY^* \rangle (1 + \cos^2 \theta) \sin(2\varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \left( \operatorname{Re} \langle XZ^* \rangle \cos \varphi - \operatorname{Re} \langle YZ^* \rangle \sin \varphi \right),$$

$$U = \frac{1}{2} \left( \langle |X|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle \right) \cos \theta \sin(2\varphi) - \operatorname{Re} \langle XY^* \rangle \cos \theta \cos(2\varphi) + \sin \theta \left( \operatorname{Re} \langle YZ^* \rangle \cos \varphi - \operatorname{Re} \langle XZ^* \rangle \sin \varphi \right),$$

$$V = \operatorname{Im} \langle XY^* \rangle \cos \theta + \operatorname{Im} \langle XZ^* \rangle \sin \theta \sin \varphi - \operatorname{Im} \langle YZ^* \rangle \sin \theta \cos \varphi.$$

Как видно из формул, поляризация и угловая зависимость излучения определяется девятью вещественными значениями (из шести чисел в выражениях (5) три последние — комплексные). В отсутствии симметрии все эти параметры, вообще говоря, отличны от нуля. Однако в аналогичной квантовомеханической модели наличие симметрии приводит к тому, что некоторые из этих параметров становятся равными нулю — аналогично тому, как это имеет место для элементов тензора комбинационного рассеяния [5]. Как показывает расчет, свойства симметрии в случае хаотического классического движения оказываются полностью аналогичными по проявлению, то есть в силу симметрии некоторые из параметров (5) становятся малыми.

В квантовомеханической модели угловое распределение излучения и поляризация определяются матрицей плотности излученного фотона. В случае дипольного излучения выражение для матрицы плотности можно привести к [1] виду:

$$\rho_{\lambda\lambda'}(\mathbf{n}) = C \sum_{L,\mu} \langle 1, \lambda, 1, -\lambda' | L, \Lambda \rangle D_{\Lambda\mu}^{(L)}(\mathbf{n}) S_{\mu}^{(L)}. \quad (6)$$

В этом выражении индексы  $\lambda, \lambda'$  соответствуют спиральности фотона и принимают значения -1 и 1,  $C$  — нормировочная константа ( $\operatorname{Sp}(\rho) = 1$ ),  $\langle 1, \lambda, 1, -\lambda' | L, \Lambda \rangle$  — коэффициенты Клебша — Гордана,  $D_{\Lambda\mu}^{(L)}(\mathbf{n})$  — матрица конечных вращений. Тензоры  $S_{\mu}^{(L)}$  и  $D_{\Lambda\mu}^{(L)}(\mathbf{n})$  преобразуются по неприводимому представлению группы вращений, причем индекс  $L$  принимает значения 0, 1, 2, а  $\mu$  принимает целые значения от  $-L$  до  $L$ . Компоненты тензора

$S_\mu^{(L)}$  выражаются через матричные элементы дипольного момента и матрицу плотности системы:

$$S_\mu^{(L)} = \sum \langle 1, m, 1, -m' | L\mu \rangle \langle M_i | R_m | M_f \rangle \langle M_f | \rho^{(f)} | M'_f \rangle \langle M'_f | R_{m'}^* | M'_i \rangle \langle M'_i | \rho^{(i)} | M_i \rangle.$$

В этом выражении суммирование производится по повторяющимся индексам, индексы  $i$  и  $f$  соответствуют начальному и конечному состояниям, между которыми происходит переход,  $R_m$  — сферические компоненты тензора дипольного момента,  $\rho$  — матрица плотности излучаемой системы, индексы  $M$  нумеруют вырожденные состояния начального и конечного уровней энергии.

Матрица плотности фотона  $\rho_{\lambda\lambda'}(\mathbf{n})$  определяет параметры Стокса  $Q$ ,  $U$ ,  $V$  и их зависимость от углов  $\theta$  и  $\varphi$  [1]. Именно:

$$\xi_1 = U/I = \text{Im}(\rho_{1,-1} - \rho_{-1,1}), \quad \xi_2 = V/I = \text{Re}(\rho_{1,-1} + \rho_{-1,1}), \quad \xi_3 = Q/I = (\rho_{1,1} - \rho_{-1,-1}).$$

Отметим, что в выражении (6) для матрицы плотности слагаемые с  $D_{\Lambda\mu}^{(L)}$  при  $L = 0$  и  $L = 2$ ,  $\Lambda = 0$  дают вклад только в суммарную интенсивность  $I$ , слагаемые с  $L = 1$  дают вклад в параметр Стокса  $V$ , а слагаемые с  $L = 2$ ,  $\Lambda \neq 0$  — вклад в полную интенсивность  $I$  и параметры Стокса  $Q$  и  $U$ .

Если от сферических компонент тензора дипольного момента перейти к декартовым компонентам

$$R_m = \langle m | \alpha \rangle R_\eta,$$

то выражения для параметров Стокса и интенсивности  $I$  будут аналогичны соответствующим выражениям для классической задачи, где под средними значениями  $\langle R_\eta R_\zeta^* \rangle$  следует понимать

$$\langle R_\eta R_\zeta^* \rangle = \sum \langle M_i | R_\eta | M_f \rangle \langle M_f | \rho^{(f)} | M'_f \rangle \langle M'_f | R_\zeta^* | M'_i \rangle \langle M'_i | \rho^{(i)} | M_i \rangle. \quad (7)$$

Это выражение может быть представлено в виде:

$$\langle R_\eta R_\zeta^* \rangle = \text{Sp} (R_\eta \rho^{(f)} R_\zeta^* \rho^{(i)}). \quad (8)$$

В том случае, когда электромагнитная волна излучается сферически симметричной системой, индексы  $M_i$  и  $M_f$  нумеруют функции, преобразующиеся по представлениям  $D^{(J_i)}$  и  $D^{(J_f)}$  группы трехмерных вращений. Величины  $\langle R_\eta R_\zeta^* \rangle$  отличны от нуля, когда выполняется соотношение

$$D^{(1)} \times D^{(J_f)} \times D^{(1)} \times D^{(J_i)} \supset D^{(0)}, \quad (9)$$

где  $D^{(1)}$  — представление, по которому преобразуется вектор  $\mathbf{R}$ .



Однако выражения (7) и (8) остаются справедливыми и в случае, когда симметрия излучаемой системы определяется некоторой точечной группой. Индексы  $M_i$  и  $M_f$  в этом случае нумеруют функции, преобразующиеся по некоторым представлениям  $\Gamma^{(i)}$  и  $\Gamma^{(f)}$  соответствующей точечной группы. Вместо соотношения (9) теперь получим

$$\Gamma^{(\eta)} \times \Gamma^{(i)} \times \Gamma^{(\zeta)} \times \Gamma^{(f)} \supset A, \quad (10)$$

где  $\Gamma^{(\eta)}$  и  $\Gamma^{(\zeta)}$  — представления, по которым преобразуются декартовы компоненты  $R_\eta$  и  $R_\zeta$  вектора  $\mathbf{R}$ , а через  $A$  обозначено полносимметричное представление соответствующей точечной группы. Таким образом, в квантовомеханической модели свойства симметрии позволяют выявить отличные от нуля значения тензора  $\langle R_\eta R_\zeta^* \rangle$ , определяющие угловое распределение и поляризацию излучения.

Заметим, что тензор  $S_\mu^{(L)}$  может быть выражен через величины  $\langle R_\eta R_\zeta^* \rangle$ :

$$S_\mu^{(L)} = \sum_{m, m', \eta, \zeta} \langle 1, m, 1, -m' | L\mu \rangle \langle m | \eta \rangle \langle -m' | \zeta \rangle \langle R_\eta R_\zeta^* \rangle,$$

и поскольку величины  $\langle R_\eta R_\zeta^* \rangle$  преобразуются по полносимметричному представлению точечной группы, отличные от нуля значения  $S_\mu^{(L)}$  появляются лишь тогда, когда в разложении представления группы вращений  $D^{(L)}$  по неприводимым представлениям точечной группы содержится полносимметричное представление.

Обращаясь к нашей модели, несложно понять, что внешнее возмущение таково, что матрицы плотности  $\rho^{(i)}$  и  $\rho^{(f)}$  преобразуются по полносимметричным представлениям соответствующих точечных групп симметрии. В этом случае соотношение (10) упрощается:

$$\Gamma^{(\eta)} \times \Gamma^{(\zeta)} \supset A. \quad (11)$$

Если свойства симметрии классической модели при хаотическом движении подобны свойствам симметрии квантовомеханической модели, то соотношения (11) должны давать отличные от нуля значения  $\langle R_\eta R_\zeta^* \rangle$ . При этом достаточно очевидно, что никакие численные расчеты не могут привести к точно нулевым значениям  $\langle R_\eta R_\zeta^* \rangle$  при каких-либо значениях  $\eta$  и  $\zeta$ . Можно лишь ожидать, что «нулевые» по симметрии величины окажутся существенно меньше значений «ненулевых» величин. Именно это и показывают численные расчеты, результаты которых мы приведем ниже. Во всех расчетах в случаях, когда имело место хаотическое движение, число интервалов длины  $\tau = \gamma^{-1}$  равнялось 1000. Для каждого интервала путем численного решения уравнения (1) находились значения вектора  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ . Далее при помощи анализа Фурье выделялась составляющая с периодом внешнего воздействия, находился вектор  $\mathbf{R}$  (уравнение(2)) и значения  $R_\eta R_\zeta^*$ . При усреднении по всем интервалам находились значения  $\langle R_\eta R_\zeta^* \rangle$ .

### 1. Группа симметрии $O_h$ .

Симметрия модели определяется этой группой при нулевых значениях параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ . Теория групп в этом случае дает следующие соотношения для средних значений:

$$\langle |X|^2 \rangle = \langle |Y|^2 \rangle = \langle |Z|^2 \rangle, \quad \langle XY^* \rangle = 0, \quad \langle XZ^* \rangle = 0, \quad \langle YZ^* \rangle = 0,$$

откуда для полной интенсивности и параметров Стокса получим:

$$I = \frac{1}{2} \langle |X|^2 + |Y|^2 \rangle, \quad Q = U = V = 0.$$

Таким образом, свойства симметрии приводят к тому, что излучение изотропно и деполаризовано. Интенсивность определяется лишь одним параметром  $S_0^{(0)}$  в выражении (6), пропорциональным  $\langle |X|^2 \rangle + \langle |Y|^2 \rangle + \langle |Z|^2 \rangle$ . Рассчитанные данные приведены в таблице 1. Все расчеты приведены для значений параметров  $\gamma = 0, 1$ ,  $\omega = 1, 2$ . Для сокращения записи здесь и далее использованы обозначения:

$$\begin{aligned} I_0 &= \langle |X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2 \rangle / 3, & rXY &= \text{Re} \langle XY^* \rangle / I_0, & rXZ &= \text{Re} \langle XZ^* \rangle / I_0, & rYZ &= \text{Re} \langle YZ^* \rangle / I_0, \\ & & iXY &= \text{Im} \langle XY^* \rangle / I_0, & iXZ &= \text{Im} \langle XZ^* \rangle / I_0, & iYZ &= \text{Im} \langle YZ^* \rangle / I_0, \\ dXY &= \langle |X|^2 - |Y|^2 \rangle / I_0, & dXZ &= \langle |X|^2 - |Z|^2 \rangle / I_0, & dYZ &= \langle |Y|^2 - |Z|^2 \rangle / I_0. \end{aligned}$$

Таблица 1

$F$	$dXY$	$dXZ$	$dYZ$	$rXY$	$rXZ$	$rYZ$	$iXY$	$iXZ$	$iYZ$
1,5	0,051	0,03	-0,021	-0,023	0,019	0,016	-0,021	-0,005	-0,009
1,7	-0,049	-0,046	0,004	-0,019	-0,007	0,047	0,024	0,000	0,042
3	0,051	0,031	-0,019	-0,007	0,015	0,023	-0,019	0,022	-0,012
5	0,008	0,053	0,044	0,002	0,023	0,005	0,005	0,044	-0,016
5	-0,021	0,000	0,021	-0,003	0,009	0,002	0,012	0,011	0,004

Следует учесть статистический характер численного эксперимента — повторный расчет для тех же значений параметров приводил к другим результатам (см. значения при  $F = 5$ ). Однако для всех расчетов относительные значения величин, которые в соответствии с симметрией должны быть равны нулю, при численном расчете не превосходят 0,1.

Как уже говорилось, при изменении параметров могут быть реализованы регулярные периодические режимы движения, которые могут иметь характер колебаний или вращений.

## 2. Группа симметрии $D_{4h}$ .

Симметрия модели определяется этой группой при нулевых значениях параметров  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $\beta \neq 0$ . Теория групп в этом случае дает следующие соотношения для средних значений:

$$\langle |X|^2 \rangle = \langle |Y|^2 \rangle \neq \langle |Z|^2 \rangle, \langle XY^* \rangle = 0, \langle XZ^* \rangle = 0, \langle YZ^* \rangle = 0,$$

откуда для полной интенсивности и параметров Стокса получим

$$I = \frac{1}{2} \left( \langle |X|^2 \rangle + \langle |Y|^2 \rangle + \frac{\sin^2 \theta}{2} \left( \langle |Z|^2 \rangle - \langle |X|^2 \rangle + \langle |Z|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle \right) \right).$$

$$Q = \frac{1}{2} \left( \left( \langle |Z|^2 \rangle - \frac{1}{2} (\langle |X|^2 \rangle + \langle |Y|^2 \rangle) \right) \sin^2 \theta \right).$$

$$U = V = 0.$$

Таким образом, свойства симметрии приводят к тому, что излучение становится не-изотропным, но полная интенсивность и отличный от нуля параметр Стокса  $Q$  не зависят от угла  $\varphi$  (аксиально симметричны). Интенсивность и параметр Стокса в этом случае определяются двумя отличными от нуля параметрами:  $S_0^{(0)}$  и  $S_0^{(2)}$ , второй параметр пропорционален  $\langle 2|Z|^2 - |X|^2 - |Y|^2 \rangle$ . Заметим, что в данном случае излучение деполяризовано в направлениях вдоль оси  $Z$  аналогично тому, что имеет место в задаче с одномерным ротатором [6].

Рассчитанные данные приведены в таблице 2. Параметры  $\gamma$ ,  $\omega$  и обозначения те же, что и в таблице 1.

Таблица 2

$F$	$\beta$	$dXY$	$dXZ$	$dYZ$	$rXY$	$rXZ$	$rYZ$	$iXY$	$iXZ$	$iYZ$
1,7	0,2	-0,055	-0,309	-0,254	0,042	0,033	-0,02	-0,037	-0,027	-0,047
2	0,2	0,092	0,471	0,563	0,03	-0,038	-0,023	0,001	-0,032	-0,018
3	0,2	0,018	-0,394	-0,412	-0,015	0,016	-0,03	0,011	0,012	0,005

Как видно из таблицы, «нулевые» (по симметрии) значения оказываются меньше 10% по отношению к значению полной интенсивности. («Отличные от нуля» параметры выделены в таблице более темным фоном). Аналогичные результаты получаются при замене  $\beta \leftrightarrow \delta$  (деформирование другой оси).

### 3. Группа симметрии $D_{2h}$ .

Симметрия модели определяется этой группой при нулевом значении  $\alpha$  и отличных от нуля значениях  $\beta$  и  $\delta$  таких, что  $\beta \neq \delta$ . Теория групп в этом случае дает следующие соотношения для средних значений:

$$\langle |X|^2 \rangle \neq \langle |Y|^2 \rangle \neq \langle |Z|^2 \rangle \neq \langle |X|^2 \rangle, \langle XY^* \rangle = 0, \langle XZ^* \rangle = 0, \langle YZ^* \rangle = 0,$$

откуда для полной интенсивности и параметров Стокса получим:

$$I = \frac{1}{2} \left( \langle |X|^2 \rangle + \langle |Y|^2 \rangle + \frac{\sin^2 \theta}{2} \left( \langle |Z|^2 \rangle - \langle |X|^2 \rangle + \langle |Z|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle - \cos(2\varphi) \left( \langle |X|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle \right) \right) \right),$$

$$Q = \frac{1}{2} \left( \left( \langle |Z|^2 \rangle - \frac{1}{2} \left( \langle |X|^2 \rangle + \langle |Y|^2 \rangle \right) \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \left( \langle |X|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle \right) \cos(2\varphi) (1 + \cos^2 \theta) \right),$$

$$U = \frac{1}{2} \left( \langle |X|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle \right) \cos \theta \sin(2\varphi), \quad V = 0.$$

В этом случае полная интенсивность и отличные от нуля параметры Стокса оказываются зависящими от углов  $\theta$  и  $\varphi$ . Следует заметить, что инвариантным по отношению к выбору системы координат является значение  $\sqrt{Q^2 + U^2}$ , так что поворотом системы координат вокруг оси, направленной вдоль вектора  $\mathbf{n}$ , можно добиться отличия от нуля (при заданных значениях  $\theta$  и  $\varphi$ ) только одного параметра Стокса, соответствующего линейной поляризации. Интенсивность и параметры Стокса в этом случае определяются тремя отличными от нуля параметрами:  $S_0^{(0)}$ ,  $S_0^{(2)}$  и  $S_2^{(2)} + S_{-2}^{(2)}$ , последний из этих параметров пропорционален  $\langle |X|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle$ . Заметим, что в данном случае излучение частично поляризовано и степень поляризации  $P = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$  зависит от направления излучения (углов  $\theta$  и  $\varphi$ ).

Рассчитанные данные приведены в таблице 3. Параметры  $\gamma$ ,  $\omega$  и обозначения те же, что и в таблице 1.

Таблица 3

$F$	$\beta$	$\delta$	$dXY$	$dXZ$	$dYZ$	$rXY$	$rXZ$	$rYZ$	$iXY$	$iXZ$	$iYZ$
2	0,5	0,2	0,237	-0,578	-0,341	-0,010	0,016	0,023	0,003	-0,005	0,003
3	-0,1	0,2	0,192	0,519	0,327	-0,013	0,008	0,055	0,028	-0,017	0,017
5	0,2	-0,2	1,341	1,204	-0,137	-0,023	-0,035	0,001	-0,008	-0,024	0,014

Как видно из таблицы, «нулевые» (по симметрии) значения также оказываются меньше 10% по отношению к значению полной интенсивности.

#### 4. Группа симметрии $C_{4h}$ .

Симметрия модели определяется этой группой при значениях параметров  $\beta = \delta = 0$  и  $\alpha \neq 0$ . Теория групп в этом случае дает следующие соотношения для средних значений:

$$\langle |X|^2 \rangle = \langle |Y|^2 \rangle \neq \langle |Z|^2 \rangle, \quad \text{Im} \langle XY^* \rangle \neq 0, \quad \text{Re} \langle XY^* \rangle = 0, \quad \langle XZ^* \rangle = 0, \quad \langle YZ^* \rangle = 0,$$

откуда для полной интенсивности и параметров Стокса получим:

$$I = \frac{1}{2} \left( \langle |X|^2 \rangle + \langle |Y|^2 \rangle + \frac{\sin^2 \theta}{2} \left( \langle |Z|^2 \rangle - \langle |X|^2 \rangle + \langle |Z|^2 \rangle - \langle |Y|^2 \rangle \right) \right),$$

$$Q = \frac{1}{2} \left( \left( \langle |Z|^2 \rangle - \frac{1}{2} (\langle |X|^2 \rangle + \langle |Y|^2 \rangle) \right) \sin^2 \theta \right),$$

$$V = \text{Im} \langle XY^* \rangle \cos \theta, \quad U = 0.$$

В этом случае отличны от нуля как параметр, характеризующий линейную поляризацию, так и параметр, характеризующий циркулярную поляризацию. Полная интенсивность и параметры Стокса зависят только от угла  $\theta$  (аксиально симметричны). Интенсивность и параметры Стокса в этом случае определяются тремя отличными от нуля параметрами:  $S_0^{(0)}$ ,  $S_0^{(2)}$  и  $S_0^{(1)}$ . Последний из этих параметров пропорционален  $\text{Im} \langle XY^* \rangle$ . В данном случае излучение также частично поляризовано.

Рассчитанные данные приведены в таблице 4. Параметры  $\gamma$ ,  $\omega$  и обозначения те же, что и в таблице 1.

Таблица 4

$F$	$\alpha$	$dXY$	$dXZ$	$dYZ$	$rXY$	$rXZ$	$rYZ$	$iXY$	$iXZ$	$iYZ$
2	0,5	0,005	-0,319	-0,324	0,013	-0,037	-0,006	-0,152	0,001	0,000
3	0,5	0,002	0,04	0,038	0,008	0,013	0,004	0,056	0,008	-0,03
5	0,5	0,016	0,063	0,048	0,031	0,011	-0,023	0,07	0,005	-0,02

Как видно из таблицы 4, в данном случае различие между «нулевыми» и «отличными от нуля» параметрами не во всех случаях достигает порядка величины, но, тем не менее, явно выражено.

#### Заключение.

1. Свойства симметрии системы, описывающейся уравнениями классической динамики и совершающей хаотическое движение, подобны свойствам аналогичной системы, описываемой уравнениями квантовой механики. Эти свойства, в частности, проявляются в

---

подобии характеристик излучения «классической» и «квантовой» модели, а именно тензора, определяющего угловое распределение и поляризацию излучения. Свойства симметрии в квантовой задаче позволяют определить нулевые компоненты этого тензора. В классической модели расчет дает малые значения этих компонент.

2. Вырождение уровней энергии в квантовой задаче коррелирует со свойствами пространственного распределения и поляризации излучения. Если симметрия определяется точечной группой, в которой имеются трехмерные неприводимые представления (трехкратное вырождение уровней в квантовой задаче), излучение в предложенной классической модели оказывается изотропным и деполаризованным. Соответственно для точечной группы симметрии, в которой имеются двумерные неприводимые представления, имеется ось симметрии, в направлении которой излучение оказывается деполаризованным.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика. Квантовая электродинамика. М.: Физматлит, 2006. Т. IV.
2. Гритченко В. Т., Мацтпура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику. М., 2007.
3. Джеррард А., Берч Дж. М. Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978.
4. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М., 1988.
5. Конингстайн И. А. Введение в теорию комбинационного рассеяния. М.: Мир, 1974.
6. Ляпцев А. В. Симметрия в задачах нелинейной динамики. Проявление свойств симметрии в поляризации излучения // Известия РГПУ им. А. И. Герцена: Научный журнал: Естественные и точные науки. 2014. № 168. С. 16–28.
7. Ляпцев А. В. Симметрия регулярных и хаотических движений в задачах нелинейной динамики. Уравнение Дуффинга // Известия РГПУ им. А. И. Герцена: Научный журнал: Естественные и точные науки. 2013. № 157. С. 24–34.
8. Ляпцев А. В. Симметрия регулярных и хаотических движений в задачах нелинейной динамики. Ротатор в периодическом поле // Известия РГПУ им. А. И. Герцена: Научный журнал: Естественные и точные науки. 2014. № 165. С. 23–34.

### REFERENCES

1. Berestetskij V. B., Lifshits E. M., Pitaevskij L. P. Teoreticheskaja fizika. Kvantovaja elektrodinamika. M.: Fizmatlit, 2006. T. IV.
2. Gritchenko V. T., Matstpura V. T., Snarskij A. A. Vvedenie v nelinejnuju dinamiku. M., 2007.
3. Dzherard A., Berch Dzh. M. Vvedenie v matrichnuju optiku. M.: Mir, 1978.
4. Zaslavskij G. M., Sagdeev R. Z. Vvedenie v nelinejnuju fiziku: ot majatnika do turbulentsnosti i haosa. M., 1988.
5. Koningstajn I. A. Vvedenie v teoriju kombinatsionnogo rassejanija. M.: Mir, 1974.
6. Ljaptsev A. V. Simmetrija v zadachah nelinejnoj dinamiki. Projavlenie svojstv simmetrii v poljarizatsii izluchenija // Izvestija Rossijskogo gosudarstvennogo universiteta im. A. I. Gertsena: Estestvennye i tochnye nauki. 2014. № 168. S. 16–28.
7. Ljaptsev A. V. Simmetrija reguljarnyh i haoticheskikh dvizhenij v zadachah nelinejnoj dinamiki. Uravnenie Duffinga // Izvestija Rossijskogo gosudarstvennogo universiteta im. A. I. Gertsena: Estestvennye i tochnye nauki. 2013. № 157. S. 24–34.
8. Ljaptsev A. V. Simmetrija reguljarnyh i haoticheskikh dvizhenij v zadachah nelinejnoj dinamiki. Rotator v periodicheskom pole // Izvestija Rossijskogo gosudarstvennogo universiteta im. A. I. Gertsena: Estestvennye i tochnye nauki. 2014. № 165. S. 23–34.