

-
10. *Uspenskij V. A., Semenov A. L. Teorija algoritmov: osnovnye otkrytija i prilozhenija. M.: Nauka, 1987. 288 s.*
 11. *Filosofskij slovar'. M.: Politizdat, 1987. 590 s.*
 12. *Hindli Dzh. R. Kombinatorij i ljambda-ischislenie. Kratkij obzor / Matematicheskaja logika v programirovanii: Sb. statej 1980–1988 gg. M.: Mir, 1991. S.119–140.*
 13. *Bridgman P. W. The nature of some of our physical concepts. N.Y., 1952.*

УДК 004.932.2

Ю. В. Шуплецов

ПРЯМОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО СПЕКТРА ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ БИМЕДИЦИНСКИХ ПРЕПАРАТОВ

(Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 13-01-00782)

Одним из методов получения статистических характеристик цифровых изображений является так называемый мультифрактальный формализм. В его основе лежит предположение о том, что многие процессы, особенно биологические, развиваются по степенным законам. Это означает, что, рассматривая изображение как фазовый портрет изучаемого процесса, мы можем характеризовать его с помощью такого неоднородного распределения некоторой меры, которое может быть описано с использованием не одной, а нескольких шкал (масштабов). Мультифрактальный формализм описывает статистические свойства этих мер в терминах сингулярных спектров или в терминах обобщённых размерностей.

Ключевые слова: полутоновые изображения, фрактальный анализ, мультифрактальный спектр.

Yu. Shupletsov

A DIRECT CALCULATION OF THE MULTIFRACTAL SPECTRA OF BIOMEDICAL ITEMS

One of the methods to obtain statistical characteristics of digital images is a so called multifractal formalism. The method is based on the assumption that most of images can be considered as phase portraits of complex dynamical systems and can be described by measure distributions. This distribution can be set using not one but several scales (measures). Multifractal formalism describes the statistical properties of the measure in terms of singular spectra or generalized dimensions. In this paper we investigate the possibility of applying the method of direct calculation of multifractal spectra to the analysis of certain classes of biomedical items' images. This method offers an image partition on a especially constructed subsets and calculation of fractal dimensions for each of them. In some cases the method is more preferable than the calculation of generalized dimensions.

Keywords: gray-scale images, fractal analysis, multifractal spectrum.

В данной работе мы применили прямое вычисление мультифрактального спектра к анализу изображений некоторых классов биомедицинских препаратов. Изображение разбивается на набор множеств уровня, в каждом из которых содержатся точки, обладающие близкими характеристиками. Набор фрактальных размерностей множеств уровня образует

мультифрактальный спектр. Мы рассматриваем разные способы определения меры ячейки. Приведены результаты численных экспериментов для нескольких классов изображений биомедицинских препаратов.

Статья посвящена применению метода прямого вычисления мультифрактального спектра для классификации изображений биомедицинских препаратов.

Анализируемые изображения часто имеют структуру, которая не моделируется одним фрактальным множеством, а представляет собой объединение нескольких взаимопроницающих фракталов, каждый из которых имеет свою собственную размерность. Подобные изображения, как правило, характеризуют поведение сложных динамических систем и могут рассматриваться как их фазовые портреты, полученные в различные промежутки времени. Для характеристики свойств таких систем применяются статистические описания, например, распределение некоторой меры по фазовому объёму.

Одним из методов получения статистических характеристик изображения является так называемый мультифрактальный формализм. В основе метода лежит предположение о том, что многие процессы, особенно биологические, развиваются по степенным законам и, следовательно, их фазовые портреты характеризуются таким неоднородным распределением некоторой меры, которое может быть описано с использованием не одной, а нескольких шкал (масштабов). Мультифрактальный формализм описывает статистические свойства этих мер в терминах сингулярных спектров или в терминах обобщённых размерностей. Описание этого формализма можно найти в работах [4; 5]. Известно, что мультифрактальный спектр и спектр обобщённых размерностей представляют собой два способа описания одной динамики. Они связаны между собой преобразованием Лежандра. Поскольку обобщённые размерности (спектр Реньи) появились в литературе раньше, то часто используется их вычисление, а затем — получение мультифрактального спектра с помощью преобразования Лежандра. Однако, как было показано в литературе [3], такая схема может приводить к большим погрешностям, поэтому иногда предпочтительнее использовать прямое вычисление мультифрактального спектра. Авторы работы [3] рассмотрели метод, основанный на вычислении статистической суммы. При таком подходе мультифрактальный спектр и набор показателей степени вычислялись как пределы термодинамических средних и получались как функции, зависящие от параметра статистической суммы.

В работе [6] был предложен метод, основанный на вычислении некоторой характеристики, называемой функцией плотности. Она определяется через выбранную меру ячеек, на которые разбивается изображение. Затем все точки с близкой плотностью объединяются в так называемое множество уровня. Фрактальные размерности множеств уровня образуют мультифрактальный спектр. В работе [2] мы использовали как функцию плотности, так и статистическую сумму для анализа некоторых классов изображений. Мера ячейки определялась как сумма интенсивностей пикселей. Исследования показали, что при таком выборе меры прямое вычисление мультифрактального спектра позволило классифицировать только препараты костной ткани.

В данной работе мы рассматриваем два способа определения меры ячейки и соответственно получаем два способа разбиения изображения на множества уровня. Рассматривались следующие классы изображений: три класса соединительных тканей, изображения препаратов здоровой печени и печень с жировой дистрофией. Показано, что выбор меры влияет на результаты классификации. На основе численных экспериментов можно сделать выводы о применимости метода к определенным классам изображений.

Метод прямого вычисления мультифрактального спектра

Пусть $B(x, r)$ — квадрат с центром в точке $x \in R^2$ и со стороной r . Предположим, что $\mu(B(x, r)) = kr^{d(x)}$, где $d(x)$ — функция плотности, а k — некоторая константа. Определим функцию плотности:

$$d(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}. \quad (1)$$

Определим множество точек $x \in R^2$ с плотностью α следующим образом:

$$E_\alpha = \{x \in R^2: d(x) = \alpha\}. \quad (2)$$

Мы получили точечную категоризацию $\{E_\alpha: \alpha \in R\}$ изображения. Мультифрактальный спектр изображения определяется как

$$\{f(\alpha): \alpha \in R\} = \{\dim(E_\alpha): \alpha \in R\}. \quad (3)$$

В качестве фрактальной размерности $\dim(E_\alpha)$ используется ёмкостная размерность:

$$\dim_B(E_\alpha) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta, E_\alpha)}{-\log \delta}, \quad (4)$$

где $N(\delta, E_\alpha)$ — число ячеек диаметром меньше δ для покрытия E_α . Функция плотности в заданной точке определяется с помощью ячеек разного размера (r) и характеризует неравномерность распределения интенсивностей пикселей вблизи этой точки.

В нашей работе мы рассматриваем следующие варианты определения меры:

1. $\mu(B(x, r))$ — сумма яркостей пикселей в квадрате со стороной r и центром x .
2. $\mu(B(x, r)) = \iint_{\mu(B(x, r))} I(y) dy$,

где $I(y)$ — интенсивность пикселя в точке $y \in B(x, r)$.

В дискретном случае

$$\mu(B(x, r)) = \sum_{y \in B(x, r)} I(y). \quad (5)$$

3. $\mu(B(x, r)) = \iint_{\mu(B(x, r))} \nabla^2(I(y)) dy$, где ∇^2 — оператор Лапласа [1].

В дискретном случае согласно работе [1] получаем

$$\mu(B(x, r)) = \sum_{y \in B(x, r)} L(y), \quad (6)$$

где $L(y) = 8I(y) - \sum_{z \in B(y, 2) \setminus y} I(z)$.

Разные определения функции плотности ведут к разным мультифрактальным спектрам.

Алгоритм вычисления мультифрактального спектра

Пусть у нас есть полутоновое изображение R . В цикле по α от 1 до 2 с шагом 0.1 выполняем следующее:

1. Вычисляем $\mu(B(x, r))$ для каждого пикселя изображения по формуле (5) или (6) для $r = 1; 2; 3; 4; 5$.
2. Вычисляем функцию плотности $d(x)$ с помощью метода наименьших квадратов.
3. Подсчитываем $N(\delta, E_\alpha)$ для $\alpha \in [\alpha; \alpha + 0,1)$ и $\delta = 1; 2; 3; 4; 5$.
4. Подсчитываем ёмкостную размерность $f(\alpha)$ множества E_α методом наименьших квадратов.

Программное средство реализовано на языке Java, что делает его независимым от платформы, на которой выполняется приложение, а простой и понятный интерфейс обеспечивает удобство использования для широкого круга пользователей. Приложение писалось и тестировалось на среде разработки Eclipse 3.5 под Windows XP и Windows 7. В качестве тестовых образцов были рассмотрены снимки биомедицинских препаратов следующих классов: три типа соединительной ткани и класса изображений препаратов печени.

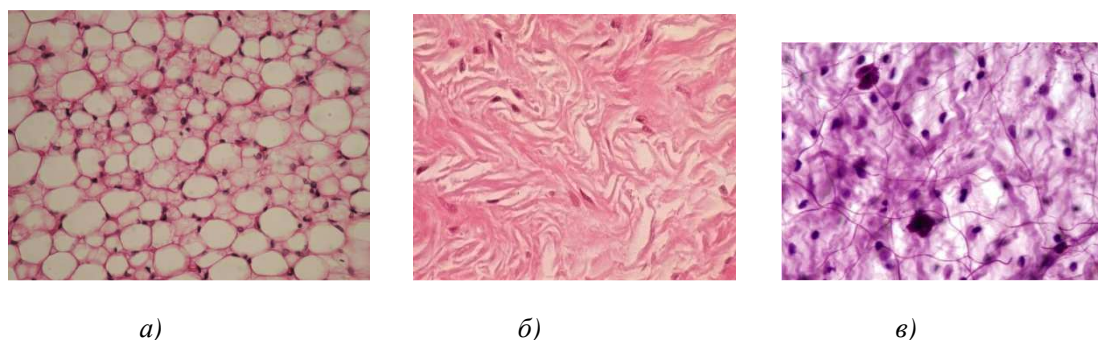


Рис. 1. Типы соединительной ткани:
a — жировая ткань; *b* — тучные клетки; *b* — рыхлая ткань

Ниже приведены таблицы и графики (табл. 1, 2; рис. 2, 3) значений мультифрактальных спектров (для $\alpha = 1 \dots 2$) для изображений соединительной ткани: жировой ткани, рыхлой ткани и тучных клеток для двух способов определения меры ячейки. Символ t обозначает тип изображений, показанных на рисунке 1, α обозначает границы диапазонов, в которых содержатся значения функций плотности.

$$\mu(B(x, r)) = \sum_{y \in B(x, r)} I(y)$$

Таблица 1

α/t	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
a)	0.30	0.85	0.80	1.28	1.45	1.37	1.77	0.98	0.73	0.44
б)	0	0.76	0.64	1.24	1.42	1.33	1.81	1.13	0.88	0
в)	0.16	1.00	0.74	1.137	1.428	1.420	1.751	1.154	1.156	0.635



Рис. 2. Мультифрактальные спектры для изображений препаратов соединительной ткани. Мера ячейки определяется как сумма интенсивности пикселей

$$\mu(B(x,r)) = \sum_{y \in B(x,r)} L(y).$$

Таблица 2

α/t	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
а)	0.17	0.17	0.17	0.17	0.16	0.19	0.18	0.17	0.13	0.12
б)	0.15	0.12	0.13	0.12	0.12	0.12	0.09	0.08	0.10	0.09
в)	0.26	0.24	0.24	0.216	0.228	0.206	0.198	0.172	0.156	0.144

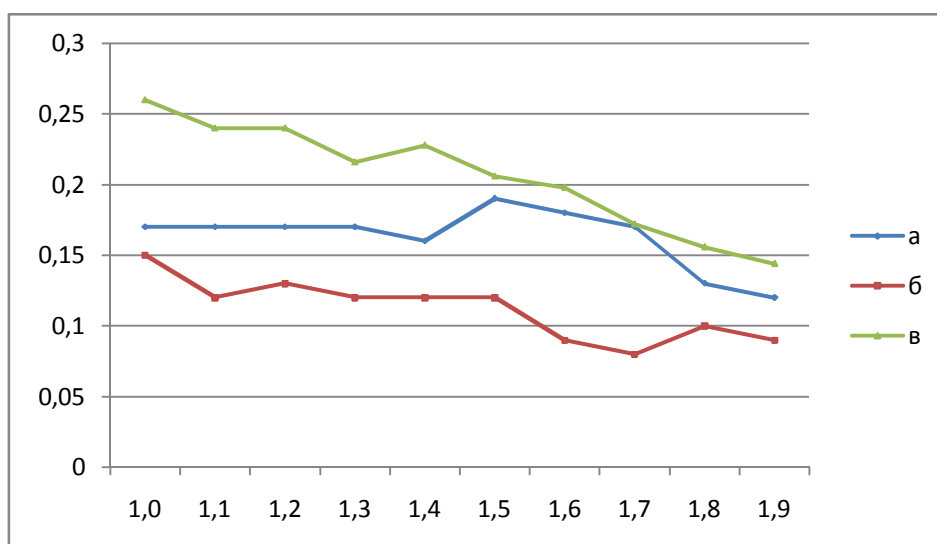
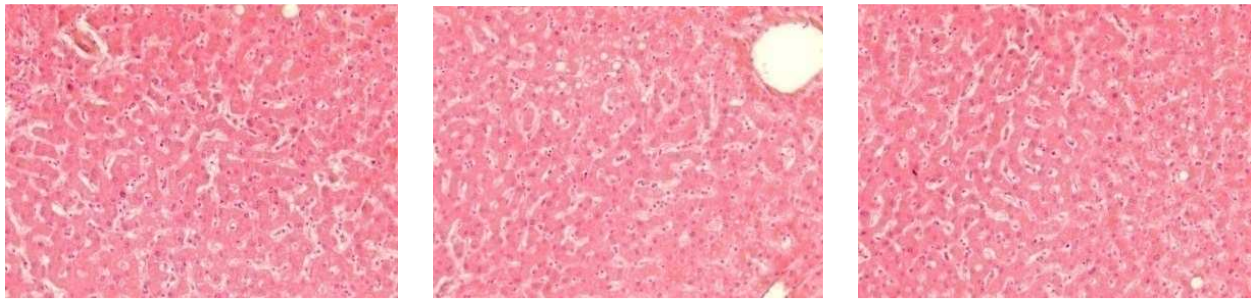


Рис. 3. Мультифрактальные спектры для изображений препаратов соединительной ткани. Мера ячейки определяется с использованием лапласиана



а) б) в)

Рис. 4. Препараты здоровой печени:
а — первое изображение; б — второе изображение; в — третье изображение

Ниже приведены таблицы и графики значений мультифрактальных спектров (для $\alpha = 1 \dots 2$) для изображений клеток здоровой печени для двух способов определения меры ячейки.

$$\mu(B(x, r)) = \sum_{y \in B(x, r)} I(y)$$

Таблица 3

α/t	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
а)	0.448	1.286	0.754	1.295	1.632	1.107	1.961	0.8113	0
б)	0.279	1.306	0.927	1.275	1.640	1.036	1.978	0.818	0
в)	0.448	1.342	0.788	1.288	1.629	1.085	1.964	0.892	0

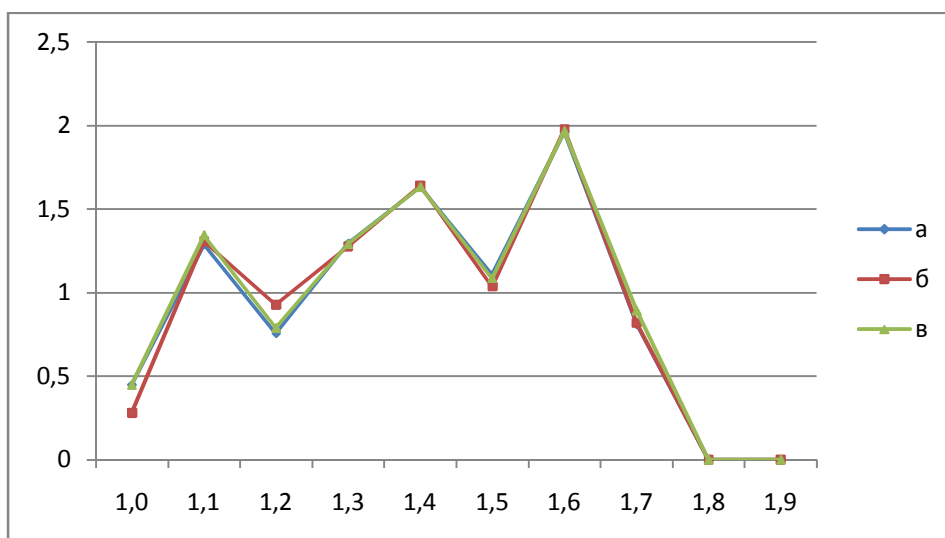


Рис. 5. Мультифрактальные спектры для изображений препаратов здоровой печени.
Мера ячейки определяется как сумма интенсивности пикселей

$$\mu(B(x,r)) = \sum_{y \in B(x,r)} L(y).$$

Таблица 4

α/t	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
а)	0.25	0.25	0.25	0.24	0.23	0.21	0.19	0.16	0.14	0.13
б)	0.24	0.24	0.23	0.22	0.21	0.19	0.17	0.15	0.13	0.12
в)	0.24	0.24	0.23	0.232	0.217	0.201	0.186	0.162	0.143	0.120

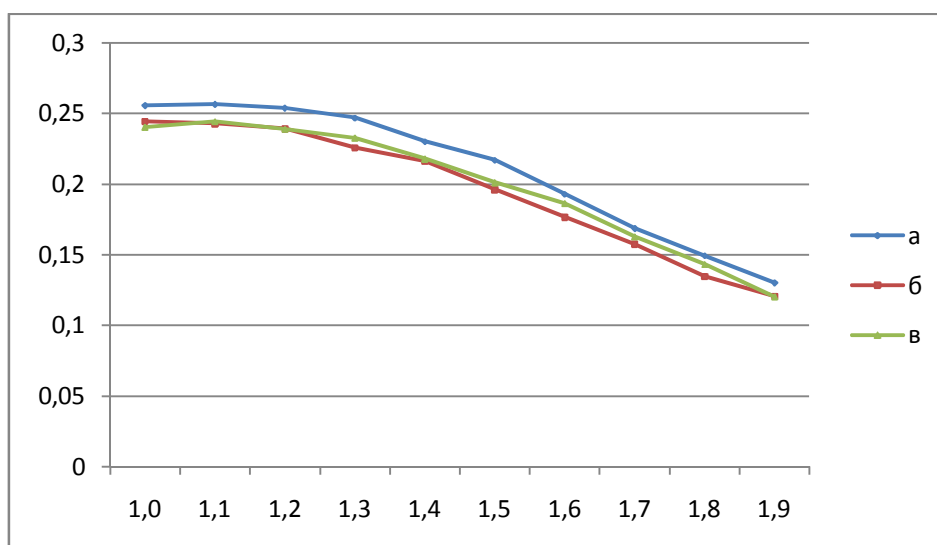


Рис. 6. Мультифрактальные спектры для изображений препаратов здоровой печени. Мера ячейки определяется с использованием лапласиана

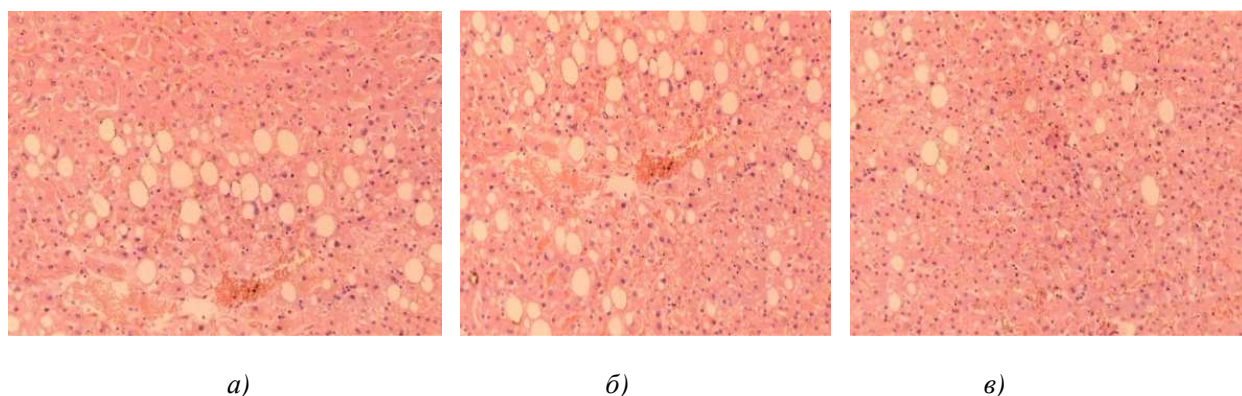


Рис. 7. Препараты печени с жировой дистрофией:
а — первое изображение; б — второе изображение; в — третье изображение

Ниже приведены таблицы и графики (табл. 5, 6; рис. 8, 9) значений мультифрактальных спектров (для $\alpha = 1.э.2$) для изображений клеток печени, поражённых жировой дистрофией, для двух способов определения меры ячейки.

$$\mu(B(x, r)) = \sum_{y \in B(x, r)} I(y)$$

Таблица 5

α/t	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
а)	0.279	1.215	0.920	1.232	1.653	1.172	1.972	1.034	0.633	0.524
б)	0.163	0.893	0.892	1.231	1.666	1.184	1.980	1.060	0.614	0
в)	0.279	1.158	0.774	1.245	1.661	1.199	1.971	1.075	0.826	0

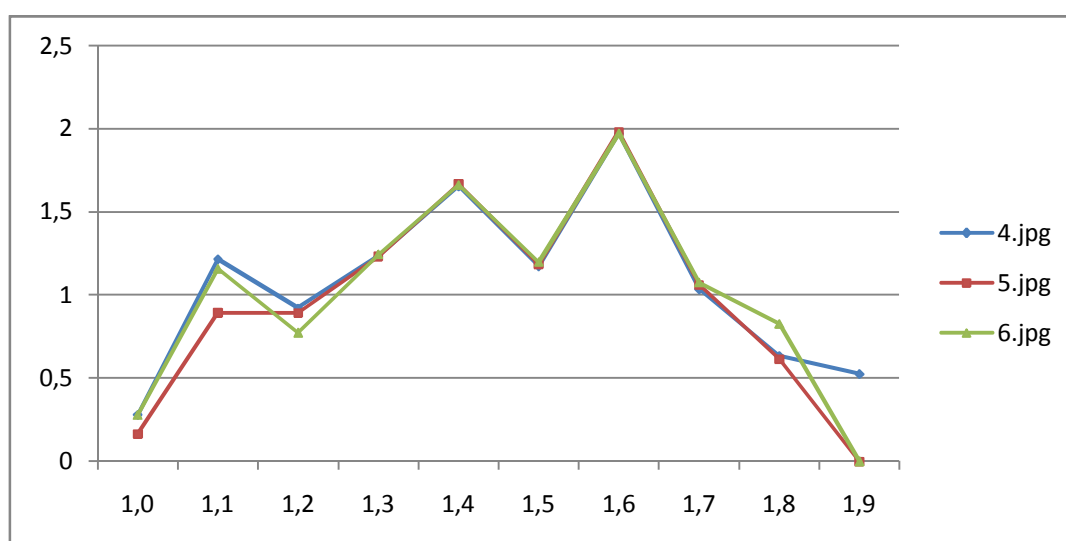


Рис. 8. Мультифрактальные спектры для изображений препаратов печени с жировой дистрофией. Мера ячейки определяется как сумма интенсивности пикселей

$$\mu(B(x, r)) = \sum_{y \in B(x, r)} L(y).$$

Таблица 6

α/t	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
а)	0.23	0.23	0.22	0.22	0.21	0.20	0.18	0.16	0.14	0.12
б)	0.25	0.25	0.25	0.24	0.23	0.21	0.19	0.17	0.15	0.13
в)	0.24	0.24	0.23	0.235	0.220	0.207	0.187	0.170	0.152	0.136

Метод прямого вычисления мультифрактального спектра недостаточно хорошо классифицирует изображения препаратов соединительной ткани, если мера ячейки определяется как сумма интенсивности пикселей. Однако использование дополнительной меры ячейки в виде суммы лапласианов пикселей даёт хорошие результаты для тех же изображений: графики мультифрактальных спектров хорошо разделялись. В то же время изображения клеток здоровой и поражённой дистрофией печени не смогли быть классифицированы ни одной из двух рассматриваемых мер. Это позволяет выделять классы препаратов, для которых мультифрактальный спектр не является достаточно надёжным методом анализа.

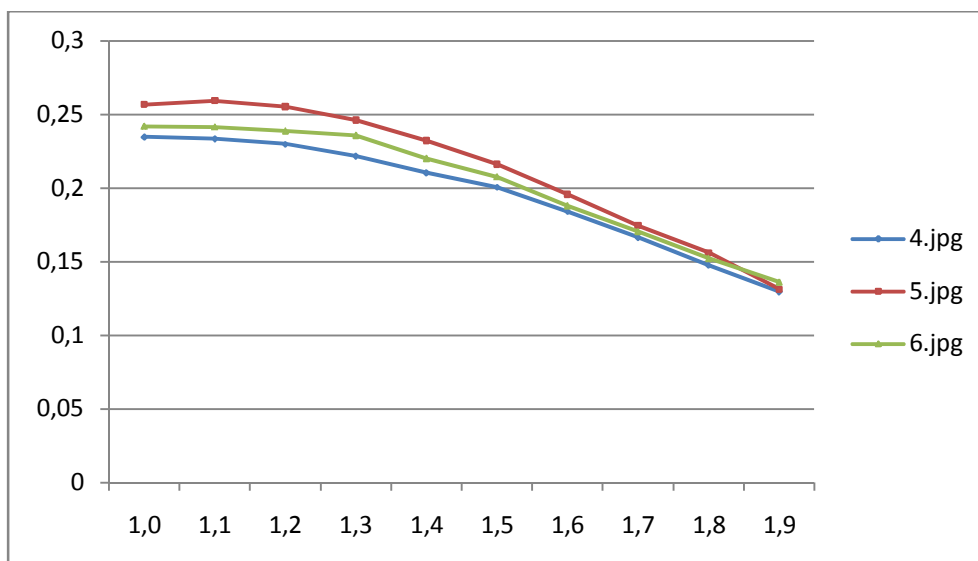


Рис. 9. Мультифрактальные спектры для изображений препаратов печени с жировой дистрофией. Мера ячейки определяется с использованием лапласиана

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005.
2. Ampilova N., Soloviev I., Shupletsov Y. Multifractal spectrum as a classification sign for biomedical preparations images. Proc. 7 Int. Conf. CEMA12, 8–10 Nov. 2012, Athens, Greece. P.98–101.
3. Chhabra Ashvin B., Meneveau Charles, Jensen Roderick V. and Sreenivasan K. R. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularities spectrum and its application to fully developed turbulence // Physical Review A. 1989. 40 (9), 5284–5294.
4. Falconer K. J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons, New-York, 1990.
5. Halsey T., Jensen M. Fractal measures and their singularities. Physical Review A. 1986. 33, 1141–1151.
6. Yong Xu, Hui Ji, Cornelia Fermuller. Viewpoint Invariant Texture Description Using Fractal Analysis. International Journal of Computer Vision, 2009. No.83. P. 85–100.

REFERENCES

1. Gonsales R., Vuds R. Cifrovaja obrabotka izobrazhenij. M.: Tehnosfera, 2005
2. Ampilova N., Soloviev I., Shupletsov Y. Multifractal spectrum as a classification sign for biomedical preparations images. Proc. 7 Int. Conf. CEMA12, 8–10 Nov. 2012, Athens, Greece. P. 98–101.
3. Chhabra Ashvin B., Meneveau Charles, Jensen Roderick V. and Sreenivasan K. R. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularities spectrum and its application to fully developed turbulence // Physical Review A. 1989. 40 (9), 5284–5294.
4. Falconer K. J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons, New-York, 1990.
5. Halsey T., Jensen M. Fractal measures and their singularities. Physical Review A. 1986. 33, 1141–1151.
6. Yong Xu, Hui Ji, Cornelia Fermuller. Viewpoint Invariant Texture Description Using Fractal Analysis. International Journal of Computer Vision, 2009. No.83. P. 85–100.