УДК 517.913

П. П. Аврашков

СТРУКТУРА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ОБЛАДАЮЩИХ ПЕРВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Для ОДУ высших порядков, разрешённых относительно высшей производной, решена обратная задача существования первых интегралов, полиномиально зависящих от предстаршей производной. Установлена структура таких уравнений, а разработанный для них алгоритм поиска первых интегралов проиллюстрирован примерами уравнений второго, третьего и пятого порядков.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, первые интегралы.

P. Avrashkov

ABOUT THE STRUCTURE OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE HIGHEST ORDERS POSSESSING THE FIRST INTEGRALS OF POLYNOMIAL STRUCTURE

For the ODE of the highest order resolved in relation to the highest derivative the inverse problem of the first integrals polynomially depending on $y^{(n-1)}$ has been solved. The structure of such equations has been identified, and the algorithm of search of the first integrals has been illustrated with examples of the equations of the second, third and fifth orders.

Keywords: ordinary differential equations, first integrals.

Для дифференциального уравнения n-го порядка вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

(где $n > 1$) рассматривается обратная задача существования первого интеграла $P \equiv P(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, имеющего вид полинома степени m по $y^{(n-1)}$:

$$P(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = \sum_{k=0}^{m} p_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})(y^{(n-1)})^k . \tag{2}$$

Из определения первого интеграла следует, что для него выполняется тождество

$$\mathrm{D}_x[P] \equiv M\cdot(y^{(n)} - f), \tag{3}$$

где $\mathrm{D}_x[\ldots]$ — оператор полного дифференцирования, а $M \equiv M(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})$ — некоторый интегрирующий множитель. Вычисляя левую часть тождества (3), после приведения подобных получим

$$\mathrm{D}_x[P] = \sum_{k=0}^{m+1} a_k z^k + \left[\sum_{k=1}^{m} b_k z^{k-1}\right] y^{(n)}, \tag{4}$$

где $z = y^{(n-1)}$; $b_k = k\cdot p_k$; $a_0 = (p_0)_x + (p_0)_y y' + \ldots + (p_0)_{y^{(n-3)}}\, y^{(n-2)}$;

$a_k = (p_k)_x + (p_k)_y y' + \ldots + (p_k)_{y^{(n-3)}}\, y^{(n-2)} + (p_{k-1})_{y^{(n-2)}}$ для $k = 1,\ldots, m$;

$a_{m+1} = (p_m)_{y^{(n-2)}}$ (при $n \ge 3$);

при $n = 2$

$a_0 = (p_0)_x$, $a_{m+1} = (p_m)_y$,

$a_k = (p_k)_x + (p_{k-1})_y$ для $k = 1, \ldots, m.$

Подставляя (4) в (3) и расщепляя по степеням независимой переменной $y^{(n)}$, получим систему

$$M = \sum_{k=1}^{m} b_k z^{k-1}, \qquad -f\cdot M = \sum_{k=0}^{m+1} a_k z^k, \tag{5}$$

из которой сразу находим, что $f = -\dfrac{\sum_{k=0}^{m+1} a_k z^k}{\sum_{k=1}^{m} b_k z^{k-1}}$, то есть функция f является рациональной (по $z = y^{(n-1)}$) функцией, причём её целая часть есть полином степени не выше 2-й, а знаменатель является производной от первого интеграла P по $z = y^{(n-1)}$:

$$f \equiv f_2 z^2 + f_1 z + f_0 + \frac{g(x, y, y',\ldots, y^{(n-2)})}{p_1 + 2p_2 z + \ldots + m\cdot p_m z^{m-1}}, \tag{6}$$

где $f_i = f_i(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})$, $i = 0, 1, 2$.

Из системы (5) также следует, что

$$\sum_{k=0}^{m+1} a_k z^k + \left[\sum_{k=1}^{m} b_k z^{k-1}\right] f = 0. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (7) и расщепляя по степеням независимой переменной z, получим систему из $m + 2$ уравнений (при $m = 1$ в системе (8) остаются первое и два последних уравнения):

$$
\begin{aligned}
&a_0 + g + b_1 f_0 = 0, && a_1 + b_1 f_1 + b_2 f_0 = 0,\\
&a_k + b_{k-1} f_2 + b_k f_1 + b_{k+1} f_0 = 0 \quad \text{для} && k = 2, \dots, m-1,\\
&a_m + b_{m-1} f_2 + b_m f_1 = 0, && a_{m+1} + b_m f_2 = 0,
\end{aligned} \tag{8}
$$

совместность которой является необходимым и достаточным условием существования первого интеграла (2).

Таким образом, доказана

Теорема: ОДУ n-го порядка вида (1) обладает первым интегралом (2), полиномиально зависящим от $y^{(n-1)}$, если и только если правая часть уравнения (1) является рациональной по $y^{(n-1)}$ функцией вида (6), причём функции f_0, f_1, f_2, g, p_0, p_1, …, p_m удовлетворяют системе (8), при $n \geq 3$ принимающей вид

$$
\begin{aligned}
&(p_0)_x + (p_0)_y y' + \dots + (p_0)_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + g + p_1 f_0 = 0,\\
&(p_1)_x + (p_1)_y y' + \dots + (p_1)_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + (p_0)_{y^{(n-2)}} + p_1 f_1 + 2p_2 f_0 = 0,\\
&(p_k)_x + (p_k)_y y' + \dots + (p_k)_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + (p_{k-1})_{y^{(n-2)}} +\\
&+ (k-1)p_{k-1} f_2 + k p_k f_1 + (k+1)p_{k+1} f_0 = 0 \quad \text{для} \quad k = 2,\dots, m-1,\\
&(p_m)_x + (p_m)_y y' + \dots + (p_m)_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + (p_{m-1})_{y^{(n-2)}} + (m-1)p_{m-1} f_2 + m\cdot p_m f_1 = 0,\\
&(p_m)_{y^{(n-2)}} + m\cdot p_m f_2 = 0,
\end{aligned} \tag{9a}
$$

а при $n = 2$ имеющей вид

$$
\begin{aligned}
&(p_0)_x + g + p_1 f_0 = 0, && (p_1)_x + (p_0)_y + p_1 f_1 + 2p_2 f_0 = 0,\\
&(p_k)_x + (p_{k-1})_y + (k-1)p_{k-1} f_2 + k p_k f_1 + (k+1)p_{k+1} f_0 = 0 \quad \text{для} && k = 2,\dots, m-1,\\
&(p_m)_x + (p_{m-1})_y + (m-1)p_{m-1} f_2 + m\cdot p_m f_1 = 0, && (p_m)_y + m\cdot p_m f_2 = 0.
\end{aligned} \tag{9b}
$$

Из теоремы очевидно, что при решении именно обратной задачи — поиска уравнения по заданному первому интегралу — имеем четыре искомых функции — f_0, f_1, f_2 и g, причём при $m = 1$ можно считать $g \equiv 0$. Поэтому при $m = 1$ и $m = 2$ число уравнений совпадает с числом искомых функций, а соответствующие системы могут быть решены в явном виде.

При $m > 2$ число уравнений в системе (8), равное (как указано выше) $m + 2$, становится больше четырёх — числа искомых функций в обратной задаче. Это делает систему (8) (и соответствующие ей системы (9a) или (9b) — в зависимости от n) переопределённой и в общем случае неразрешимой. Если же первый интеграл задан частично (например, задана его степень и два старших коэффициента p_m и p_{m-1}), то число искомых функций увеличивается (в указанном примере — на $m - 1$) и может сравняться с числом уравнений или даже превысить его (как в указанном примере). Однако в обоих случаях полное решение получающейся системы уравнений в частных производных может вызвать серьёзные технические трудности.

При $m = 1$ получаем два следствия.

Следствие 1. При $n \geq 3$ ОДУ n-го порядка вида (1) обладает линейным по $y^{(n-1)}$ первым интегралом

$$P(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = Q(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}) + R(x, y, y', \dots, y^{(n-2)})y^{(n-1)},$$

если и только если правая часть уравнения (1) является полиномом по $y^{(n-1)}$ не выше 2-й степени вида

$$f \equiv -\frac{R_{y^{(n-2)}}}{R}(y^{(n-1)})^2 - \frac{Q_{y^{(n-2)}} + R_x + R_y y' + \ldots + R_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)}}{R} y^{(n-1)} - \\ - \frac{Q_x + Q_y y' + \ldots + Q_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)}}{R}. \qquad (10)$$

(Частный случай этого результата, соответствующий $n = 3$, получен в работе [1].)

Следствие 2. ОДУ 2-го порядка вида $y'' = f(x, y, y')$ обладает линейным по y' первым интегралом

$$P(x, y, y') = Q(x, y) + R(x, y)y',$$

если и только если правая часть уравнения является полиномом по y' не выше 2-й степени вида

$$f \equiv -\frac{R_y}{R} y'^2 - \frac{Q_y + R_x}{R} y' - \frac{Q_x}{R}. \qquad (11)$$

Доказательство. При $m = 1$ и $n = 2$ система (9b) состоит из трёх уравнений:

$$Q_x + Rf_0 = 0, \qquad R_x + Q_y + Rf_1 = 0, \qquad R_y + Rf_2 = 0,$$

очевидное решение которых приводит к формуле (11).

При $m = 2$ также получаем два следствия, доказываемых аналогично.

Следствие 3. При $n \geq 3$ ОДУ n-го порядка вида (1) обладает квадратичным по $y^{(n-1)}$ первым интегралом

$$P(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = Q(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}) + R(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})y^{(n-1)} + \\ + S(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})(y^{(n-1)})^2,$$

если и только если правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f \equiv f_2(y^{(n-1)})^2 + f_1 y^{(n-1)} + f_0 + \frac{g}{R + 2Sy^{(n-1)}},$$

где $f_2 \equiv -\frac{S_{y^{(n-2)}}}{2S}$, $\qquad f_1 \equiv \frac{S_{y^{(n-2)}} R}{4S^2} - \frac{R_{y^{(n-2)}} + S_x + S_y y' + \ldots + S_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)}}{2S}$,

$$f_0 \equiv -\frac{S_{y^{(n-2)}} R^2}{8S^3} + \frac{(R_{y^{(n-2)}} + S_x + S_y y' + \ldots + S_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)})R}{4S^2} - \\ - \frac{Q_{y^{(n-2)}} + R_x + R_y y' + \ldots + R_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)}}{2S},$$

$$g \equiv -(Q_x + Q_y y' + \ldots + Q_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)}) + (Q_{y^{(n-2)}} + R_x + R_y y' + \ldots + R_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)})\frac{R}{2S} -$$

$$-(R_{y^{(n-2)}} + S_x + S_y y' + \ldots + S_{y^{(n-3)}} y^{(n-2)})\left(\frac{R}{2S}\right)^2 + S_{y^{(n-2)}}\left(\frac{R}{2S}\right)^3.$$

Следствие 4. ОДУ 2-го порядка вида $y'' = f(x, y, y')$ обладает квадратичным по y' первым интегралом $P(x, y, y') = Q(x, y) + R(x, y)y' + S(x, y)y'^2$, если и только если правая часть уравнения имеет вид

$$f \equiv f_2 y'^2 + f_1 y' + f_0 + \frac{g}{R + 2Sy'},$$

где $f_2 \equiv -\dfrac{S_y}{2S}$, $f_1 \equiv \dfrac{S_y R}{4S^2} - \dfrac{R_y + S_x}{2S}$, $f_0 \equiv -\dfrac{S_y R^2}{8S^3} + \dfrac{(R_y + S_x)R}{4S^2} - \dfrac{Q_y + R_x}{2S}$,

$$g \equiv -Q_x + (Q_y + R_x)\frac{R}{2S} - (R_y + S_x)\left(\frac{R}{2S}\right)^2 + S_y\left(\frac{R}{2S}\right)^3.$$

Замечание 1. Очевидно, что если ОДУ (1) обладает линейным по $y^{(n-1)}$ первым интегралом, то оно обладает первым интегралом любой степени от $y^{(n-1)}$; если же ОДУ (1) обладает квадратичным по $y^{(n-1)}$ первым интегралом, то оно обладает первым интегралом любой чётной степени от $y^{(n-1)}$.

Полученные результаты решения обратной задачи позволяют решать и прямую задачу — находить первые интегралы полиномиальной структуры по предстаршей производной $y^{(n-1)}$ заданного уравнения вида (1).

Пример 1. Для уравнения 2-го порядка

$$y'' = ay^{-7/5}, \tag{12}$$

правая часть которого имеет вид (6) с $g(x, y) \equiv 0$ (так что степень m полинома по y' не задана), $f_2(x, y) = f_1(x, y) \equiv 0$ и $f_0(x, y) \equiv ay^k$, найдём первые интегралы вида (2) при $m = 6$. В соответствии с теоремой воспользуемся системой (9b) из восьми уравнений, принимающих вид

$(p_0)_x + p_1 a y^{-7/5} = 0,$ $\quad$ $(p_1)_x + (p_0)_y + 2p_2 a y^{-7/5} = 0,$
$(p_2)_x + (p_1)_y + 3p_3 a y^{-7/5} = 0,$ $\quad$ $(p_3)_x + (p_2)_y + 4p_4 a y^{-7/5} = 0,$
$(p_4)_x + (p_3)_y + 5p_5 a y^{-7/5} = 0,$ $\quad$ $(p_5)_x + (p_4)_y + 6p_6 a y^{-7/5} = 0,$
$(p_6)_x + (p_5)_y = 0,$ $\quad$ $(p_6)_y = 0.$

Этой системе удовлетворяют функции

$p_0 = 800[5a^3(C_1x^2 + 2C_2x + 2C_3)/64 + a^2(C_1y^2/9 + C_4/32)y^{2/5} + aC_5y^{4/5}/160]y^{-6/5} + C_6,$
$p_1 = -125a^2(C_1x + C_2)y^{1/5},$
$p_2 = 75a^2(C_1x^2 + 2C_2x)y^{-4/5}/2 + 55C_1y^{-8/5}/6 + 75a^2C_3y^{-4/5} + 10aC_4y^{-2/5} + C_5,$
$p_3 = -50a(C_1x + C_2)y^{3/5}/3,$

$p_4 = 15a(C_1x^2 + 2C_2x + 2C_3)y^{-2/5}/2 + (C_1y^2 + 2C_4)/2, \qquad p_5 = -(C_1x + C_2)y,$
$p_6 = (C_1x^2 + 2C_2x + 2C_3)/2,$

порождающие для уравнения (12) три первых интеграла 6-й степени по y':

P_1: $9x^2y'^6 - 18xyy'^5 + 9(15ax^2y^{-2/5} + y^2)y'^4 - 300axy^{3/5}y'^3 +$
$+ 15a(45ax^2y^{-4/5} + 11y^{8/5})y'^2 - 2250a^2xy^{1/5}y' + 25a^2(45ax^2y^{-6/5} + 64y^{6/5}) = C,$
P_2: $3xy'^6 - 3yy'^5 + 45axy^{-2/5}y'^4 - 50ay^{3/5}y'^3 + 225a^2xy^{-4/5}y'^2 -$
$- 375a^2y^{1/5}y' + 375a^3xy^{-6/5} = C,$
P_3: $(y^{2/5}y'^2 + 5a)^3y^{-6/5} = C,$

и по одному первому интегралу 4-й и 2-й степеней:

P_4: $(y^{2/5}y'^2 + 5a)^2y^{-4/5} = C, \qquad P_5$: $y'^2 + 5ay^{-2/5} = C$

(P_5 — в полном соответствии с примером 1а). При этом независимых первых интегралов будет заведомо только два (в качестве таковых можно выделить P_2 и P_5), причём $P_3 = (P_5)^3$, $P_4 = (P_5)^2$, а зависимость P_1 от P_2 и P_5 сложнее: $P_1 = [200000a^5 + (P_2)^2]/(P_5)^3$. Независимые первые интегралы P_2 и P_5 позволяют выписать все решения уравнения (12) без квадратур в виде

$$(C_2 - 3C_1{}^3x)^2 = (C_1 - 5ay^{-2/5})(3C_1{}^2y + 20aC_1y^{3/5} + 200a^2y^{1/5})^2.$$

П р и м е р 2. Применим полученные результаты к уравнению 3-го порядка

$$y''' = ay^by'^cy'',$$

правая часть которого имеет структуру (6) с $g(x, y) \equiv 0$ (так что степень m полинома по y' не задана), $f_2(x, y) = f_0(x, y) \equiv 0$ и $f_1(x, y) \equiv ay^by'^c$. Выберем $m = 1$, тогда (по следствию 1) система уравнений для первого интеграла

$$P(x, y, y', y'') = Q(x, y, y') + R(x, y, y')y''$$

имеет вид $\quad -R_{y'}/R = 0, \quad -(Q_{y'} + R_x + R_yy')/R = ay^by'^c, \quad -(Q_x + Q_yy')/R = 0$, откуда

$$R = r(x, y), \qquad Q_{y'} + r_x + r_yy' = -ay^by'^cr, \qquad Q_x + Q_yy' = 0. \tag{13}$$

Совместность системы (13) зависит от значений b и c.

1) При $c(c^2 - 1)(c + 2) \neq 0$ система (13) совместна только при $b(b + 1) = 0$.

1а) Если $b = -1$, то решением системы (13) будут функции $R = C_1y$ и $Q = C_2 - C_1y'^2/2 - aC_1y'^{c+1}/(c + 1)$, дающие единственный (линейный по y'') первый интеграл $2(c + 1)yy'' - 2ay'^{c+1} - (c + 1)y'^2 = C$ для уравнения $y''' = ay^{-1}y'^cy''$.

1б) Если $b = 0$, то решением системы (13) будут функции $R = C_1$ и $Q = C_2 - aC_1y'^{c+1}/(c + 1)$, дающие единственный (линейный по y'') первый интеграл

$$(c + 1)y'' - ay'^{c+1} = C \tag{14}$$

для уравнения $y''' = ay'^cy''$.

2) При $c = -2$ система (13) совместна только при $b(b^2 - 1) = 0$.

2а) Если $b = -1$, то решением системы (13) будут функции $R = C_1y$ и $Q = C_2 - C_1y'^2/2 + aC_1/y'$, соответствующие случаю 1а.

2б) Если $b = 0$, то решением системы (13) будут функции $R = C_1y + C_0$ и $Q = C_2 - aC_1x + a(C_1y + C_0)/y' - C_1y'^2/2$, дающие для уравнения $y''' = ay''/y'^2$ два (линейных по y'') первых интеграла: P_1: $y'' + a/y' = C$ и P_2: $2yy'' - 2ax + 2ay/y' - y'^2 = C$ (P_1 соответствует формуле (14)).

2в) Если $b = 1$, то решением системы (13) будут функции $R = C_0 \neq 0$ и $Q = C_2 - aC_0x + aC_0/y'$, дающие для уравнения $y''' = ayy''/y'^2$ один (линейный по y'') первый интеграл $y'' - ax + ay/y' = C$.

3) При $c = -1$ система (13) совместна только при $b(b + 1) = 0$.

3а) Если $b = -1$, то решением системы (13) будут функции $R = C_1y$ и $Q = C_2 - C_1y'^2/2 - aC_1\ln y'$, дающие для уравнения $y''' = ay^{-1}y'^{-1}y''$ один (линейный по y'') первый интеграл $2yy'' - y'^2 - 2a\ln y = C$.

3б) Если $b = 0$, то решением системы (13) будут функции $R = C_1$ и $Q = C_2 - aC_1\ln y'$, дающие для уравнения $y''' = ay''/y'$ один (линейный по y'') первый интеграл: $y'' - a\ln y' = C$.

4) При $c = 0$ система (13) совместна только при $b(b + 1) = 0$.

4а) Если $b = -1$, то решением системы (13) будут функции $R = C_1y$ и $Q = C_2 - C_1y'^2/2 - aC_1y'$, соответствующие случаю 1а.

4б) Если $b = 0$, то решением системы (13) будут функции $R = C_1 + C_2e^{-ax} + C_3x$ и $Q = C_4 + aC_3y - C_3(ax + 1)y' - aC_1y'$, дающие для уравнения $y''' = ay''$ три (линейных по y'') первых интеграла: P_1: $y'' - ay' = C$, P_2: $e^{-ax}y'' = C$ и P_3: $xy'' - (ax + 1)y' + ay = C$ (P_1 соответствует формуле (14)), что, впрочем, малоинтересно, так как соответствует линейному ОДУ с постоянными коэффициентами.

5) При $c = 1$ системе (13) удовлетворяют функции $R = \varepsilon^{-1}(C_1 + C_2\int\varepsilon dy)$ и $Q = C_3 - C_2y'^2/2$, где $\varepsilon = \varepsilon(y) \equiv \exp(a\int y^b dy)$.

Это даёт для уравнения $y''' = ay^by'y''$ два (линейных по y'') первых интеграла: P_1: $y''/\varepsilon = C$ и P_2: $2(\varepsilon^{-1}\int\varepsilon dy)y'' - y'^2 = C$.

5а) Если, в частности, $b = -1$, то $\varepsilon(y) \equiv y^a$, поэтому при $b = -1$ и $a \neq -3$ для уравнения $y''' = ay'y''/y$ имеем два (линейных по y'') первых интеграла: P_1: $y^{-a}y'' = C$ и P_2: $2(y^{-a}\int y^a dy)y'' - y'^2 = C$.

5б) Если $b = -1$ и $a = -3$, то решением системы (13) будут функции $R = (C_1y^2 - C_2 + C_3x + C_4x^2)y$ и $Q = C_0 + C_1y^2 - (2C_4x + C_3)yy' - (C_2 - C_3x - C_4x^2)y'^2$, дающие для уравнения $y''' = -3y'y''/y$ четыре (линейных по y'') первых интеграла: P_1: $y^3y'' = C$, P_2: $yy'' + y'^2 = C$, P_3: $xyy'' - yy' + xy'^2 = C$ и P_4: $x^2yy'' + + y^2 - 2xyy' + x^2y'^2 = C$ (P_1 и P_2 соответствуют случаю 5а). Независимыми из них, естественно, будут только три (в качестве таковых можно взять первые три, ибо $P_4 = (P_3{}^2 + P_1)/P_2$). Независимые первые интегралы P_1, P_2 и P_3 позволяют выписать общее решение уравнения $y''' = -3y'y''/y$ без квадратур в виде $(C_2x - C_3)^2 = C_2y^2 - C_1$.

П р и м е р 3. Применим полученные результаты к уравнению 5-го порядка

$$y^{(5)} = ax^by^cy'^dy'',$$

правая часть которого имеет структуру (6) с $g(x, y, y', y'', y''') \equiv 0$ (так что степень m полинома по $y^{(4)}$ не задана), $f_2(x, y, y', y'', y''') = f_0(x, y, y', y'', y''') \equiv 0$ и $f_1(x, y, y', y'', y''') \equiv ax^by^cy'^dy''$.

Выберем $m = 1$, тогда (по формуле (10)) система уравнений для первого интеграла $P = Q(x, y, y', y'', y''') + R(x, y, y', y'', y''')y^{(4)}$ состоит из трёх уравнений

$$-R_{y'''}/R = 0, \qquad -(Q_{y'''} + R_x + R_y y' + R_{y'} y'' + R_{y''} y''')/R = 0,$$
$$-(Q_x + Q_y y' + Q_{y'} y'' + Q_{y''} y''')/R = ax^b y^c y'^d y'',$$

откуда

$$R = R(x, y, y', y'') \not\equiv 0, \qquad Q_{y'''} = -(R_x + R_y y' + R_{y'} y'' + R_{y''} y'''),$$
$$Q_x + Q_y y' + Q_{y'} y'' + Q_{y''} y''' = -ax^b y^c y'^d y'' R. \tag{15}$$

Второе уравнение системы (15) даёт структуру функции Q в виде

$$Q = q(x, y, y', y'') - (R_x + R_y y' + R_{y'} y'')y''' - R_{y''} y'''^2/2. \tag{16}$$

Подставив (16) в третье уравнение системы (15), получим:

$$q_x + q_y y' + q_{y'} y'' - [R_{xx} + R_{xy} y' + R_{xy'} y'' + (R_{xy} + R_{yy} y' + R_{yy'} y'')y' +$$
$$+ (R_{xy'} + R_{yy'} y' + R_y + R_{y'y'} y'')y'' - q_{y''}]y''' -$$
$$- [R_{y'} + 3(R_{xy''} + R_{yy''} y' + R_{y'y''} y'')/2]y'''^2 - R_{y''y''} y'''^3/2 = -ax^b y^c y'^d y'' R.$$

Так как правая часть этого уравнения не зависит от y''', то оно расщепляется по степеням y''' в систему уравнений

$$q_x + q_y y' + q_{y'} y'' = -ax^b y^c y'^d y'' R,$$
$$q_{y''} - (R_{xx} + R_{xy} y' + R_{xy'} y'') - (R_{xy} + R_{yy} y' + R_{yy'} y'')y' - (R_{xy'} + R_{yy'} y' + R_y + R_{y'y'} y'')y'' = 0, \tag{17}$$
$$3(R_{xy''} + R_{yy''} y' + R_{y'y''} y'') + 2R_{y'} = 0, \qquad R_{y''y''} = 0,$$

последнее из которых даёт

$$R = r_1(x, y, y')y'' + r_0(x, y, y'). \tag{18}$$

Подставив (18) в третье уравнение системы (17), получим

$$5(r_1)_{y'} y'' + 3[(r_1)_x + (r_1)_y y'] + 2(r_0)_{y'} = 0.$$

Расщепляя это уравнение по степеням y'' и решая получающуюся систему, найдём, что $r_1 = \rho_1(x, y)$, $r_0 = \rho_2(x, y) - 3(\rho_1)_x y'/2 - 3(\rho_1)_y y'^2/4$. Тогда формула (18) приводит функцию R к виду

$$R = \rho_1(x, y)y'' + \rho_2(x, y) - 3(\rho_1)_x y'/2 - 3(\rho_1)_y y'^2/4. \tag{19}$$

Подставив (19) во второе уравнение системы (17) и проинтегрировав (по y''), найдём функцию q в виде

$$q(x, y, y', y'') = q_0(x, y, y') + q_1(x, y, y')y'' + q_2(x, y, y')y''^2 + q_3(x, y, y')y''^3, \tag{20}$$

где $q_1(x, y, y') = \{4(\rho_2)_{xx} + [8(\rho_2)_{xy} - 6(\rho_1)_{xxx}]y' +$
$+ [4(\rho_2)_{yy} - 15(\rho_1)_{xxy}]y'^2 - 12(\rho_1)_{xyy}y'^3 - 3(\rho_1)_{yyy}y'^4\}/4,$
$q_2(x, y, y') = [4(\rho_2)_y - 8(\rho_1)_{xx} - 22(\rho_1)_{xy}y' - 11(\rho_1)_{yy}y'^2]/8,$
$q_3(x, y, y') = -(\rho_1)_y/6.$

Подставив теперь выражения (18) и (20) в первое уравнение системы (17), получим:

$$\begin{gathered}(q_0)_x + (q_0)_y y' + [(q_0)_{y'} + (q_1)_x + (q_1)_y y']y'' + [(q_1)_{y'} + (q_2)_x + (q_2)_y y']y''^2 + \\ + [(q_2)_{y'} + (q_3)_x + (q_3)_y y']y''^3 + (q_3)_{y'}y''^4 = -ax^b y^c y'^d y''(r_1 y'' + r_0).\end{gathered} \tag{21}$$

Очевидно, что для выполнения равенства (21) необходимо, чтобы

$$(q_3)_{y'} = 0 \qquad \text{и} \qquad (q_2)_{y'} + (q_3)_x + (q_3)_y y' = 0.$$

Первое из этих уравнений (в силу определения q_3) равносильно уравнению $(\rho_1)_{yy'} = 0$ и выполняется тождественно в силу определения ρ_1. Второе уравнение (в силу определений ρ_1, q_2 и q_3) можно переписать в виде $(\rho_2)_{yy'}/2 - 35[(\rho_1)_{xy} + (\rho_1)_{yy}y']/12 = 0$, или, в силу определения ρ_2,

$$(\rho_1)_{xy} + (\rho_1)_{yy}y' = 0,$$

откуда следует, что

$$\rho_1(x, y) = C_1 y + \rho(x). \tag{22}$$

Этот результат упрощает функции q_1, q_2, q_3 и r_0 до

$$\begin{gathered}q_1 = (\rho_2)_{xx} + [2(\rho_2)_{xy} - 3\rho'''/2]y' + (\rho_2)_{yy}y'^2, \qquad q_2 = (\rho_2)_y/2 - \rho'', \\ q_3 = -C_1/6, \qquad r_0 = \rho_2(x, y) - 3\rho' y'/2 - 3C_1 y'^2/4\end{gathered} \tag{23}$$

и приводит равенство (21) к виду

$$\begin{gathered}(q_0)_x + (q_0)_y y' + \{(q_0)_{y'} + (\rho_2)_{xxx} + 3[(\rho_2)_{xxy} - \rho^{(4)}/2]y' + 3(\rho_2)_{xyy}y'^2 + (\rho_2)_{yyy}y'^3\}y'' + \\ + 5[(\rho_2)_{xy} - \rho''' + (\rho_2)_{yy}y']y''^2/2 = -ax^b y^c y'^d y''[(C_1 y + \rho)y'' + \rho_2 - 3\rho' y'/2 - 3C_1 y'^2/4].\end{gathered}$$

Полученное уравнение расщепляется по степеням y'' в систему уравнений

$$\begin{gathered}5[(\rho_2)_{xy} - \rho''' + (\rho_2)_{yy}y'] = -2ax^b y^c y'^d(C_1 y + \rho), \\ (q_0)_{y'} + (\rho_2)_{xxx} + 3[(\rho_2)_{xxy} - \rho^{(4)}/2]y' + (\rho_2)_{xyy}y'^2 + (\rho_2)_{yyy}y'^3 = \\ = -ax^b y^c y'^d(\rho_2 - 3\rho' y'/2 - 3C_1 y'^2/4), \\ (q_0)_x + (q_0)_y y' = 0.\end{gathered} \tag{24}$$

Расщепление первого уравнения системы (24) зависит от выполнения равенства $d = 1$.

I. Пусть сначала $d = 1$. Тогда первое уравнение системы (24) расщепляется в систему

$$5(\rho_2)_{yy} = -2aC_1 x^b y^{c+1} - 2ax^b y^c \rho, \qquad 5[(\rho_2)_{xy} - \rho'''] = 0, \tag{25}$$

решение которой зависит от b.

I.1. Если $b \neq 0$, то $C_1 = 0$,

$$\rho_1 = \rho(x) \equiv C_2 x^{-b}, \qquad \rho_2 = \sigma(x) + [C_2(b)_2 x^{-b-2} + C_3]y - (2aC_2/5)Y_c$$

(здесь и далее используется символ Похгаммера):

$$(b)_n = b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1), \quad \text{и} \quad Y_c \equiv \int(\int y^c dy)dy);$$

тогда

$$r_1 = \rho_1 \equiv C_2 x^{-b}, \quad r_0 = \sigma(x) + [C_2(b)_2 x^{-b-2} + C_3]y - 2aC_2 Y_c/5 + (3bC_2/2)x^{-b-1}y',$$

так что результат зависит от того, будет ли $c \in \{-2, -1\}$ или нет.

I.1.1. Случаи $c \in \{-2, -1\}$ приводят к противоречию с условием $R \not\equiv 0$.

I.1.2. Пусть теперь $(c+1)(c+2) \neq 0$, тогда

$$r_0 = \rho_2 = \sigma(x) + [C_2(b)_2 x^{-b-2} + C_3]y - 2aC_2 y^{c+2}/[5(c+1)(c+2)],$$

а из второго уравнения системы (24) следует, что

$$q_0 = s(x, y) - [\sigma''' - C_2(b)_5 x^{-b-5} y]y' - [3C_2(b)_4 x^{-b-4} + 2ax^b y^c \rho_2]y'^2/4 - \\ - abC_2 x^{-1} y^c y'^3/2 - acC_2 y^{c-2} y'^4/10.$$

Тогда третье уравнение системы (24) принимает вид

$$s_x + [s_y - \sigma^{(4)} - C_2(b)_6 x^{-b-6} y]y' + \{7C_2(b)_5 x^{-b-5} + 2ax^{b-1}y^c[b\rho_2 + x(\rho_2)_x]\}y'^2/4 + \\ + ay^{c-1}\{x^b[c\rho_2 + y(\rho_2)_y] + bC_2 x^{-2} y\}y'^3/2 - abcC_2 x^{-1} y^{c-1} y'^4/2 - ac(c-1)C_2 y^{c-2} y'^5/5 = 0$$

и расщепляется в систему из шести уравнений:

$$\begin{gathered} ac(c-1)C_2 = 0, \qquad abcC_2 = 0, \qquad ay^{c-1}\{x^b[c\rho_2 + y(\rho_2)_y] + bC_2 x^{-2} y\} = 0, \\ 7C_2(b)_5 x^{-b-5} + 2ax^{b-1}y^c[b\rho_2 + x(\rho_2)_x] = 0, \quad s_y - \sigma^{(4)} - C_2(b)_6 x^{-b-6} y = 0, \quad s_x = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Второе уравнение системы (26) выделяет значения $c = 0$ и $c \neq 0$.

I.1.2.1. Если $c = 0$, то $\rho_2 = \sigma(x) + [C_2(b)_2 x^{-b-2} + C_3]y - aC_2 y^2/5$, а от системы (26) остаются уравнения

$$\begin{gathered} x^b y(\rho_2)_y + bC_2 x^{-2} y = 0, \\ 7C_2(b)_5 x^{-b-5} + 2ax^{b-1}[b\rho_2 + x(\rho_2)_x] = 0, \\ s_y - \sigma^{(4)} - C_2(b)_6 x^{-b-6} y = 0, \qquad s_x = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Подставив в первое уравнение этой системы ρ_2, придём к уравнению

$$C_3 x^b + C_2 b(b+2)x^{-2} - 2aC_2 x^b y/5,$$

из которого следует, что $C_2 = 0$ и $C_3 = 0$. Это приводит к $r_1 = \rho_1 \equiv 0$ и $r_0 = \rho_2 = \sigma(x)$, так что $R = \sigma(x)$, а из второго уравнения системы (27) следует, что $\sigma(x) \equiv C_4x^{-b}$, причём $C_4 \neq 0$. Тогда два последних уравнения дают:

$$s(x, y) \equiv C_5 + C_4\cdot(b)_4x^{-b-4}y \qquad \text{и} \qquad C_4\cdot(b)_5 = 0.$$

Последнее уравнение в развёрнутой записи имеет вид

$$b(b + 1)(b + 2)(b + 3)(b + 4) = 0$$

и (так как $b \neq 0$) даёт нам четыре решения. При этом для каждого из них

$$Q = C_5 + \sigma^{(4)}y - \sigma'''y' - aC_3y'^2/2 + \sigma''y'' - \sigma'y'''.$$

Таким образом, при $c = 0$ имеем четыре уравнения вида $y^{(5)} = ax^by'y''$, обладающих каждое (линейным по $y^{(4)}$) первым интегралом

$$P = C_5 + \sigma^{(4)}y - \sigma'''y' - aC_3y'^2/2 + \sigma''y'' - \sigma'y''' + \sigma y^{(4)},$$

где $\sigma(x) = C_3x^{-b}$, а $b \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

I.1.2.2. Случай $c \neq 0$ опять приводит к противоречию с условием $R \not\equiv 0$.

I.2. Пусть теперь $b = 0$, тогда система (25) имеет вид

$$5(\rho_2)_{yy} = -2aC_1y^{c+1} - 2ay^c\rho, \qquad 5[(\rho_2)_{xy} - \rho'''] = 0,$$

а её решением будут функции

$$\rho(x) \equiv C_2, \qquad \rho_2 = \sigma(x) + C_3y - 2a(C_1Y_{c+1} + C_2Y_c)/5, \tag{28}$$

где, по-прежнему, $Y_c \equiv \int(\int y^c dy)dy$.

Тогда, в соответствии с выражениями (22) и (23), $r_1 = C_1y + C_2$, $r_0 = \rho_2 - 3C_1y'^2/4$, а второе уравнение системы (24) приводит к

$$q_0 = s(x, y) - \sigma'''y' - ay^c\rho_2y'^2/2 + a[(8c + 23)C_1y^c + 8cC_2y^{c-1}]y'^4/80.$$

При этом третье уравнение системы (24) расщепляется в систему:

$$\begin{matrix} [(8c + 23)C_1y + 8(c - 1)C_2]cy^{c-2} = 0, & y^{c-1}[c\rho_2 + y(\rho_2)_y] = 0, & \\ y^c(\rho_2)_x = 0, & s_y - \sigma^{(4)} = 0, & s_x = 0. \end{matrix} \tag{29}$$

Её третье уравнение равносильно уравнению $\sigma' = 0$, поэтому $\sigma(x) = C_4$, так что из равенства (28) получим $\rho_2 = C_4 + C_3y - 2a(C_1Y_{c+1} + C_2Y_c)/5$; при этом из двух последних уравнений получаем, что $s(x, y) \equiv C_5$, а первое уравнение системы (29) выделяет значения $c = 0$ и $c \neq 0$.

I.2.1. Случай $c = 0$ приводит к $R = r_0 = C_4 \neq 0$ и $Q = C_5 - aC_4y'^2/2$.

Таким образом, при $c = 0$ имеем уравнение $y^{(5)} = ay'y''$, обладающее первым интегралом $P = C_5 - aC_4y'^2/2 + C_4y^{(4)}$.

I.2.2. Пусть теперь $c \neq 0$, тогда из первого уравнения системы (29) следует, что $(8c + 23)C_1y + 8(c - 1)C_2 = 0$. Отсюда получаем три возможности: либо $c = -23/8$ и $C_2 = 0$, либо $c = 1$ и $C_1 = 0$, либо $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$.

I.2.2.1. Первые две возможности приводят к противоречию с условием $R \not\equiv 0$.

I.2.2.2. Пусть $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, тогда $\rho(x) \equiv 0$, $\rho_2 = C_4 + C_3y$, а второе уравнение системы (29) принимает вид $c\rho_2 + y(\rho_2)_y = 0$, то есть

$$c\cdot(C_4 + C_3y) + C_3y = 0,$$

откуда следует, что $(c + 1)C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Так как $C_3 \neq 0$ (иначе — опять противоречие с условием $R \not\equiv 0$), то $c = -1$, а $\rho_2 = C_3y$; следовательно, $r_1 = 0$, $r_0 = C_3y$, так что $R = r_0 = C_3y$, а $Q = C_5 - aC_3y'^2/2 + C_3y''^2/2 - C_3y'y'''$.

Таким образом, при $c = -1$ имеем уравнение $y^{(5)} = ay^{-1}y'y''$, обладающее первым интегралом $P = C_5 - C_3(ay'^2/2 - y''^2/2 + y'y''') + C_3yy^{(4)}$.

II. Пусть теперь $d \neq 1$. Тогда первое уравнение системы (24) расщепляется в систему

$$2ax^by^cy'^d(C_1y + \rho) = 0, \qquad 5(\rho_2)_{yy} = 0, \qquad 5[(\rho_2)_{xy} - \rho'''] = 0. \tag{30}$$

Из первого уравнения системы (30) получаем: $C_1 = 0$ и $\rho(x) \equiv 0$, тогда $r_1 = \rho_1 \equiv 0$, $r_0 = \rho_2$, так что $R = \rho_2$, а два последних уравнения системы (30) приводят к

$$\rho_2 = \sigma(x) + C_2y. \tag{31}$$

При этом второе уравнение системы (24) принимает вид

$$(q_0)_{y'} + \sigma''' = -ax^by^c(C_2y + \sigma)y'^d,$$

откуда

$$q_0 = s(x, y) - \sigma'''y' - ax^by^c(C_2y + \sigma)\int y'^d d(y').$$

Тогда третье уравнение системы (24) принимает вид

$$\begin{gathered} s_x + (s_y - \sigma^{(4)})y' - ax^{b-1}y^c(bC_2y + b\sigma + x\sigma')\int y'^d d(y') - \\ - ax^by^{c-1}[(c + 1)C_2y + c\sigma]y'\int y'^d d(y') = 0. \end{gathered} \tag{32}$$

Расщепление этого уравнения (по степеням y') зависит от того, будет $d \in \{-2, -1, 0\}$ или нет.

II.1. Если $d = -2$, то $q_0 = s(x, y) - \sigma'''y' + ax^by^c(C_2y + \sigma)y'^{-1}$, а уравнение (32) расщепляется в систему трёх уравнений:

$$s_x + ax^by^{c-1}[(c + 1)C_2y + c\sigma] = 0, \quad s_y - \sigma^{(4)} = 0, \quad bC_2y + b\sigma + x\sigma' = 0, \tag{33}$$

из третьего уравнения которой находим $\sigma(x) = C_3x^{-b}$, причём если $b = 0$, то $|C_2| + |C_3| \neq 0$ (иначе ρ_2, а за ним и $R \equiv 0$), а если $b \neq 0$, то $C_2 = 0$.

Рассмотрим эти ситуации.

II.1.1. Пусть сначала $b = 0$, тогда, по формуле (31), $\rho_2 = C_2y + C_3$ и от системы (33) остаются уравнения

$$s_x + ay^{c-1}[(c+1)C_2y + cC_3] = 0, \qquad s_y = 0, \tag{34}$$

совместные только в трёх случаях: при $c = -1$, $c = 0$ и $c = 1$.

II.1.1.1. Если $c = -1$, то из системы (34) получим, что $C_3 = 0$, а $s(x, y) \equiv C_4$. При этом $R = C_2y$ $(C_2 \neq 0)$, а $Q = C_4 + aC_2y'^{-1} + C_2y''^2/2 - C_2yy'''$.

Таким образом, при $b = 0$ и $c = -1$ имеем уравнение $y^{(5)} = ay^{-1}y'^{-2}y''$, обладающее первым интегралом $P = C_4 + C_2(ay'^{-1} + y''^2/2 - yy''') + C_2yy^{(4)}$.

II.1.1.2. Если $c = 0$, то из системы (34) получим, что $s(x, y) \equiv C_4 - aC_2x$. При этом $R = C_2y + C_3$, $Q = C_4 - aC_2x + a(C_2y + C_3)y'^{-1} + C_2y''^2/2 - C_2yy'''$, где $|C_2| + |C_3| \neq 0$.

Таким образом, при $b = 0$ и $c = 0$ имеем уравнение $y^{(5)} = ay'^{-2}y''$, обладающее двумя (линейными по $y^{(4)}$) первыми интегралами

$$P_1 = C_4 - ax + ayy'^{-1} + y''^2/2 - yy''' + yy^{(4)}$$

$$\text{и} \qquad P_2 = C_4 + ay'^{-1} + y^{(4)}.$$

II.1.1.3. Если $c = 1$, то из системы (34) получим, что $C_2 = 0$, а $s(x, y) \equiv C_4 - aC_3x$. При этом $R = C_3 \neq 0$, а $Q = C_4 - aC_3x + aC_3yy'^{-1}$.

Таким образом, при $b = 0$ и $c = 1$ имеем уравнение $y^{(5)} = ayy'^{-2}y''$, обладающее первым интегралом $P = C_4 - C_3(ax - ayy'^{-1}) + C_3y^{(4)}$.

II.1.2. Пусть теперь $b \neq 0$, тогда $C_2 = 0$, $\rho_2 = \sigma(x) = C_3x^{-b}$, так что

$$R = \sigma(x) = C_3x^{-b}, \qquad q_0 = s(x, y) - \sigma'''y' + aC_3y^cy'^{-1},$$

а от системы (33) остаются уравнения

$$s_x + acC_3y^{c-1} = 0, \qquad s_y - \sigma^{(4)} = 0. \tag{35}$$

Дифференцируя первое из них по y, а второе — по x, придём к уравнению

$$ac(c-1)C_3y^{c-2} = -\sigma^{(5)}, \tag{36}$$

из которого следует, что система (35) совместна только в трёх случаях: при $c = 0$, $c = 1$ и $c = 2$.

II.1.2.1. Если $c = 0$, то из системы (35) получим, что $s(x, y) \equiv C_4 + \sigma^{(4)}y$, причём $\sigma^{(5)} = 0$, что равносильно условию $-b(b+1)(b+2)(b+3)(b+4) = 0$, дающему нам (так как $b \neq 0$) четыре решения. При этом для каждого из них

$$Q = C_4 + \sigma^{(4)}y - \sigma'''y' + aC_3y'^{-1} + \sigma''y'' - \sigma'y'''.$$

Таким образом, при $c = 0$ имеем четыре уравнения вида $y^{(5)} = ax^b y'^{-2} y''$, обладающих каждое (линейным по $y^{(4)}$) первым интегралом

$$P = C_4 + \sigma^{(4)} y - \sigma''' y' + aC_3 y'^{-1} + \sigma'' y'' - \sigma' y''' + \sigma y^{(4)},$$

где $\sigma(x) = C_3 x^{-b}$, а $b \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

II.1.2.2. Если $c = 1$, то из системы (35) получим, что $s(x, y) \equiv C_4 - aC_3 x + \sigma^{(4)} y$, причём $\sigma^{(5)} = 0$, что опять даёт нам четыре решения. При этом для каждого из них $Q = C_4 - aC_3 x + \sigma^{(4)} y - \sigma''' y' + aC_3 yy'^{-1} + \sigma'' y'' - \sigma' y'''$.

Таким образом, при $c = 1$ имеем четыре уравнения вида $y^{(5)} = ax^b yy'^{-2} y''$, каждое из которых обладает (линейным по $y^{(4)}$) первым интегралом

$$P = C_4 - aC_3 x + \sigma^{(4)} y - \sigma''' y' + aC_3 yy'^{-1} + \sigma'' y'' - \sigma' y''' + \sigma y^{(4)},$$

где $\sigma(x) = C_3 x^{-b}$, а $b \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

II.1.2.3. Если $c = 2$, то из уравнения (36) следует, что $2a = (b)_5$, $b = -5$, так что $a = -60$, $R = \sigma(x) = C_3 x^5$, а из системы (35) получим, что $s(x, y) \equiv C_4 + \sigma^{(4)} y =$ $= C_4 + 120 C_3 xy$.

При этом

$$Q = C_4 + 120 C_3 xy - 60 C_3 x^2 y' - 60 C_3 y^2 y'^{-1} + 20 C_3 x^3 y'' - 5 C_3 x^4 y'''.$$

Таким образом, при $c = 2$ имеем уравнение $y^{(5)} = -60 x^{-5} y^2 y'^{-2} y''$, обладающее (линейным по $y^{(4)}$) первым интегралом

$$P = C_4 + C_3(120 xy - 60 x^2 y' - 60 y^2 y'^{-1} + 20 x^3 y'' - 5 x^4 y''') + C_3 x^5 y^{(4)}.$$

II.2. Если $d = -1$, то $q_0 = s(x, y) - \sigma''' y' - ax^b y^c (C_2 y + \sigma) \ln y'$, а уравнение (32) расщепляется в систему четырёх уравнений:

$$(c + 1) C_2 y + c\sigma = 0, \qquad bC_2 y + b\sigma + x\sigma' = 0, \quad s_y - \sigma^{(4)} = 0, \qquad s_x = 0. \tag{37}$$

Первое из них может выполняться в трёх случаях: либо $C_2 = 0$ и $\sigma(x) \equiv 0$, либо $C_2 = 0$ и $c = 0$, либо $c = -1$ и $\sigma(x) \equiv 0$. Рассмотрим эти возможности.

II.2.1. Случай $C_2 = 0$ и $\sigma(x) \equiv 0$ приводит к противоречию с условием $R \not\equiv 0$.

II.2.2. Если $C_2 = 0$ и $c = 0$, то $\rho_2 \equiv \sigma(x)$, а из второго уравнения системы (37) получаем, что $\sigma(x) = C_3 x^{-b}$, где $C_3 \neq 0$ (иначе ρ_2, а за ним и $R \equiv 0$). При этом два последних уравнения системы (37) дают нам

$$s(x, y) \equiv C_4 + \sigma^{(4)} y \qquad \text{и} \qquad -C_3 \cdot (b)_5 = 0.$$

Последнее уравнение имеет пять решений. При этом для каждого из них

$$Q = C_4 + \sigma^{(4)} y - \sigma''' y' - aC_3 \ln y' + \sigma'' y'' - \sigma' y'''.$$

Таким образом, при $c = 0$ имеем пять уравнений вида $y^{(5)} = ax^b y'^{-1} y''$, обладающих каждое (линейным по $y^{(4)}$) первым интегралом

$$P = C_4 + \sigma^{(4)} y - \sigma''' y' - aC_3 \ln y' + \sigma'' y'' - \sigma' y''' + \sigma y^{(4)},$$

где $\sigma(x) = C_3 x^{-b}$, а $b \in \{-4, -3, -2, -1, 0\}$.

II.2.3. Если $c = -1$ и $\sigma(x) \equiv 0$, то $\rho_2 \equiv C_2 y$, где $C_2 \neq 0$ (иначе ρ_2, а за ним и $R \equiv 0$), а из второго уравнения системы (37) получаем, что $b = 0$; тогда из двух последних уравнений системы (37) получаем, что $s(x, y) \equiv C_3$. При этом

$$R \equiv C_2 y, \qquad \text{а} \qquad Q = C_3 - C_2(a \ln y' - y''^2/2) - C_2 y' y'''.$$

Таким образом, при $c = -1$ приходим к уравнению $y^{(5)} = ay^{-1} y'^{-1} y''$, обладающему первым интегралом $P = C_3 - C_2(a \ln y' - y''^2/2 + y' y''') + C_2 y y^{(4)}$.

II.3. Если $d = 0$, то $q_0 = s(x, y) - [\sigma''' + ax^b y^c (C_2 y + \sigma)] y'$, а уравнение (32) расщепляется в систему трёх уравнений:

$$(c + 1) C_2 y + c\sigma = 0, \qquad s_y - \sigma^{(4)} - ax^{b-1} y^c (bC_2 y + b\sigma + x\sigma') = 0, \qquad s_x = 0. \tag{38}$$

Первое из них может выполняться в трёх случаях: либо $C_2 = 0$ и $\sigma(x) \equiv 0$, либо $C_2 = 0$ и $c = 0$, либо $c = -1$ и $\sigma(x) \equiv 0$. Рассмотрим эти возможности.

II.3.1. Случай $C_2 = 0$ и $\sigma(x) \equiv 0$ приводит к противоречию с условием $R \not\equiv 0$.

II.3.2. Если $C_2 = 0$ и $c = 0$, то $\rho_2 \equiv \sigma(x)$, а два последних уравнения системы (38) принимают вид $s_y - \sigma^{(4)} - ax^{b-1}(b\sigma + x\sigma') = 0$, $s_x = 0$. Отсюда следует, что $s(x, y) \equiv C_3 y + C_4$, а функция $\sigma(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma''' = -ax^b \sigma + C_3 x + C_5. \tag{39}$$

При этом $R = \sigma(x)$, а $Q = C_3 y + C_4 - (C_3 x + C_5) y' + \sigma'' y'' - \sigma' y'''$.

Таким образом, при $c = 0$ получаем уравнение $y^{(5)} = ax^b y''$, обладающее первым интегралом $P = C_4 + C_3 y - (C_3 x + C_5) y' + \sigma'' y'' - \sigma' y''' + \sigma y^{(4)}$, где функция $\sigma(x)$ удовлетворяет уравнению (39).

З а м е ч а н и е 2. Решение уравнения (39) может быть выражено через обобщённые гипергеометрические функции. При $C_3 = C_5 = 0$ (см. также № 3.1.2.7 в литературе [2]).

II.3.3. Если $c = -1$ и $\sigma(x) \equiv 0$, то $R = \rho_2 \equiv C_2 y$, а два последних уравнения системы (38) принимают вид $s_y - abC_2 x^{b-1} = 0$, $s_x = 0$. Так как $aC_2 \neq 0$, то эта система совместна только в двух случаях: при $b = 0$ и при $b = 1$.

II.3.3.1. Если $b = 0$, то $s(x, y) \equiv C_3$, так что

$$Q = C_3 - aC_2 y' + C_2 y''^2/2 - C_2 y' y'''.$$

Таким образом, при $b = 0$ и $c = -1$ получаем уравнение $y^{(5)} = ay^{-1} y''$, обладающее первым интегралом $P = C_3 - aC_2 y' + C_2 y''^2/2 - C_2 y' y''' + C_2 y y^{(4)}$.

II.3.3.2. Если $b = 1$, то $s(x, y) \equiv aC_2 y + C_3$, так что

$$Q = C_3 + aC_2 y - aC_2 x y' + C_2 y''^2/2 - C_2 y' y'''.$$

Таким образом, при $b = 1$ и $c = -1$ получаем уравнение $y^{(5)} = axy^{-1}y''$, обладающее первым интегралом

$$P = C_3 + aC_2y - aC_2xy' + C_2y''^2/2 - C_2y'y''' + C_2yy^{(4)}.$$

II.4. Если $d(d^2 - 1)(d + 2) \neq 0$, то уравнение (32) расщепляется в систему четырёх уравнений:

$$(c + 1)C_2y + c\sigma = 0, \qquad bC_2y + b\sigma + x\sigma' = 0, \qquad s_y - \sigma^{(4)} = 0, \qquad s_x = 0. \tag{40}$$

Так как система (40) совпадает с системой (37), то (как и в **II.2**) получаем два искомых семейства уравнений.

II.4.1. При $c = 0$ имеем пять уравнений вида

$$y^{(5)} = ax^by'^dy'', \tag{41}$$

обладающих каждое (линейным по $y^{(4)}$) первым интегралом

$$P = C_4 + \sigma^{(4)}y - \sigma'''y' - aC_3\int y'^d d(y') + \sigma''y'' - \sigma'y''' + \sigma y^{(4)},$$

где $\sigma(x) = C_3x^{-b}$, а $b \in \{-4, -3, -2, -1, 0\}$.

II.4.2. При $c = -1$ приходим к уравнению

$$y^{(5)} = ay^{-1}y'^dy'', \tag{42}$$

обладающему первым интегралом

$$P = C_3 - C_2(a\int y'^d d(y') - y''^2/2 + y'y''') + C_2yy^{(4)}.$$

З а м е ч а н и е 3. Семейство уравнений (41) и уравнение(42) получены при условии, что $d(d \pm 1)(d + 2) \neq 0$, однако (как видно из рассмотрения пунктов I.1.3.1, I.2.1, I.2.2.3, II.1.1.2 и II.2) можно оставить только ограничение $d \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аврашков П. П.* Структура ОДУ 3-го порядка, обладающих линейным по y'' первым интегралом // Известия ОрёлГТУ. Математика. Механика. Информатика. Орёл: ОрёлГТУ, 2000. № 3. С. 5–7.

2. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

REFERENCES

1. *Avrashkov P. P.* Struktura ODU 3-go porjadka, obladajushchih linejnym po y'' pervym integralom // Izvestija OrjolGTU. Matematika. Mehanika. Informatika. Orjol: OrjolGTU, 2000. № 3. S. 5–7.

2. *Zajtsev V. F., Poljanin A. D.* Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravnenijam. M.: Fizmatlit, 2001. 576 s.