С. А. Варфаламеева, Л. А. Ларченкова

ПОСТРОЕНИЕ ИЕРАРХИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

В статье обсуждается необходимость поиска новых подходов к обучению физике в школе с учетом современных требований к результатам обучения. Обосновывается важность овладения методом математического моделирования, акцент делается на одном из важнейших свойств математических моделей — иерархичности. Предлагается выделение задачи в качестве дидактической единицы. Рассматриваются возможность и необходимость построения иерархии математических моделей при решении задач с использованием фундаментального физического закона — закона сохранения импульса.

Ключевые слова: математическое моделирование, иерархичность, решение задач, закон сохранения импульса.

S. Varfalameeva, L. Larchenkova

CONSTRUCTING MATHEMATICAL MODELS HIERARCHY IN SOLVING PROBLEMS USING THE LAW OF CONSERVATION OF MOMENTUM

The necessity of searching new approaches to teaching physics at school is discussed taking into account modern requirements to learning outcomes. The importance of mastering the mathematical modelling method is proved, the emphasis is placed on the hierarchy as one of the most important properties of mathematical models. Allocating of a problem as a didactic unit is proposed. The possibility and necessity of constructing mathematical models hierarchy in solving problems using the law of conservation of momentum are considered.

Keywords: mathematical modelling, hierarchy, solving problems, the law of conservation of momentum.

Вследствие общности и широты своих законов физика всегда занимала лидирующие позиции в развитии естествознания, являлась основой научно-технического прогресса. Сегодня уровень жизни во многом определяется наукоемкими технологиями, в основе которых лежат достижения современной физики. Дальнейшее развитие науки и техники смогут обеспечить только специалисты с развитым научным стилем мышления, со знанием современных проблем физики. В связи с этим все чаще обсуждается необходимость изучения основных идей современной физики в старших классах средней школы.

Несмотря на то что эта проблема поднимается методистами не один десяток лет (достаточно вспомнить книгу Л. В. Тарасова «Современная физика в средней школе», опубликованную в 1990 году [9]), значительных изменений в содержании школьного курса физики не произошло. В частности, это объясняется многообразием направлений исследований современной науки, их сложностью и, как следствие, невозможностью включения в школьный курс современных достижений физики в явном виде. Тем не менее следует учесть, что одной из приоритетных целей образования является развитие личности обучающегося, которое неразрывно связано с формированием научного мировоззрения, соответствующего современным достижениям науки. В этой связи совершенно очевидно, что необходимо искать другие подходы к обучению физике, не сводимые только к изменению набора изучаемых тем.

Согласно тезису В. А. Фабриканта, «мы... не можем удовлетворительно отразить в школьном курсе физики фактического содержания основ этой науки на сегодняшний день. Но мы можем и должны научить школьника думать по-современному в области физики. Этой реальной цели должен быть подчинен отбор материала для школьного преподавания» (цит. по [3, с. 42]). На наш взгляд, «думать по-современному в области физики» — это значит оперировать методологическими принципами физики как науки. Знание методологических принципов является системообразующим, позволяет овладеть методом научного познания, способствует творческому подходу к решению разного рода задач. В основе методологии физической науки лежит метод математического моделирования.

Математическое моделирование — это специфический метод познания, который в настоящее время уже стал универсальной методологией научных исследований. Его применение требует от исследователя определенной подготовки, но запросы современного общества к результатам среднего общего образования диктуют необходимость обучения учащихся умению оперировать модельными представлениями и получать с их помощью новые знания.

В современной школе метод моделирования только начинает находить применение, во многих школах обучение физике продолжает строиться на заучивании теории и решении тренировочных задач. Учащиеся не осознают «модельный» характер физических знаний, так как на уроках физические и математические модели в основном предлагаются им в готовом, законченном виде, в самом процессе моделирования учащиеся почти не принимают участия. Это приводит к тому, что порой у учащихся возникает недоумение по поводу необходимости применения метода моделирования. По их мнению, все время что-то приходится упрощать и изучать то, чего нет в природе [5].

Современные требования к результатам обучения диктуют необходимость поиска других подходов к обучению. Поэтому очень важно показать учащимся, что метод моделей — это научный метод познания мира [5]. Следует настойчиво, но постепенно и деликатно погружать учащихся в идеологию моделирования, вести их по таким ступенькам, как создание модели, оснащение модели, проверка адекватности модели, определение границ применимости модели, уточнение модели, построение иерархической цепочки моделей [2, с. 48].

В качестве средства, с помощью которого при обучении физике можно достичь овладения моделированием как методом научного познания, может быть успешно использовано решение физических задач. Это обосновано, во-первых, тем, что решение задач как метод обучения давно и успешно применяется в традиционном обучении физике. Во-вторых, как показано в [4, 8], сама по себе хорошая учебная задача представляет собой модель научного исследования со всеми присущими ему атрибутами. Однако выведение на первый план цели освоения учащимися идеологии моделирования диктует изменения в методике обучения решению задач. И прежде всего требует повышения статуса учебной физической задачи: представляется перспективным выделение задачи в качестве дидактической единицы, как логически самостоятельной части учебного материала, на основе которой природное явление может быть изучено с разной степенью полноты.

С этой точки зрения в процессе решения задач школьники должны будут учиться создавать физические и математические модели реальных явлений, анализировать результаты моделирования и оценивать их адекватность. Подчеркнем, что процесс математического моделирования подразумевает при исследовании какого-либо явления или процесса построение не одной мо-

дели, а набора моделей, каждая из которых описывает изучаемый объект глубже, полнее, всестороннее. Набор моделей должен быть определенным образом структурирован и упорядочен, таким образом выстраивается их иерархия. Иерархичность — одно из важнейших свойств математических моделей.

Рассмотрим, как может быть реализована возможность построения иерархии математических моделей при решении задач с использованием фундаментального физического закона — закона сохранения импульса, и продемонстрируем ее на примере использования известных задач, содержащихся в школьных задачниках.

1. Сначала рассмотрим самый простой случай (типовую задачу).

Из пушки, стоящей на гладкой горизонтальной поверхности, производят выстрел в горизонтальном направлении. Масса снаряда m, его начальная скорость относительно Земли υ_c. Какую скорость приобретет пушка при выстреле, если ее масса M? Смещением пушки в процессе выстрела можно пренебречь [5].

На этом примере необходимо отработать важные этапы построения модели: обсудить выбор системы отсчета, в которой будет рассматриваться процесс, определить рассматриваемую систему тел и обосновать возможность применения закона сохранения импульса. Систему отсчета удобно связать с Землей, поскольку в ней выражена приведенная в условии скорость снаряда, и требуется вычислить искомую скорость пушки. Система тел «пушка — снаряд» очевидно является незамкнутой, так как имеет место взаимодействие этих тел не только друг с другом, но и с Землей. В этой связи обязательно следует обосновать применение закона сохранения импульса: если считать выстрел очень кратковременным и искать скорость пушки сразу же после выстрела, то влиянием других тел в течение этого короткого промежутка времени можно пренебречь и применить закон сохранения импульса. В проекции на ось *Ox* имеем: $M\upsilon_{\text{п}} - m\upsilon_c = 0$, откуда искомая скорость:

$$\upsilon_{\text{п}} = \frac{m\upsilon_c}{M}. \qquad (1)$$

Ситуация, описанная в задаче, уже упрощает возможную реальную ситуацию, поскольку содержит указание на отсутствие трения в системе.

2. А что, если потребуется найти расстояние, на которое откатится пушка после выстрела? Тогда построенная нами физическая модель и ее перевод на математический язык оказываются не применимыми для ответа на поставленный вопрос. Действительно, в рамках данной модели расстояние, на которое откатится пушка, оказывается бесконечно большим, что не согласуется с экспериментом.

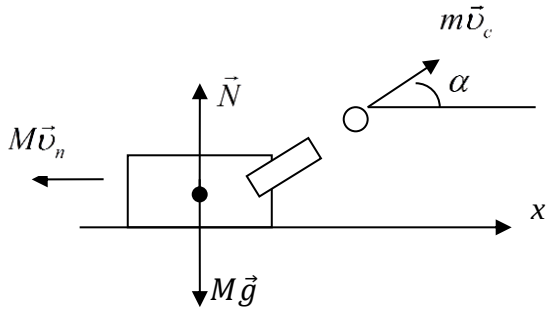
Теперь потребуется усложнить первоначальную модель, а именно, учесть шероховатость поверхности и ввести коэффициент трения. Влиянием трения в процессе самого выстрела можно пренебречь в силу кратковременности процесса и неизменности величины силы трения. Но после выстрела ускорение пушки будет определяться силой трения $a = \mu g$. Тогда расстояние, на которое откатится пушка после выстрела, можно найти с помощью известной кинематической формулы:

$$S = \frac{\upsilon_{\text{п}}^2}{\mu g}. \qquad (2)$$

Полученный результат уже лучше описывает реальную ситуацию, но применим для достаточно редкого частного случая, когда ствол пушки расположен горизонтально.

3. На следующем этапе моделирования попробуем учесть этот аспект: пусть *из пушки, стоящей на гладкой горизонтальной поверхности, производят выстрел под углом α к горизонту. Определим скорость, которую приобретет пушка при выстреле.*

Будем рассуждать по схеме, отработанной на примере самой простой модели. Свяжем систему отсчета с Землей, а в систему тел включим пушку и снаряд.



Определим, является ли система тел «пушка — снаряд» замкнутой. Нетрудно заметить, что если первоначальный импульс системы был равен нулю, так как система покоилась, то после взаимодействия геометрическая сумма импульсов пушки и снаряда нулю не равна. Следовательно, система «пушка — снаряд» не является замкнутой, поэтому запишем для нее закон изменения импульса:

$$\vec{F}_{вн.}\Delta t = (m\vec{\upsilon}_c + M\vec{\upsilon}_n) - 0,$$

где m — масса снаряда, M — масса пушки.

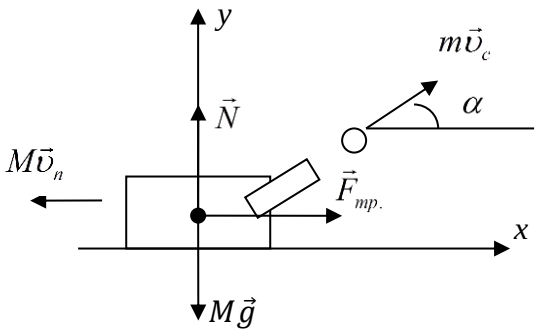
Так как поверхность гладкая, то $\vec{F}_{тр.} = 0$ и $\vec{F}_{\text{вн}} = M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{N}$, где $M\vec{g}$ и $m\vec{g}$ — силы тяжести, действующие на пушку и снаряд со стороны Земли соответственно, $\vec{N}$ — сила реакции опоры.

После проецирования на оси координат и несложных математических преобразований запишем выражение для скорости пушки:

$$\upsilon_n = \frac{m\upsilon_c \cos\alpha}{M}. \qquad (3)$$

Важнейшим этапом моделирования является проверка адекватности математической модели, которую можно осуществить путем сопоставления полученного результата с предельными или очевидными частными случаями. Нетрудно видеть, что при $\alpha = 0$ формула (3) соответствует результату (1).

4. Введем еще одно уточнение к построенной модели — учтем действие силы трения при выстреле, производимом под углом к горизонту.



В незамкнутой системе тел, которой является система «пушка — снаряд», импульс системы изменяется под действием внешних сил:

$$\left(M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}}\right)\Delta t = \\ = \left(M\overrightarrow{\upsilon_{\text{п}}} + m\overrightarrow{\upsilon_{\text{с}}}\right) - 0. \qquad (4)$$

Тогда в проекциях на оси Ox и Oy соответственно получаем:

$$Ox\colon F_{\text{тр}}\Delta t = m\upsilon_c - M\upsilon_{\text{п}}. \qquad (5)$$

$$Oy\colon (N - Mg - mg)\Delta t = m\upsilon_c \sin\alpha. \qquad (6)$$

Обратим внимание, что в процессе выстрела сила реакции опоры не остается постоянной, а значительно увеличивается. Учитывая, что $m << M$, получаем:

$$N = \left(Mg + \frac{m\upsilon_{\text{с}} \sin\alpha}{\Delta t}\right). \qquad (7)$$

Это очень важно, поскольку согласно закону Кулона — Амонтона

$$F_{\text{тр}} = \mu N \qquad (8)$$

величина силы трения зависит от величины силы нормальной реакции опоры и тоже будет изменяться в ходе выстрела.

С учетом выражения (5) получаем:

$$F_{\text{тр}} = \mu\left(Mg + \frac{m\upsilon_{\text{с}} \sin\alpha}{\Delta t}\right). \qquad (9)$$

Подставляя выражение (9) в формулу (5), получаем:

$$\mu m\upsilon_c \sin\alpha + \mu(M+m)g\Delta t = m\upsilon_c \cos\alpha - M\upsilon_n .$$

Так как время взаимодействия мало и в течение его силы тяжести, действующие на пушку и снаряд, не изменяются по величине, слагаемым $\mu(M+m)g\Delta t$ можно пренебречь. Тогда окончательно получаем:

$$\upsilon_n = \frac{m\upsilon_c(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{M}. \qquad (10)$$

Проанализируем полученное выражение.

Во-первых, оно включает в себя уже известные частные случаи: если $\alpha = 0$, формула (10) соответствует результату (1), а если $\mu = 0$, то формула (10) соответствует результату (3).

Во-вторых, можно определить границы применимости построенной математической модели: выражение (10) справедливо, если

$$(\cos\alpha - \mu\sin\alpha \geq 0). \qquad (11)$$

В-третьих, полезно выяснить, что означает невыполнение условия (11). Оказывается, при условии $\cos\alpha - \mu\sin\alpha \leq 0$ в процессе выстрела сила реакции опоры, а следовательно, и максимальная сила трения, задаваемая формулой (8), так сильно возрастают, что пушка вообще не сдвинется с места. Таким образом, уточнение первоначальной модели приводит к более реалистичному описанию рассматриваемого явления.

В-четвертых, построение иерархии математических моделей можно продолжить, рассмотрев задачу, где пушка стреляет несколько раз через некоторый промежуток времени, причем последующие выстрелы происходят в момент движения пушки, тем самым возникает необходимость учитывать скорость пушки относительно Земли, и т. д.

С педагогической точки зрения предлагаемый подход позволяет организовать обучение для учащихся с разным уровнем подготовки и интересов. Если первые две модели традиционны для широкой школьной практики, то четвертая модель соответствует повышенному уровню и может быть использована в физико-математических классах или для подготовки учащихся к олимпиадам.

Очень важно, что умения, приобретаемые учащимися при такой работе, являются универсальными, а аналогичные цепочки математических моделей могут быть выстроены и для других, на первый взгляд совершенно различных сюжетов.

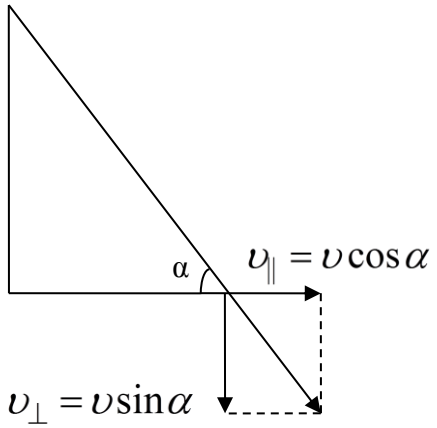
Если учащиеся «видят» сходство математических моделей при решении задач с различными сюжетами, то это свидетельствует о достаточно высокой степени усвоения материала. Для учителя это «лакмусовая бумажка» в оценке понимания и практического применения учащимися приобретенных знаний для решения разнообразных практических задач, позволяющих уверенно ориентироваться в окружающем мире. Например, некритическое отношение школьников к информации, получаемой из СМИ, кино и телевидения, содержащей неверное изображение естественных процессов, способствует формированию неправильного представления о действительности, если они не умеют отличить вымысел создателей фильма от реальности и принимают все показанное за научные факты.

Примером может служить анализ эпизода фильма «Неудержимые» (режиссер Жерар Пирес, Канада, 2002 г.), приведенный в работах [6, 7]. В основе сюжета фильма лежит погоня полицейских за преступниками. Погоня происходит на улицах большого города. В одном из фрагментов показано, как легковой автомобиль, двигаясь с большой скоростью, отрывается от земли и сталкивается с автобусом, пересекающим перекресток. При этом он просто пронзает автобус насквозь и застревает в нем, однако на прямолинейном движении автобуса

это столкновение никак не сказывается. Оценить реальность такого развития событий можно с помощью построения физической и математической моделей явления, что и показано в упомянутых работах. Примечательно, что построенные для данного случая модели соответствуют описанной выше иерархии.

Следующая задача также акцентирует внимание на важности выбора адекватной модели исследования.

Груз соскальзывает без начальной скорости с высоты H = 2 м по гладкой доске, наклоненной под углом α = 60° к горизонту. После спуска груз попадает на горизонтальный шероховатый пол. Коэффициент трения груза о пол μ = 0,7. Где груз остановится? [1].



Рассмотрим движение груза по наклонной плоскости. Так как доска гладкая, то потерь энергии нет, и можно воспользоваться законом сохранения механической энергии для нахождения скорости груза после спуска с доски: $mgH = \frac{m\upsilon^2}{2}$, откуда $\upsilon = \sqrt{2gH}$. Далее при формальном подходе к решению задачи предполагается, что со скоростью υ груз начинает движение по горизонтальному полу, тогда по закону изменения механической энергии: $0 - \frac{m\upsilon^2}{2} = -F_{тр.}S$, где S — путь, пройденный по горизонтальной плоскости. С учетом формулы для силы трения получаем: $S = \frac{\upsilon^2}{2\mu g} = \frac{H}{\mu}$; $S = 2{,}86м$. Однако следует разобраться, уместно ли применение столь грубой модели при решении данной задачи. Чтобы ответить на этот вопрос, исследуем движение груза при переходе на горизонтальную плоскость с помощью модели мгновенного неупругого удара. Разложим скорость груза перед его переходом на горизонтальную поверхность на вертикальную $\upsilon_{\perp}$ и горизонтальную $\upsilon_{\parallel}$ составляющие.

В горизонтальном направлении на груз действует сила трения скольжения, импульс этой силы за время удара равен $F_{тр.}\Delta t = m\upsilon\cos\alpha - mu$, где u — скорость, с которой груз начинает скольжение по наклонной плоскости. Вертикальная составляющая скорости в результате неупругого удара обращается в ноль. При этом импульс силы реакции опоры $N\Delta t = m\upsilon\sin\alpha$. Из полученных уравнений найдем скорость, с которой груз начинает скольжение по наклонной плоскости: $u = \upsilon(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$, с учетом выражения для υ получаем: $u = \sqrt{2gH}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$. Подставляя численные значения из условия задачи, получаем: $u = -0{,}63м/с$.

Проанализируем полученный ответ. Знак «минус» означает, что после удара груз должен двигаться влево, иначе говоря, импульс силы трения оказался больше первоначальной горизонтальной составляющей проекции импульса груза. По всей видимости, в какой-то момент в процессе соударения проекция скорости груза на ось *Ox* становится равной нулю. С этого момента выбранная нами модель дает ошибочные результаты. Дело в том, что формула $F_{тр.} = \mu N$ справедлива только для трения скольжения, а в состоянии покоя сила трения варьируется от 0 до $\mu \cdot N$ в зависимости от внешнего воздействия. В данном случае кроме силы трения нет сил, которые имели бы составляющую в горизон-

тальном направлении, значит, в тот момент, когда горизонтальная составляющая скорости груза станет равной нулю, сила трения тоже обратится в нуль. Отсюда следует вывод, что при заданных условиях груз по полу вообще двигаться не будет.

Из построенной модели видно, что груз будет двигаться по горизонтальной поверхности только при условии $\cos\alpha - \mu\sin\alpha > 0$. При этом он сможет пройти расстояние $S = \frac{H(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)^2}{\mu}$. Причем чем меньше угол α, тем ближе полученный результат к математической модели $S = \frac{H}{\mu}$. Можно продолжить иерархическую цепочку, изменив начальные условия задачи, в частности гладкую доску заменить шероховатой, сообщить грузу начальную скорость и т. п.

Таким образом, при использовании в обучении таких физических задач, в процессе решения которых требуется построение иерархии моделей, у учащихся постепенно формируется правильный методологический подход к изучению физических процессов, сама задача выполняет роль дидактической единицы обучения физике, а важнейшим предметным результатом освоения курса физики становится овладение учащимися основными методами научного познания и сформированность умения решать физические задачи.

Представленный подход неоднократно и успешно апробировался авторами в практической работе со школьниками, студентами и учителями физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баканина Л. П.* Закон сохранения импульса при соударениях // Квант. 1977. № 3. С. 46–51.
2. *Живодробова С. А.* Иерархия математических моделей при обучении физике в средней школе: дис. ... канд. пед. наук. СПб., 2007. 152 с.
3. *Ильин В. А., Кудрявцев В. В., Михайлишина Г. Ф.* Изучение современной физики в профильной школе: методологический аспект // Педагогическое образование и наука. 2011. № 9. С. 40–47.
4. *Кондратьев А. С.* Физические задачи и математическое моделирование реальных процессов: учебно-методическое пособие для учителя / А. С. Кондратьев, М. Э. Филиппов. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2001. 111 с.
5. *Ланина И. Я.* Учение с увлечением на уроках решения задач по физике: пособие для учителей и студентов пед. вузов / И. Я. Ланина, Л. А. Ларченкова. СПб.: ООО «Миралл», 2005. 247 с.
6. *Ларченкова Л. А.* Законы физики в кино / Л. А. Ларченкова, О. С. Верхова // Физика для школьников. 2016. № 2. С. 29–33.
7. *Ларченкова Л. А.* Законы физики в кино / Л. А. Ларченкова, О. С. Пархоменко // Физика в школе и вузе: международный сборник научных статей. СПб., 2007. С. 247–253.
8. *Ларченкова Л. А.* Физические задачи как средство достижения целей физического образования в средней школе: монография. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2013. 159 с.
9. *Тарасов Л. В.* Современная физика в средней школе. М.: Просвещение, 1990. 288 с.

REFERENCES

1. *Bakanina L. P.* Zakon sohraneniya impulsa pri soudareniyah // Kvant. 1977. N 3. S. 46–51.
2. *Zhivodrobova S. A.* Ierarhiya matematicheskih modeley pri obuchenii fizike v sredney shkole: dis. ... kand. ped. nauk. SPb., 2007. 152 c.
3. *Ilin V. A., Kudryavtsev V. V., Mihaylishina G. F.* Izuchenie sovremennoy fiziki v profilnoy shkole: metodologicheskiy aspekt // Pedagogicheskoe obrazovanie i nauka. 2011. N 9. S. 40–47.
4. *Kondratev A. S.* Fizicheskie zadachi i matematicheskoe modelirovanie realnyih protsessov: uchebno-metodicheskoe posobie dlya uchitelya / A. S. Kondratev, M. E. Filippov. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gertsena, 2001. 111 s.

5. *Lanina I. Ya.* Uchenie s uvlecheniem na urokah resheniya zadach po fizike: posobie dlya uchiteley i studentov ped. vuzov / I. Ya. Lanina, L. A. Larchenkova. SPb.: OOO «Mirall», 2005. 247 s.

6. *Larchenkova L. A.* Zakonyi fiziki v kino / L. A. Larchenkova, O. S. Verhova // Fizika dlya shkolnikov. 2016. N 2. S. 29–33.

7. *Larchenkova L. A.* Zakonyi fiziki v kino / L. A. Larchenkova, O. S. Parhomenko // Fizika v shkole i vuze: mezhdunarodnyiy sbornik nauchnyih statey. SPb., 2007. S. 247–253.

8. *Larchenkova L. A.* Fizicheskie zadachi kak sredstvo dostizheniya tseley fizicheskogo obrazovaniya v sredney shkole: monografiya. SPb.: Izd-vo RGPU im. A. I. Gertsena, 2013. 159 s.

9. *Tarasov L. V.* Sovremennaya fizika v sredney shkole. M.: Prosveschenie, 1990. 288 s.

И. В. Гайдамашко, В. М. Кроль

ЯЗЫК КАК СРЕДА ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ: КОГНИТИВНЫЕ АСПЕКТЫ

В статье рассмотрены вопросы личностно-ориентированного обучения и построения когнитивных моделей знаний в языковой среде. В качестве базисных схем взаимоотношения языковой среды, мышления и личностно-ориентированного обучения рассмотрены концепции «внутренней» и «внешней» речи, «глубинных» и «поверхностных» структур языка. В результате анализа моделей структур языковой среды и принципов личностно-ориентированного обучения сформулированы положения ассоциативно-фреймовой модели обучения.

Ключевые слова: языковая среда, личностно-ориентированное обучение, ассоциативно-фреймовая модель обучения.

I. Gaydamashko, V. Krol'

LANGUAGE AS A OF PERSON-ORIENTED EDUCATIONAL: COGNITIVE ASPECTS

In the article the questions of student-centered learning and building cognitive models of knowledge in the language environment. As the basic schema of the relationship of language environment, thinking and student-centered learning describes the concept of «internal» and «external» speech, «deep» and «surface» structures of the language. The analysis models of the structures of the language environment and the principles of student-centered learning provisions associative-frame model of learning.

Keywords: language environment, student-centered learning, associative-frame model of learning.

Использование личностно-ориентированных методов обучения представляет собой в настоящее время общепризнанный подход к осуществлению образовательной деятельности. В качестве истока такого взгляда на процесс приобретения знаний, умений и компетенций можно рассматривать взгляды Сократа, который в своих знаменитых «сократических беседах» говорил, что каждый человек должен созреть для понимания истины, причем осуществить это он способен только путем своих индивидуальных размышлений. Свой метод Сократ метафорически называл «май-