Ф. Х. Асхакова

ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА – ФОРДА, УЧИТЫВАЮЩЕЙ УТИЛИЗАЦИЮ ВРЕДНЫХ ОТХОДОВ

*Работа представлена кафедрой информатики и вычислительной математики Карачаево-Черкесского государственного университета им. У. Д. Алиева.
Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Е. А. Семенчин*

В статье в рамках модели Леонтьева – Форда, учитывающей утилизацию вредных отходов производства, поставлена и исследована задача одновременной максимизации общего объема производственной продукции и минимизации общего объема экологически вредных отходов производства, подлежащих утилизации. Приведены конкретные примеры решения данной задачи с помощью офисной программы Microsoft Excel.

The author of the article states and investigates the problem of simultaneous maximization of total amount of industrial production and minimization of total amount of ecologically hazardous waste liable to recycling within the limits of the Leontiev–Ford model, which considers utilization of hazardous production waste. Certain examples of this problem’s solution are given by means of the office programme Microsoft Excel.

1. ***Постановка задачи***. Экономико-математическая модель Леонтьева – Форда, учитывающая утилизацию вредных отходов производства, имеет вид[1]:

$$x = A_{11}x + A_{12}y + b_1 - A_{13}y, \qquad (1)$$

$$y = A_{21}x + A_{22}y - b_2 + A_{23}y, \qquad (2)$$

$$\bar{x} \ge \theta, \qquad \bar{y} \ge \theta, \qquad (3)$$

где $x \in R^n$ – вектор валового выпуска продукта, называемого полезным, R^n – n – мерное вещественное пространство,

$y \in R^m$ – вектор вредных отходов, выбрасываемых в окружающую среду, которые возникают в процессе производства и подлежат уничтожению с целью поддержания необходимого уровня экологического состояния окружающей среды;

$b_1 \in R^n$ – вектор, характеризующий величину (объем) спроса на выпускаемый продукт;

$b_2 \in R^m$ – вектор, характеризующий остаточный уровень вредных отходов, т. е. отходов, которые не могут быть ликвидированы;

A_{11} – технологическая матрица размера $n \times m$ (матрица прямых затрат);

A_{12} – матрица размера $n \times m$, характеризующая затраты при уничтожении вредных отходов;

A_{13} – матрица размера $n \times m$, характеризующая затраты при утилизации отходов;

A_{21} – матрица размера $n \times m$, характеризующая объем вредных отходов, получаемых при выпуске полезного продукта;

A_{22} – матрица размера $n \times m$, характеризующая объемы вновь получаемых вредных веществ при уничтожении старых;

A_{23} – матрица размера $n \times m$, характеризующая объемы вновь получаемых вредных веществ при утилизации старых.

θ – нулевой вектор (требуемой размерности: либо n, либо m).

Модель (1)–(3) обобщает известную модель Леонтьева, которая в наших обозначениях имеет вид[2].

$$x = A_{11}x + A_{12}y + b_1, \quad x \ge \theta$$

и призвана ответить на вопрос[3]: «…можно ли в условиях данной технологии удовлетворить конечный спрос?» Модель (1)–(2) призвана ответить на вопрос: можно ли в условиях данной технологии, учитывающей загрязнение окружающей среды вредными отходами производства и возможность утилизации вредных отходов, удовлетворить конечный спрос b_1 при заданном (допустимом) остаточном уровне вредных отходов b_2.

Модель (1)–(2) впервые появилась в работе[4] как результат обобщения известной модели Леонтьева – Форда[5]

$$x = A_{11}x + A_{12}y + b_1 ,$$

$$y = A_{21}x + A_{22}y - b_2 .$$

В работе[6] авторов данной статьи предложена методика построения неотрицательного решения модели (1)–(3) «методом простой итерации и ее программная реализация “The productivity of model”»[7].

В данной работе в рамках модели (1)–(3) ставится и изучается задача: найти

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \to \max , \tag{4}$$

$$F_2(y) = \sum_{i=1}^{m} y_i \to \min \tag{5}$$

в предположении, что $x \in R^n$, $y \in R^m$ *удовлетворяют условиям (1)–(3).*

Очевидно, в данной задаче $\sum_{i=1}^{n} x_i$ – общий объем продукции, производимой всеми n отраслями, $\sum_{i=1}^{m} y_i$ – это общий объем вредных отходов, возникающих в процессе производства и подлежащих утилизации.

2. ***Методы решения изучаемой задачи***. Поставленная в п. 1 задача (4), (5), (1)–(3) представляет собой векторную (двухкритериальную) оптимизационную задачу с критерием

$$\left(F_1(x), \quad -F_2(y)\right), \tag{6}$$

которой требуется максимизировать при ограничениях (1)–(3). Для решения подобных задач удобно прибегать к методам свертки векторных критериев.

2.1. *Линейная сверстка критерия* (6). Вместо векторного критерия (6) можно рассмотреть скалярный $c_1F_1(x) - c_2F_2(y)$, $c_1 = \text{const} > 0$, $c_2 = \text{const} > 0$, $c_1 + c_2 = 1$ в котором c_1, c_2 задаются (определяются) экспертами. Тогда двухкритериальная задача (4), (5), (1)–(3) сводится к задаче линейного программирования:

$$c_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - c_2 \sum_{i=1}^{m} y_i \to \max \tag{7}$$

при ограничениях (1)–(3).

Данная задача может быть решена с помощью надстройки Microsoft Excel/Поиск решения.

2.2. *Квадратичная свертка критерия* (6). Допускаем, что задачи (4), (1)–(3) и (5), (1)–(3), представляющие собой по отдельности задачи линейного программирования, имеют решения. Тогда для свертки критерия (6) можно предположить следующий метод.

1) находим решение

$$\left(x^{(1)}, \quad y^{(1)}\right) = \left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \quad y_1^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}\right)$$

задачи (4), (1)–(3);

2) находим решение

$$\left(x^{(2)}, \quad y^{(2)}\right) = \left(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \quad y_1^{(2)}, \ldots, y_m^{(2)}\right)$$

задачи (5), (1)–(3);

3) строим скалярный критерий

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^{(1)}\right)^2 - \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - y_i^{(2)}\right)^2 . \tag{8}$$

Тогда двухкритериальная задача (4), (5), (1)–(3) сводится к задаче квадратичного программирования[8]

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^{(1)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - y_i^{(2)}\right)^2 \to \min \tag{9}$$

при ограничениях (1)–(3).

Задача квадратичного программирования (9), (1)–(3) может быть решена с помощью надстройки Microsoft Excel/Поиск решения.

П р и м е р 1. Пусть

$$A_{11}=\begin{pmatrix}0{,}49 & 0{,}15 & 0{,}4\\ 0{,}16 & 0{,}09 & 0{,}03\\ 0{,}008 & 0{,}07 & 0{,}04\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}0{,}0003 & 0{,}0003\\ 0{,}0003 & 0{,}0003\\ 0{,}0004 & 0{,}0002\end{pmatrix},\quad A_{13}=\begin{pmatrix}0{,}0001 & 0{,}0001\\ 0 & 0{,}0001\\ 0{,}0002 & 0{,}0001\end{pmatrix},\quad b_1=\begin{pmatrix}90\\ 79\\ 40\end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}0{,}001 & 0{,}004 & 0{,}001\\ 0{,}002 & 0{,}003 & 0{,}001\end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}003\\ 0{,}001 & 0{,}002\end{pmatrix},\quad A_{23}=\begin{pmatrix}0{,}01 & 0{,}001\\ 0{,}001 & 0\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}0.34\\ 0.23\end{pmatrix},$$

$$c_1 = 0{,}3 \quad c_2 = 0{,}7$$

Находим решение задачи (7), (1)–(3):

$$x=\begin{pmatrix}257{,}9\\ 133{,}9\\ 53{,}6\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}7\end{pmatrix}$$, значение целевой функции (7) равно 62,3.

П р и м е р 2. Пусть A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, b_1, b_2 имеют тот же вид, что и в примере 1.

Решая задачу (4), (1)–(3), находим

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}257{,}9\\ 133{,}9\\ 53{,}6\end{pmatrix}\quad y^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$, значение целевой функции (4) равно 445,4.

Решая в нашем случае задачу (5), (1)–(3), находим

$$x^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\ 84{,}97\\ 0\end{pmatrix}\quad y^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\ 0{,}025\end{pmatrix}$$, значение целевой функции (5) равно 0,025.

Строим критерий

$$\left(x_i-x_i^{(1)}\right)^2-\left(y_i-y_i^{(2)}\right)^2=\left(x_1-257.9\right)^2+\left(x_2-133.9\right)^2+\left(x_3-53.6\right)^2+\left(y_1-0\right)^2+\left(y_2-0.025\right)^2$$

(т. е. критерий (8)) и находим его минимум при ограничениях (1)–(3):

$$x=\begin{pmatrix}257{,}9\\ 133{,}9\\ 53{,}6\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}7\end{pmatrix}$$, значение целевой функции (9) равно 43683,26.

Сравнивая решения примеров 1 и 2, убеждаемся (и это вполне естественно), что они совпадают.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Данилов Н. Н.* Курс математической экономики: Учеб. Пособие. М.: Высшая школа, 2006. С. 239.

[2] Там же. С. 239.

[3] Там же. С. 239.

[4] *Омарова А. Д.* Модель, учитывающая возможности утилизации вредных отходов. Вузовская наука – Северо-Кавказскому региону: Материалы IV рег. науч.-тех. конф. Ставрополь: СевКавГТУ, 2000. С. 37.

[5] *Леонтьев В., Форд Д.* Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду // Экономика и математические методы. Т. VIII, 1972. Вып. 3. С. 370–399.

[6] *Семенчин Е. А., Асхакова Ф. Х.* Методика построения численными методами решения балансовой модели Леонтьева-Форда, учитывающей утилизацию отходов. Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы III Международной конференции. Нальчик. 2006. С. 257–259.

[7] Программный продукт «Комплекс программ "The productivity of model"». Свидетельство об официальной регистрации программы на ЭВМ регистрационный номер № 2007611644. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ от 19.04.2007.

[8] *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Валощенко А. Б.* Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1976. С. 216–248.