

*М. А. Урбан, Г. Л. Муравьева*

## ГЕНЕЗИС МЕТОДА УЧЕБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В НАЧАЛЬНОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

*В статье представлены результаты исследования проблемы развития учебного моделирования как метода начального обучения математике. Выделены и описаны шесть этапов развития метода учебного моделирования с XVII до начала XXI века. Дана краткая характеристика ключевых методических идей, которые были приоритетными на каждом из этапов и определяли содержание работы по использованию учебных моделей при изучении математических понятий и способов действий в начальной школе.*

**Ключевые слова:** начальное обучение математике, история обучения, методика обучения, учебное моделирование, учебная модель.

*М. Urban, H. Muravyova*

## THE EVOLUTION OF THE EDUCATIONAL MODELLING METHOD IN TEACHING PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS

*This article presents the results of the research devoted to the exploration of the educational modelling method and its applications to teaching mathematics in primary school. It outlines the history of the educational modelling from the 17<sup>th</sup> to the 19<sup>th</sup> century and highlights the six stages in the development of the approach. The research further summarises the crucial concepts of each of the identified stages and illustrates how they defined the application of educational modelling in primary classrooms.*

**Keywords:** primary mathematics education, history of teaching, teaching methods, educational modelling, educational model.

В научно-педагогических исследованиях под учебным моделированием понимают метод обучения, направленный на овладение учащимися учебным материалом с помощью учебных моделей понятий и способов действий, а под учебной моделью — вид модели, которая применяется в обучении с целью выделения и исследования существенных сторон изучаемого объекта [1; 6; 19; 21 и др.] Использование учебных моделей в начальном обучении математике имеет свою историю развития и первоначально связывалось с идеей наглядного обучения. Анализ научно-методической литературы позволил выделить шесть этапов развития метода учебного моделирования в начальном обучении математике: первый — подготовка к реализации принципа наглядности в обучении арифметике (первая поло-

вина XVII — первая половина XVIII века); второй — разработка первых наглядных моделей чисел в обучении арифметике (вторая половина XVIII — первая половина XIX века); третий — развитие наглядного моделирования при зарождении монографического и вычислительного методов изучения чисел (середина XIX века); четвертый — развитие наглядного моделирования в работах последователей монографического и вычислительного методов изучения чисел (вторая половина XIX — начало XX века); пятый — развитие наглядного моделирования в методике обучения вычислениям и решению текстовых задач (первая половина XX века); шестой — разработка современных направлений реализации метода учебного моделирования (вторая половина XX — начало XXI века) [19].

На первом этапе (первая половина XVII — первая половина XVIII века) была обеспечена подготовка к использованию учебного моделирования в начальном обучении математике. Я. А. Коменским был сформулирован принцип наглядности обучения, он ввел в педагогический лексикон понятие «модель», которое использовал для обозначения заменителей предметов (не в связи с изучением арифметического материала): «...подобные, доступные непосредственному рассмотрению препараты (то есть модели вещей, которых нельзя иметь в натуре) следовало бы заготовить по всем изучаемым предметам, так чтоб они всегда были под

рукою в школе. И если бы даже изготовление этих моделей потребовало расходов и труда, то все же от этой работы последовала бы необыкновенная польза» [8, с. 156–157]. В этот исторический период Л. Ф. Магницкий предложил визуально удобную для запоминания форму представления таблиц сложения и умножения. Несмотря на преобладание словесной формы изложения материала в его учебнике арифметики, наличие таблиц говорит о понимании автором значимости наглядной подачи информации для лучшего ее усвоения учащимися [11]. Примеры таблиц Л. Ф. Магницкого приведены на рис. 1.

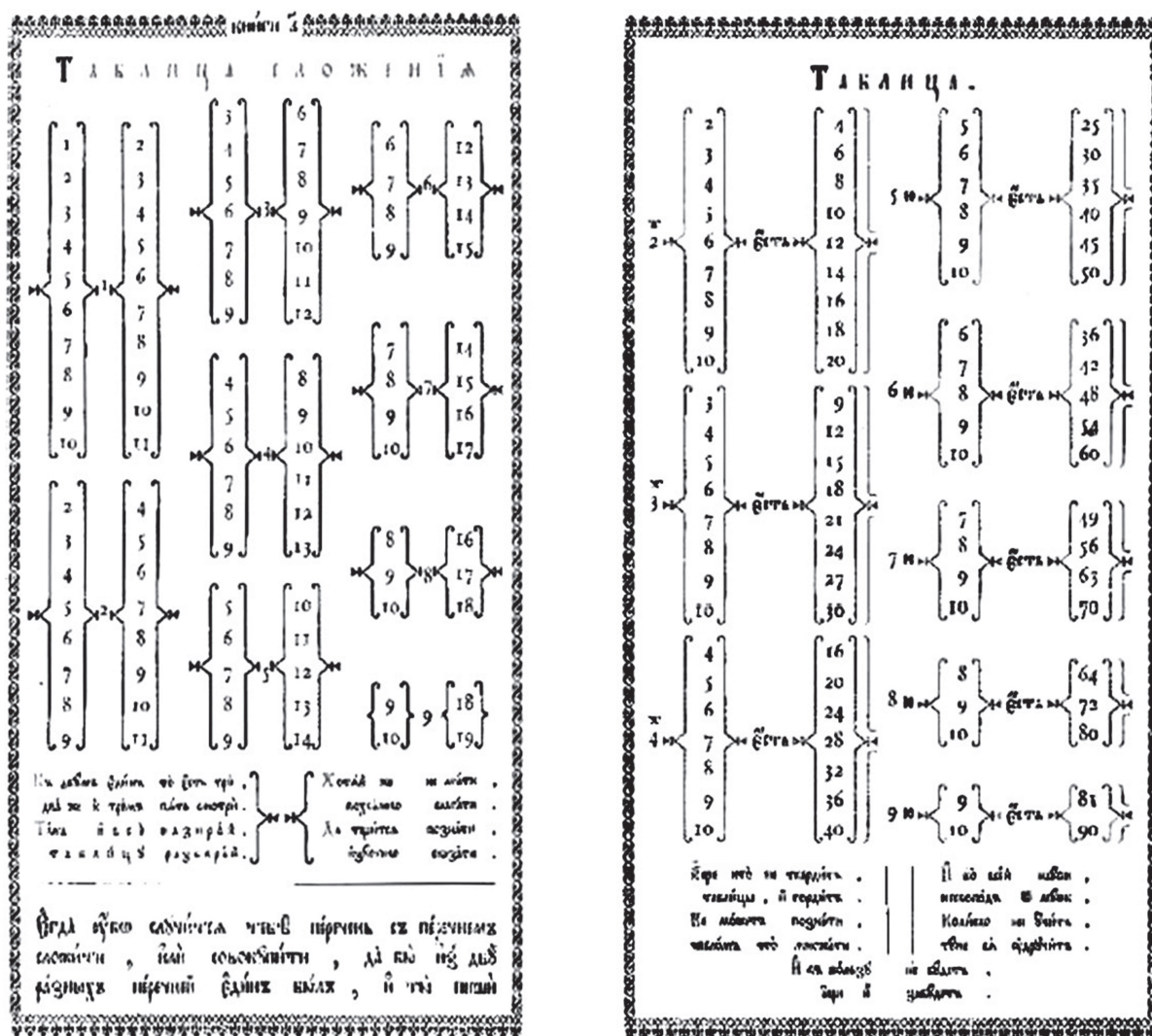


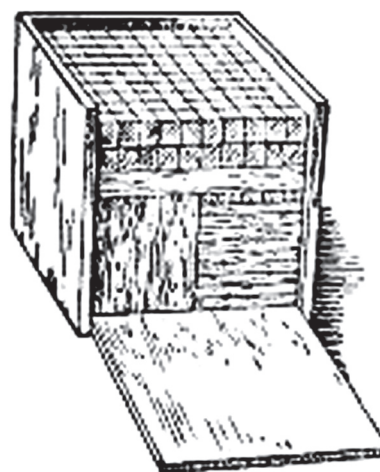
Рис. 1

На *втором* этапе (вторая половина XVIII — первая половина XIX века) приоритетной методической идеей становится *наглядное представление состава изучаемых чисел*. В это время И. Г. Песталоцци создает первые наглядные таблицы для изучения целых и дробных чисел, выполняющих функцию учебных моделей. Выбрав для первоначального знакомства только числа первой сотни, И. Г. Песталоцци показывает в них соотношение символических обозначений чисел с помощью цифр и образов этих чисел в виде специально подготовленных рисунков, которые представляли собой различные модели чисел. Описание этих таблиц дается в программном труде автора «Как Гертруда учит своих детей» [14]. Пример одной из таблиц И. Г. Песталоцци, приведенный в работе В. Г. Фридмана [20, с. 116], показан на рис. 2а. Наглядные таблицы И. Г. Песталоцци интересны скорее с исторической, нежели с практической точки зрения, по словам В. Г. Фридмана, «таблица эта очень неудобна для употребления» [20, с. 116]. Однако таблицы И. Г. Песталоцци стали прототипом известного и до сих пор применяемого в начальной школе средства обучения — арифметического ящика, предложенного для наглядного изучения состава многозначных чисел учеником И. Г. Песталоцци Э. Тиллихом ([10], рис. 2б).

На *третьем* этапе (середина XIX века) продолжала развиваться идея *наглядного моделирования состава изучаемых чисел*. Предложенная А. В. Грубе система работы с использованием «штриховой записи числа», иллюстрирующей десятичный состав изучаемых чисел, а также схематических рисунков, выполненных с помощью отрезков, кругов, прямоугольников для изучения дробных чисел, легла в основу монографического метода изучения чисел. Пример «штриховой записи числа», предложенной А. В. Грубе [4], показан на рис. 3.

Особенностью третьего этапа является зарождение методической идеи *наглядного моделирования текста арифметической задачи*

а



б

Рис. 2

2) посредством 2.

$$\begin{array}{l} ||| 2 \\ || 2 \\ | 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 + 2 + 1 = 5. \\ 2 \times 2 + 1 = 5. \\ 5 - 2 - 2 = 1. \\ 2 : 5 = 2 (1). \end{array} \right.$$

3) посредством 3.

$$\begin{array}{l} ||| 3 \\ || 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 + 2 = 5, 2 + 3 = 5. \\ 1 \times 3 + 2 = 5. \\ 5 - 3 = 2, 5 - 2 = 3. \\ 3 : 5 = 1 (2). \end{array} \right.$$

Рис. 3

(«точечно-штриховая запись» текста задачи А. В. Грубе [4]). Пример «точечно-штриховой записи», выполняющей функции учебной модели текста задачи, показан на рис. 4.

«Кусок холста в 30 аршин разрезали пополам; из первой половины выкроили рубашки, по 5 аршин каждая; а из второй половины выкроили меньшие, по 3 аршина каждая. Сколько было больших и сколько малых рубашек?» [4, с. 86].



Рис. 4

Эта идея не стала приоритетной и даже была подвергнута критике со стороны многих педагогов, работающих как в данном историческом периоде, так и немного позднее. Например, в связи с использованием рисунков при работе над задачей ученые-методисты отмечали, что «...занятия арифметикой на плохих рисунках не эстетичны, а на хороших — не уместны» [22, с. 35], «...картинки-условия или картинки-символы представляют собой вредное увлечение якобы наглядным методом» [20, с. 58]. Однако идея наглядного моделирования текста задачи была впоследствии высоко оценена и спустя несколько десятилетий получила свое дальнейшее развитие.

На *четвертом* этапе (вторая половина XIX — начало XX века) приоритетной методической идеей становится *наглядное моделирование арифметических действий и их свойств*, что соответствовало получавшему в то время распространение вычислительному методу изучения чисел. Примеры наглядного моделирования действий над числами и свойств действий были предложены Д. Л. Волковским, В. А. Евтушевским, С. И. Шохор-Троцким и др. Примеры наглядного моделирования переместительного свойства умножения, предложенные Д. Л. Волковским [3, с. 35] и С. И. Шохор-Троцким [22, с. 78], показаны на рис. 5.

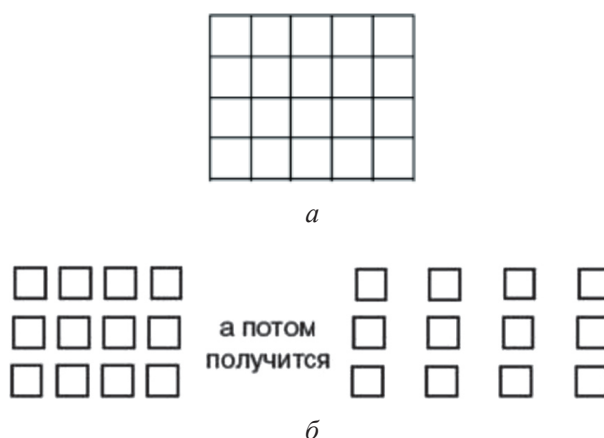


Рис. 5

Несмотря на приоритет методической идеи наглядного моделирования действий над числами, на этом этапе продолжала развиваться и идея наглядного моделирования самих чисел: было разработано и экспериментально проверено при обучении 3–6-летних детей средство обучения «числовые фигуры», с помощью которых числа обозначались точками, расположенными в определенном порядке (В. А. Лай [10]); средство обучения «счеты Шохор-Троцкого», основанное на идее вертикального расположения спиц, обозначающих разряды многозначного числа (С. И. Шохор-Троцкий [22]). Примеры «числовых фигур» В. А. Лая, приведенных в пособии С. И. Шохор-Троцкого [22, с. 23], показаны на рис. 6.



Рис. 6

На *пятом* этапе (первая половина XX века) доминирующей методической идеей становится *наглядное моделирование текстов задач*. Сначала рисунки и чертежи рекомендовалось использовать по отношению к текстовым задачам на движение (Д. Л. Волковский [3]), затем — при поиске решения текстовых задач с различным содержанием (В. Т. Снигирёв, Я. Ф. Чекмарёв [18]).

Примеры наглядных моделей текстов задач Д. Л. Волковского, В. Т. Снигирёва и Я. Ф. Чекмарёва приведены на рис. 7.

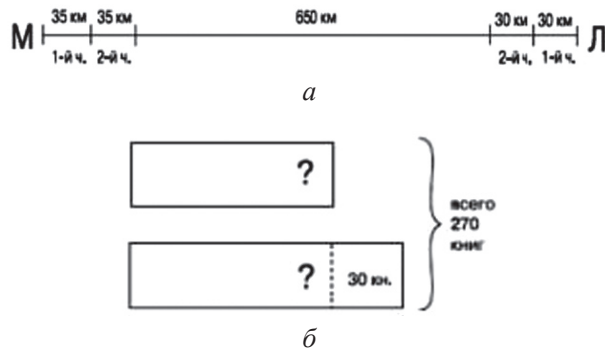


Рис. 7

И. Н. Кавун и Н. С. Попова впервые отмечают необходимость *практических действий с наглядностью* на наборном полотне с целью осознанного выбора арифметического действия при работе с простыми текстовыми задачами [7]. На этом этапе впервые появляется методическая идея *наглядного моделирования способа рассуждения* при работе над текстовой задачей, предложенная А. С. Пчёлко на примере построения граф-схемы аналитического метода решения задачи [16]. Несмотря на то, что в то время эта идея не получила распространения, она в дальнейшем стала активно использоваться в практике начального обучения математике. Пример граф-схемы А. С. Пчёлко приведен на рис. 8.

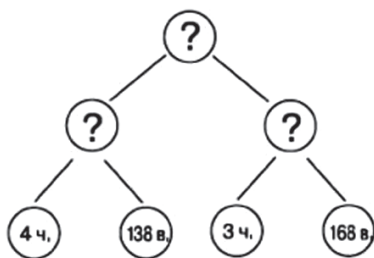


Рис. 8

На *шестом* этапе (вторая половина XX — начало XXI века) ключевой методической идеей постепенно становится поиск методов и приемов обучения, способствующих фор-

мированию у учащихся умения самостоятельно строить учебные модели изучаемых понятий и способов действий. В данное время получают развитие следующие направления научно-методических исследований: 1) обоснование целесообразности и возможности обучения учащихся *математическому моделированию* на доступном для них уровне; 2) введение в школьную практику начального обучения математике понятий «*учебная модель*», «*учебное моделирование*», уточнение и расширение смысла этих понятий; 3) исследование целесообразности использования в начальном обучении математике *информационно-коммуникационных технологий*, позволяющих реализовать идею учебного моделирования на высоком технологическом уровне.

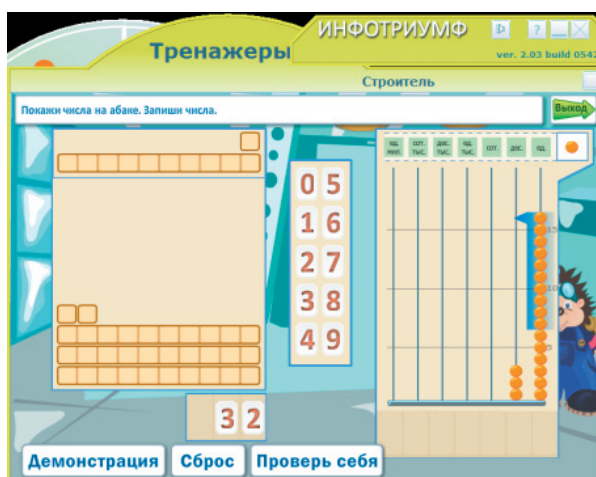
Многие ученые, работающие над проблемой обучения учащихся элементам деятельности математического моделирования отмечали, что в большей степени это целесообразно для школьников более старшего возраста (А. Г. Мордкович [13], П. Галбрайт и Г. Стиллман [23] и др.). Однако были выполнены экспериментальные исследования, которые доказали, что учащиеся начальной школы тоже способны освоить некоторые этапы деятельности математического моделирования на доступном для них уровне (Л. Инглиш [24], А. А. Столяр [15], Р. Легрер и Л. Шабл [25] и др.).

В данный период в научно-методическом дискурсе начинают использоваться понятия «*учебная модель*» и «*учебное моделирование*», введенные В. В. Давыдовым и А. У. Варданяном [5], уточняется сущность этих понятий, меняется представление об учебной модели как модели исключительно визуальной природы, имеющей вид схематического чертежа или рисунка. К учебным начинают также относить модели, построенные на естественном языке, например, тексты задач и краткие записи к ним, определения и словесные формулировки свойств арифметических действий, а также на языке математической символики — выражения, равен-

ства, неравенства, уравнения (А. В. Белошистая [1], Н. Б. Истомина-Кастровская [6], Л. М. Фридман [21] и др.).

На данном этапе была доказана принципиальная возможность использования информационно-коммуникационных технологий при обучении младших школьников и экспериментально подтверждено их позитивное влияние на общую мотивацию младшего школьника к учению (Л. Л. Босова [2], О. М. Корчажкина [9], С. И. Сергеев [17] и др.). Современные компьютерные технологии позволяют спроектировать высокотехнологичные электронные средства обучения, решающие проблему учебного моделирования на принципиально ином качественном уровне, что связано с предоставлением учащемуся возможности рассмотреть в динамике генезис нового математического понятия, а также обеспечить интерактивный способ обучения. Примеры интерактивных моделей авторского электронного средства обучения «Математика. 2–4 классы» [12], которое было разработано в рамках государственной программы «Комплексная информатизация системы образования Республики Беларусь», приведены на рис. 9.

Результаты выполненного анализа являются историко-методическими основаниями методической системы начального обучения математике с использованием учебного моделирования, реализованной в авторском



а



б

Рис. 9

учебно-методическом комплексе по математике для I ступени общего среднего образования в Республике Беларусь.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белошистая А. В. Методика обучения математике в начальной школе: курс лекций: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. «Педагогика и методика начального образования». М.: Владос, 2011. 455 с.
2. Босова Л. Л. Развитие методической системы обучения информатике и информационным технологиям младших школьников: дис. ... д-ра пед. наук. М., 2010. 351 с.
3. Волковский Д. Л. Методика арифметики в начальной школе: пособие для учителей. 3-е изд. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1937. 296 с.
4. Грубе А. В. Руководство к начальной арифметике в элементарной школе на основаниях эвристического метода.: методическое пособие к воспитательному обучению. СПб.: Тип. А. Якобсона, 1873. 191 с.
5. Давыдов В. В., Варданян А. У. Учебная деятельность и моделирование. Ереван: Луйс, 1981. 220 с.
6. Истомина Н. Б. Методика обучения математике в начальной школе: развивающее обучение: учеб. пособие для студентов педагогических вузов и колледжей. 2-е изд. Смоленск: Изд-во «Ассоциация XXI век», 2009. 288 с.

7. Кавун И. Н., Попова Н. С. Методика преподавания арифметики. Для учителей начальной школы и студентов педтехникумов. М.; Л.: Государственное учебно-педагогическое изд-во, 1934. 416 с.
8. Коменский Я. А. Великая дидактика: издание ред. журн. «Семья и школа. СПб.: Тип. А. М. Котомина, 1875–1877. 292 с.
9. Корчажская О. М. Форма организации учебного процесса с использованием электронных учебников — «перевернутый урок» // Начальная школа. 2016. № 4. С. 14–19.
10. Лай В. А. Руководство к первоначальному обучению арифметике, основанное на результатах дидактических опытов: пер. с нем. М.: Московская художественная печать, 1916. 407 с.
11. Магницкий Л. Ф. Арифметика, сиречь наука числительная. СПб., 1703. [Электронный ресурс]. URL: <http://math.ru/lib/176> (дата обращения: 07.09.2015).
12. Урбан М. А и др. Математика. 2–4 классы. [Электронный ресурс]. Электронное средство обучения. Минск: НПЧУП «Инфотриумф», 2010. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
13. Мордкович А. Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: дис. ... д-ра пед. наук. М., 1986. 355 с.
14. Песталоцци И. Г. Избранные педагогические сочинения: в 2 т. / ред. В. А. Ротенберг, В. М. Кларин. М.: Педагогика, 1981. Т. 1. С. 61–212.
15. Дрозд В. Л. и др. Практикум по методике начального обучения математике. Минск: Вышэйшая школа, 1984. 97 с.
16. Пчёлко А. С. Методика преподавания арифметики в начальной школе. М.: Учпедгиз, 1949. 364 с.
17. Сергеев С. И., Урбан М. А. Компьютерная визуализация в математическом образовании как практическая педагогическая задача // Problems of education in the 21st century. Pedagogical and psychological issue in education. 2012. Vol. 49. P. 95–103.
18. Смигирёв В. Т., Чекмарёв Я. Ф. Методика арифметики: пособие для педагогических училищ. 7-е изд. М.: Учпедгиз, 1948. 343 с.
19. Урбан М. А. Учебное моделирование в процессе обучения математике на I ступени общего среднего образования: методологический и исторический аспекты. Минск: БГПУ, 2018. 200 с.
20. Фридман В. Г. Учебник методики арифметики. М.; Пг.: Гос. изд-во, 1923. 178 с.
21. Фридман Л. М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. М.: Педагогика, 1977. 207 с.
22. Шохор-Троцкий С. И. Методика начального курса математики: в 2 ч. / под ред. И. Н. Кавуна. 9-е изд. Л.: Гос. изд-во, 1924. Ч. 1. 203 с.
23. Stillman G. et al. Research into mathematical applications and modelling // Research in mathematics education in Australasia 2012–2015 / eds. K. Makar, Sh. Dole, J. Visnovska, M. Goos, A. Bennison, K. Fry. Singapore: Springer, 2016. P. 281–304.
24. English L. D. Learning through modelling in the primary years // Mathematical modelling. From Theory to Practice / eds. N. Dawn, L. Hoe. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2015. P. 99–124.
25. Lehrer R., Schauble L. Origins and evolutions of model-based reasoning in mathematics and science // Beyond constructivism: a models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning, & teaching. Mahwah, NJ: Erlbaum, 2003. P. 59–70.

## REFERENCES

1. Beloshistaya A. V. Metodika obucheniya matematike v nachal'noj shkole: kurs lekcij: ucheb. posobie dlya studentov vuzov, obuchayushchihsya po spec. «Pedagogika i metodika nachal'nogo obrazovaniya». М.: Vldos, 2011. 455 s.
2. Bosova L. L. Razvitie metodicheskoy sistemy obucheniya informatike i informacionnym tekhnologiyam mladshih shkol'nikov: dis. ... d-ra ped. nauk. М., 2010. 351 s.
3. Volkovskij D. L. Metodika arifmetiki v nachal'noj shkole: posobie dlya uchitelej. 3-e izd. М.: Gosudarstvennoe uchebno-pedagogicheskoe izdatel'stvo, 1937. 296 s.
4. Grube A. V. Rukovodstvo k nachal'noj arifmetike v elementarnej shkole na osnovaniyah evristicheskogo metoda: metodicheskoe posobie k vospitatel'nomu obucheniyu. SPb.: Tip. A. Yakobsona, 1873. 191 s.
5. Davydov V. V., Vardanyan A. U. Uchebnaya deyatel'nost' i modelirovanie. Erevan: Lujs, 1981. 220 s.
6. Istomina N. B. Metodika obucheniya matematike v nachal'noj shkole: razvivayushchee obuchenie: ucheb. posobie dlya studentov pedagogicheskikh vuzov i kolledzhej. 2-e izd. Smolensk: Izd-vo «Associaciya XXI vek», 2009. 288 s.

7. *Kavun I. N., Popova N. S.* Metodika prepodavaniya arifmetiki. Dlya uchitelej nachal'noj shkoly i studentov pedtehnikumov. M.; L.: Gosudarstvennoe uchebno-pedagogicheskoe izd-vo, 1934. 416 s.
8. *Komenskij Ya. A.* Velikaya didaktika: izdanie red. zhurn. «Sem'ya i shkola. SPb.: Tip. A. M. Kotomina, 1875–1877. 292 s.
9. *Korchazhkina O. M.* Forma organizacii uchebnogo processa s ispol'zovaniem elektronnyh uchebnikov — «perevernutyj urok» // *Nachal'naya shkola.* 2016. № 4. S. 14–19.
10. *Laj V. A.* Rukovodstvo k pervonachal'nomu obucheniyu arifmetike, osnovannoe na rezul'tatah didakticheskikh opytov: per. s nem. M.: Moskovskaya hudozhestvennaya pechatnya, 1916. 407 s.
11. *Magnickij L. F.* Arifmetika, sirech' nauka chislitel'naya. SPb., 1703. [Elektronnyj resurs]. URL: <http://math.ru/lib/176> (data obrashcheniya: 07.09.2015).
12. *Urban M. A i dr.* Matematika. 2–4 klassy. [Elektronnyj resurs]. Elektronnoe sredstvo obucheniya. Minsk: NPChUP «Infotriumf», 2010. 1 elektron. opt. disk (CD-ROM).
13. *Mordkovich A. G.* Professional'no-pedagogicheskaya napravlenost' special'noj podgotovki uchitelya matematiki v pedagogicheskom institute: dis. ... d-ra ped. nauk. M., 1986. 355 s.
14. *Pestalocci I. G.* Izbrannye pedagogicheskie sochineniya: v 2 t. / red. V. A. Rotenberg, V. M. Klarin. M.: Pedagogika, 1981. T. 1. S. 61–212.
15. *Drozd V. L. i dr.* Praktikum po metodike nachal'nogo obucheniya matematike. Minsk: Vyshejschaya shkola, 1984. 97 s.
16. *Pchyolko A. S.* Metodika prepodavaniya arifmetiki v nachal'noj shkole. M.: Uchpedgiz, 1949. 364 s.
17. *Sergeev S. I., Urban M. A.* Komp'yuternaya vizualizaciya v matematicheskom obrazovanii kak prakticheskaya pedagogicheskaya zadacha // *Problems of education in the 21st century. Pedagogical and psychological issue in education.* 2012. Vol. 49. P. 95–103.
18. *Snigiryov V. T., Chekmaryov Ya. F.* Metodika arifmetiki: posobie dlya pedagogicheskikh uchilishch. 7-e izd. M.: Uchpedgiz, 1948. 343 s.
19. *Urban M. A.* Uchebnoe modelirovanie v processe obucheniya matematike na I stupeni obshchego srednego obrazovaniya: metodologicheskij i istoricheskij aspekty. Minsk: BGPU, 2018. 200 s.
20. *Fridman V. G.* Uchebnik metodiki arifmetiki. M.; Pg.: Gos. izd-vo, 1923. 178 s.
21. *Fridman L. M.* Logiko-psihologicheskij analiz shkol'nyh uchebnyh zadach. M.: Pedagogika, 1977. 207 s.
22. *Shohor-Trockij S. I.* Metodika nachal'nogo kursa matematiki: v 2 ch. / pod red. I. N. Kavuna. 9-e izd. L.: Gos. izd-vo, 1924. Ch. 1. 203 s.
23. *Stillman G. et al.* Research into mathematical applications and modelling // *Research in mathematics education in Australasia 2012–2015* / eds. K. Makar, Sh. Dole, J. Visnovska, M. Goos, A. Bennison, K. Fry. Singapore: Springer, 2016. P. 281–304.
24. *English L. D.* Learning through modelling in the primary years // *Mathematical modelling. From Theory to Practice* / eds. N. Dawn, L. Hoe. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2015. P. 99–124.
25. *Lehrer R., Schauble L.* Origins and evaluations of model-based reasoning in mathematics and science // *Beyond constructivism: a models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning, & teaching.* Mahwah, NJ: Erlbaum, 2003. P. 59–70.