Н. Х. Розов

ФЕНОМЕН БУФЕРНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

Исследуется математическая модель распределенного генератора Ван дер Поля, представляющая собой линейную систему телеграфных уравнений с нелинейностью в одном из граничных условий; входящие в модель параметры отражают физические характеристики генератора. В изучаемой модели выявляется феномен буферности, т. е. устанавливается одновременное существование у рассматриваемой краевой задачи произвольного конечного наперед заданного количества устойчивых периодических по времени решений при надлежащем выборе значений параметров.

Эффективным инструментом познания разнообразных конкретных объектов и процессов всегда было теоретическое и численное исследование их математических моделей. В то же время именно глубокий анализ таких моделей зачастую приводил к постановке новых чисто математических задач, побуждал разработку новых математических методов.

Ярким примером такого взаимно обогащающего взаимодействия теоретического исследования математической модели и глубокого проникновения в суть реального явления может служить феномен буферности, который лишь сравнительно недавно начал изучаться в полной мере и позволил глубже понять возможные механизмы сложнейших отношений порядка и хаоса в природе.

1. Хорошо известна та исключительная роль, которую играют всевозможные колебательные процессы в механике, физике, технике, химии, биологии, экономике и т. д. Важным аспектом их изучения является теоретический анализ математических моделей конкретных колебательных объектов.

При исследовании *колебательных объектов с сосредоточенными параметрами*, т. е. описываемых автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений, ключевым является понятие *устойчивого предельного цикла* такой системы. Уместно напомнить, что это понятие было введено великим А. Пуанкаре чисто умозрительно в 80-х годах XIX века. Но лишь в 20-х годах XX века выдающийся советский физик А. А. Андронов обнаружил, что устойчивый предельный цикл – вполне адекватное математическое отражение (описание) реального стационарного колебательного процесса (установившегося периодического режима) в системах с сосредоточенными параметрами.

Совершенно ясно, что в зависимости от специфики прикладной проблемы в одной ситуации принципиально важно наличие лишь единственного такого цикла, а в другой, наоборот, желательно, чтобы их было несколько. Поскольку система дифференциальных уравнений содержит некоторое число параметров (отражающих реальные характеристики исследуемого объекта), то при различных значениях этих параметров, вообще говоря, существует разное количество устойчивых предельных циклов. Не составляет труда привести примеры систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых соответствующим выбором значений параметров можно гарантировать существование *любого конечного наперед заданного количества устойчивых предельных циклов*. Так, в системе второго порядка (в полярных координатах)

$$\dot{r} = r\sin(1/\alpha r), \quad \dot{\varphi} = 1,$$

где α, $0 < \alpha < 1/\pi$, – параметр, по любому натуральному числу N легко указать близкое к нулю положительное значение α, при котором в области $r > 1$ фазовой плоскости расположено ровно N устойчивых предельных циклов.

В разнообразных областях науки, новой техники и современных технологий часто встречаются и *колебательные объекты с распределенными параметрами* или, короче, *распределенные колебательные объекты*, состояние которых зависит от времени и от пространственных переменных, причем состояние в каждой точке пространства может периодически меняться во времени. Такие объекты генерируют периодические (по времени) автоколебания, или *автоволновые процессы* (термин Р. В. Хохлова).

Динамика этих объектов моделируется, как правило, системами дифференциальных уравнений с частными производными, включающими различные параметры, характеризующие свойства реального объекта, а каждый индивидуальный процесс – решением этой системы уравнений, выделяемым определенными краевыми условиями и задаваемыми начальными данными. Таким образом, реальному автоколебательному режиму отвечает *устойчивый цикл*, т. е. периодическое по времени решение системы уравнений с частными производными, удовлетворяющее краевым условиям. Естественно, что в общем случае эта система уравнений допускает один или несколько устойчивых циклов – и установление их возможного числа исключительно важно, поскольку способствует выяснению количества реально существующих автоколебательных режимов. Естественно, число таких циклов, вообще говоря, различно при разных значениях входящих в уравнение параметров.

Так возникает чисто математическая задача исследования зависимости числа устойчивых циклов дифференциального уравнения (или системы) с частными производными (с краевыми условиями) от имеющихся параметров.

2. Будем говорить, что в распределенном колебательном объекте наблюдается *феномен буферности*, если он обладает следующим свойством: его математическая модель — краевая задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными — допускает при соответствующих значениях входящих параметров произвольное a priori заданное конечное число различных устойчивых циклов. Другими словами, имеется теоретическая возможность для любого натурального N так подобрать физические характеристики объекта, чтобы в нем реализовывалось N разных автоколебательных режимов.

В качестве типичного примера распределенного колебательного объекта назовем автогенератор с длинной линией. Задачу о теоретическом исследовании его периодических по времени режимов, по-видимому, первым поставил А. А. Витт [1, 2]. Имя и работы этого ученого, к сожалению, мало известны. Александр Адольфович Витт – один из ярких представителей советской школы теории колебаний (Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронов, В. В. Мигулин и др.), выполнивший ряд оригинальных, интересных и перспективных исследований. В частности, он являлся и одним из соавторов классической книги «Теория колебаний» [3]. Однако, поскольку А. А. Витт был репрессирован (и погиб в 1937 г.), его фамилия на этой книге [3] не значилась и была восстановлена лишь через много лет [4, 5].

В работе [2] А. А. Витт высказал гипотезу о том, что в автогенераторе с длинной линией могут существовать сразу несколько устойчивых циклов. Сам факт увеличения числа автоколебательных режимов при изменении значений параметра для реального распределенного колебательного объекта впервые зафиксирован экспериментально в ходе работы, выполненной под руководством В. В. Мигулина (см. [6]). А математическое исследование феномена буферности началось по инициативе Ю. С. Колесова, численными методами изучавшего это явление в параболических системах типа реакция–диффузия [7], а затем и теоретически — в гиперболических уравнениях [8].

Подробное изложение математической теории явления буферности содержится в монографиях [9, 10], а также, например, в статьях [11–14], где приведены и результаты радиотехнического эксперимента, свидетельствующего о физической реализуемости данного феномена.

Оказывается, что феномен буферности — свойство многих распределенных колебательных объектов, математическая модель которых описывается дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического или параболического типа. Этот феномен позволяет глубже понять особенности таких систем, полнее описывать набор допускаемых ими автоколебательных режимов и даже высказать некоторые соображения о пути перехода от порядка к хаосу в природе.

В настоящей работе проводится теоретическое обоснование наличия явления буферности в математической модели одного *LCRG* автогенератора с длинной линией и туннельным диодом, который будем называть *распределенным генератором Ван дер Поля*, поскольку он — естественный аналог классического одноламповогo генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода [3].

3. Рассмотрим радиотехнический объект, принципиальная схема которого представлена на рис. 1. Он содержит две длинные *LCR* линии, емкости C_j, индуктивности L_j и активные сопротивления R_j которых, j = 1, 2, равномерно распределены на длинных отрезках проводников одной и той же длины l (распределенными проводимостями G_j, j = 1, 2, пренебрегаем); между линиями существует взаимоиндукция с коэффициентами M_j, j = 1, 2. Предполагаем, что рис. 2 представляет зависимость тока I в нелинейном элементе (туннельном диоде) от приложенного к нему напряжения u.

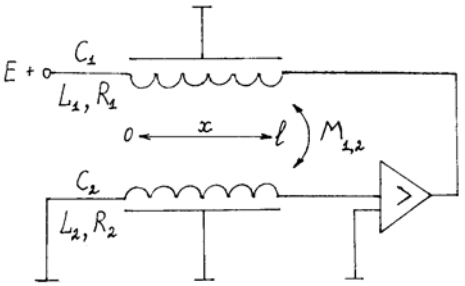

Рис. 1

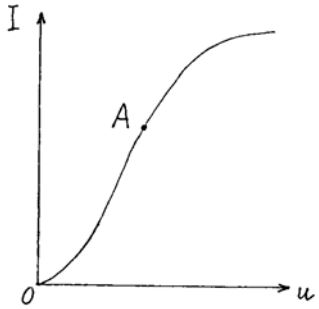

Рис. 2

Пусть u_j, i_j, j = 1, 2, — переменные составляющие напряжения и силы тока в каждой из длинных линий. Опуская описание некоторых физических деталей и вывод (достаточно стандартный; см., например, [15]) необходимых соотношений, сразу запишем систему телеграфных уравнений, связывающую напряжения и силы токов:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -R_1 i_1 - L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M_1 \frac{\partial i_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial i_1}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -R_2 i_2 - L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M_2 \frac{\partial i_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial i_2}{\partial x} = -C_2 \frac{\partial u_2}{\partial t}. \qquad (1)$$

Ее следует рассматривать на отрезке $0 \le x \le l$, дополнив краевыми условиями, получающимися при типичных физических предположениях (идеальность

усилителя и др.) и при общепринятом допущении о кубической аппроксимации характеристики диода в окрестности рабочей точки A:

$$u_1|_{x=0}=0,\ \ u_2|_{x=0}=0,$$

$$i_1|_{x=l}=(s_0u_2+s_1u_2^2-s_2u_2^3)|_{x=l},\ \ i_2|_{x=l}=0; \qquad (2)$$

здесь $s_0>0$, $s_2>0$, а знак s_1 произволен.

Краевую задачу (1), (2) будем изучать лишь в случае $C_2=0$. Именно его и можно рассматривать как математическую модель распределенного генератора Ван дер Поля – аналога классического генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода. В этом случае первая, основная, длинная линия играет роль «колебательного контура в цепи анода», а вторая является вспомогательной, ибо при $C_2=0$ автоматически имеем $i_2(t)\equiv 0$, обеспечивая (через взаимоиндукцию) обратную связь между основной линией и усилителем. Поэтому в задаче (1), (2) положим $i_2(t)=0$, а затем исключим переменную

$$u_2=-\frac{M_2}{L_1}u_1-\frac{M_2R_1}{L_1}\int_0^x i_1(t,s)ds$$

и выполним замены:

$$x/l\to x,\quad t/(l\sqrt{L_1C_1})\to t,\quad u_1=u,\quad i_1=v\sqrt{C_1/L_1}.$$

В итоге интересующая нас математическая модель принимает вид:

$$u_t=-v_x,\quad v_t=-u_x-\varepsilon v,$$

$$u|_{x=0}=0,\quad v|_{x=1}+\beta_0\sigma+\beta_1\sigma^2-\beta_2\sigma^3=0, \qquad (3)$$

где

$$\sigma(t)=u|_{x=1}+\varepsilon\int_0^1 v(t,x)dx,$$

а входящие в задачу параметры выражаются через физические характеристики генератора:

$$\varepsilon=lR_1\sqrt{C_1/L_1},\quad \beta_0=s_0\alpha\sqrt{L_1/C_1},$$

$$\beta_1=-s_1\alpha^2\sqrt{L_1/C_1},\ \ \beta_2=s_2\alpha^3\sqrt{L_1/C_1},\ \ \alpha=M_2/L_1.$$

4. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий ($u(x)$, $v(x)$) краевой задачи (3) возьмем нелинейное многообразие Σ в гильбертовом пространстве $W_2^1([0,1];R^2)$, состоящее из вектор-функций, компоненты которых удовлетворяют краевым условиям из (3). Понятие фазового пространства позволяет обычным образом определять основные понятия математической теории колебаний.

Отметим, что однозначная разрешимость отвечающей (3) смешанной задачи с начальными условиями из Σ устанавливается стандартно: достаточно линейную систему уравнений из (3) проинтегрировать по характеристикам, а затем результат подставить в указанные там же краевые условия.

5. Периодическими по t решениями краевой задачи (3) будем интересоваться при дополнительных предположениях:

$$\beta_0 = \varepsilon/2 + \gamma\varepsilon^2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \tag{4}$$

где ε – малый параметр: $0 \le \varepsilon << 1$, а параметр $\gamma > 0$ – величина порядка единицы. Первое из условий (4) диктуется чисто математическими соображениями (поясняемыми ниже); второе, означающее симметричность характеристики диода, сделано лишь для простоты и не имеет принципиального значения (все результаты сохраняются и при $\beta \ne 0$); третье легко обеспечивается за счет подходящей нормировки переменных u, v.

Подставляя в соотношения (3) равенства (4) и сохраняя во втором краевом условии из (3) только существенные для дальнейшего слагаемые, приходим к краевой задаче:

$$u_t = -v_x, \quad v_t = -u_x - \varepsilon v, \quad u|_{x=0} = 0,$$
$$v|_{x=1} + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma\varepsilon^2\right) u|_{x=1} + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 v\,dx - u^3|_{x=1} = 0. \tag{5}$$

Для построения ее периодических по t решений воспользуемся методом бесконечномерной нормализации, представляющим собой специальный вариант асимптотического метода Крылова—Боголюбова—Митропольского (см., например, [16]) и смыкающимся в алгоритмическом плане с методом квазинормальных форм Ю. С. Колесова (см., например, [17, 18]).

6. С этой целью подставим в краевую задачу (5) ряды:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} u_k(t,\tau,x), \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} v_k(t,\tau,x), \tag{6}$$

здесь $\tau = \varepsilon^2 t$; все коэффициенты являются 4-периодическими по t;

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [z_n(\tau)\exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n(\tau)\exp(-i\omega_n t)] \cdot (-1)^{n-1} \sin(\omega_n x),$$

$$v_0 = i\sum_{n=1}^{\infty} [z_n(\tau)\exp(i\omega_n t) - \bar{z}_n(\tau)\exp(-i\omega_n t)] \cdot (-1)^{n-1} \cos(\omega_n x); \tag{7}$$

$\omega_n = \pi(2n - 1)/2$, $n = 1, 2, \ldots$; комплексные «амплитуды» z_n таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$ (тогда u_0, $v_0 \in W_2^1$ по переменной x). Приравнивая, далее, коэффициенты при одинаковых степенях ε, последовательно определяем u_j, v_j, $j = 1, 2$, и неизвестные амплитуды z_n, $n = 1, 2, \ldots$

Специально подчеркнем: отыскание периодических решений краевой задачи (5) в виде (6) вполне естественно, так как формулы (7) (при фиксированном τ) задают произвольное периодическое решение линейной краевой задачи, получающейся, если в краевой задаче (5) положить $\varepsilon = 0$ и отбросить нелинейности.

На первом шаге описанного алгоритма приходим к краевой задаче:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial u_1}{\partial x} - v_0,$$

$$u_1|_{x=0}=0, \quad v_1|_{x=1}+\frac{1}{2}u_0|_{x=1}=0,$$

решение которой будем искать в виде

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}[z_n A_n(x)\exp(i\omega_n t)+\bar{z}_n\overline{A}_n(x)\exp(-i\omega_n t)],$$

$$v_1=\sum_{n=1}^{\infty}[z_n B_n(x)\exp(i\omega_n t)+\bar{z}_n\overline{B}_n(x)\exp(-i\omega_n t)].$$

Непосредственно убеждаемся, что для определения функций A_n, B_n, $n = 1, 2, ...$ получаются линейные неоднородные краевые задачи, разрешимость которых обеспечивает слагаемое $(\varepsilon/2)u|_{x=1}$ во втором краевом условии из (5). Таким образом, становятся прозрачны мотивы специального сделанного в (4) предположения относительно коэффициента β_0. Несложный анализ упомянутых краевых задач приводит к равенствам:

$$A_n=-\frac{i}{2}(-1)^{n-1}x\cos(\omega_n x),$$

$$B_n=\frac{i}{\omega_n}[A_n'(x)+i(-1)^{n-1}\cos(\omega_n x)], \quad n=1,2,... \tag{8}$$

На втором шаге описанного алгоритма после исключения v_2 приходим к краевой задаче:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_2=-2\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\,\partial\tau}-\frac{\partial u_1}{\partial t},$$

$$u_2|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=1}=\frac{d}{dt}(\gamma u_0|_{x=1}-u_0^3|_{x=1}),$$

решение которой будем искать в виде

$$u_2=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n(x)\exp(i\omega_n t)+\overline{C}_n(x)\exp(-i\omega_n t)].$$

Непосредственно убеждаемся, что, с учетом равенств (8), для определения функций C_n, $n = 1, 2, ...$ получаются линейные неоднородные краевые задачи:

$$C_n''+\omega_n^2 C_n=(-1)^{n-1}\left(2i\omega_n\frac{dz_n}{d\tau}\sin\omega_n x+\frac{\omega_n}{2}z_n x\cos\omega_n x\right),$$

$$C_n(0)=0, \quad C_n'(0)=i\omega_n f_n; \tag{9}$$

здесь f_n – коэффициент при гармонике $\exp(i\omega_n y)$ ряда Фурье функции $\gamma w(\tau,y)-w^3(\tau,y)$, где

$$w(\tau,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[z_n(\tau)\exp(i\omega_n y)+\bar{z}_n(\tau)\exp(-i\omega_n y)]. \tag{10}$$

Обеспечение условий разрешимости краевых задач (9) приводит, в свою очередь, к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$i\omega_n \dot{z}_n = -\frac{1}{8} z_n + i\omega_n f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

для отыскания неизвестных амплитуд z_n, n = 1, 2, ... Наконец, привлекая функцию (10), без особого труда убеждаемся, что счетная система уравнений (11) «сворачивается» в специфическую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau \, \partial y} = -\frac{1}{8} w + (\gamma - 3w^2) \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(\tau, y+2) \equiv -w(\tau, y). \tag{12}$$

7. Строгий смысл изложенным формальным построениям придается по той же схеме, что и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [16]). Именно с помощью построенных отрезков рядов (6) конструируется замена переменных, приводящая исходную краевую задачу (5) с точностью до слагаемых порядка ε к виду (11). Таким образом, система (11), а значит, и краевая задача (12) представляют собой «укороченную» нормальную форму задачи (5). Поэтому справедливо следующее стандартное утверждение о соответствии между их периодическими решениями.

Теорема 1. *Пусть краевая задача (12) имеет периодическое решение* $w = w_0(\xi)$, $\xi = \kappa\tau + y$, *экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное (в метрике* W_2^1*). Тогда найдется такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *в исходной краевой задаче (5) ему отвечает цикл (периодическое по t решение) той же устойчивости с асимптотикой (6). При этом в формулах (7) следует положить* $z_n(\tau) = w_n^0 \exp(i\omega_n \kappa_0 \tau)$, *где* w_n^0, $\overline{w}_n^0$, n = 1, 2, ... , *– коэффициенты Фурье функции* $w_0(\xi)$ *по системе* $\exp(\pm i\omega_n \xi)$, n = 1, 2, ...

Следует подчеркнуть, что примененный метод представляет собой бесконечномерный аналог широко используемого в теории колебаний метода медленно меняющихся амплитуд (см., например, [19]). Специфика этого метода в рассматриваемом случае состоит также и в том, что он применяется к краевой задаче (5), нелинейность в которой не является малой.

8. Выполняя в краевой задаче (12) подходящие нормировки переменных w, τ, y и заменяя τ на t, а y на x, приведем ее к более удобному для анализа виду:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \, \partial x} = w + \lambda(1 - w^2) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(t, x+1) = -w(t, x), \tag{13}$$

где $\lambda = 4\gamma > 0$. Из теоремы 1 следует, что особый интерес представляют ее периодические решения типа бегущих волн:

$$w = \theta(y), \quad y = \sigma t - x, \quad \sigma > 0. \tag{14}$$

Их динамика по λ подробно изучена в работе [20], и поэтому приведем здесь лишь краткий обзор результатов.

Подставляя представление (14) в краевую задачу (13), для нахождения функции $\theta(y)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение, которое после замены $y/\sqrt{\sigma} \to y$ принимает вид:

$$\theta'' + r(\theta^2 - 1)\theta' + \theta = 0, \tag{15}$$

где $r = \lambda/\sqrt{\sigma}$. Заметим, что (15) – это классическое уравнение Ван дер Поля, имеющее при всех $r > 0$ единственное периодическое решение $\theta = H(y, r)$, $H(y, 0) = 2\cos y$, периода $T = T(r)$, $T(0) = 2\pi$, удовлетворяющее также равенству $H(y + T/2, r) \equiv -H(y, r)$. Однако в силу того, что фигурирующая в (14) функция $\theta(y)$ 2-периодична, нас интересует решение уравнения (15) периода $2/\sqrt{\sigma}$. Поэтому для определения неизвестного параметра r получаем уравнение

$$\lambda\, T(r) — 2r = 0. \tag{16}$$

При $\lambda << 1$, применяя к уравнению (16) в точке $\lambda = 0$, $r = 0$ теорему о неявной функции, однозначно определяем его решение $r = r_0(\lambda)$, $r_0(0) = 0$. Вспоминая, далее, о связи уравнения (15) с исходной задачей (13), заключаем, что последняя имеет периодическое решение

$$w = \theta_0(y, \lambda), \quad y = \sigma_0(\lambda)t - x, \tag{17}$$

где

$$\sigma_0(\lambda) = (\lambda / r_0(\lambda))^2, \quad \theta_0(y, \lambda) = H(y/\sqrt{\sigma_0(\lambda)}, r_0(\lambda)).$$

Отметим также, что, наряду с решением (17), у краевой задачи (13) при $\lambda << 1$ существуют и другие периодические решения, получающиеся из построенного с помощью принципа подобия:

$$w = \theta_n(y, \lambda), \quad y = \sigma_n(\lambda)t - x, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{18}$$

где

$$\theta_n = \theta_0((2n+1)y, (2n+1)\lambda), \ \sigma_n(\lambda) = \sigma_0((2n+1)\lambda)/(2n+1)^2.$$

Теорема 2. *Для любого натурального N можно указать такое достаточно малое* $\lambda_N > 0$, *что при всех* $0 < \lambda \le \lambda_N$ *краевая задача (13) имеет экспоненциально орбитально устойчивые периодические решения (18) с номерами* $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

9. Обратим внимание, что найденные решения краевой задачи (13) в форме волн стационарного профиля, описываемых уравнением Ван дер Поля, с физической точки зрения близки к автосолитонам, наблюдаемым, например, в кольцевом лазере в случае самосинхронизации мод (см. [19]). При такой интерпретации уравнение (16) представляет собой аналог нелинейного дисперсионного соотношения. Отметим также, что в нашем случае «основной» период колебаний, т. е. период функции $\theta_0(y, \lambda)$, равен 2, а все функции $\theta_n(y, \lambda)$, $n \ge 1$, в силу принципа подобия имеют периоды $2/(2n+1)$. Отсюда и из теоремы 1 заключаем, что отвечающие решениям (18) периодические по t

решения $u_n(t,x,\varepsilon)$, $v_n(t,x,\varepsilon)$, $n = 0, 1, \ldots$, исходной краевой задачи (5) имеют периоды $T_n(\varepsilon) = 4/(2n+1) + O(\varepsilon^2)$.

В дополнение к теореме 2 заметим: каждое периодическое решение (18) непрерывно продолжается по параметру λ на интервал

$$0 < \lambda < \lambda_n, \quad \lambda_n = \lambda_0/(2n+1), \quad \lambda_0 = 2/(3 - 2\ln 2),$$

а при $\lambda \geq \lambda_n$ становится разрывным. С физической точки зрения это означает, что увеличение энергетического параметра λ в совокупности с эффектом самосинхронизации мод приводит сначала к усложнению формы каждого цикла (18), а затем к полному его разрушению.

Из теорем 1 и 2 следует, что исходная краевая задача (5) при подходящем уменьшении параметров ε, γ может иметь любое фиксированное число устойчивых циклов, т. е. буферность представляет собой характерную особенность динамики распределенного автогенератора Ван дер Поля.

В качестве итога сформулируем на физическом языке специфические особенности феномена буферности. В распределенной колебательной системе, обладающей феноменом буферности, имеется набор устойчивых периодических режимов, причем, подбирая параметры системы должным образом, можно добиться, чтобы этот набор содержал сколь угодно большое конечное число таких режимов. При уже фиксированных значениях параметров реализация какого-либо одного из потенциально возможных автоколебательных режимов происходит в зависимости от сложившихся начальных условий или под влиянием внешних факторов, и самопроизвольный переход системы на другой периодический режим невозможен.

10. Для экспериментальной иллюстрации полученных теоретических результатов был собран автогенератор с распределенными параметрами, соответствующий изображенной на рис. 1 принципиальной схеме и по своим характеристикам близкий к идеальному. Автоколебания, реализующиеся в этом распределенном генераторе Ван дер Поля, снимались с выхода усилителя и наблюдались на экране осциллографа.

При определенном значении коэффициента усиления был зафиксирован периодический режим, изображенный на рис. 3, а при достижении этим коэффициентом некоторого другого значения наблюдались уже два сосуществующих периодических режима (изображенных на рис. 3 и 4). Отношение их периодов равнялось 1 : 3, что позволяло их отождествлять с циклами краевой задачи (5), отвечающими бегущим волнам (18) с номерами $n = 0$ и $n = 1$.

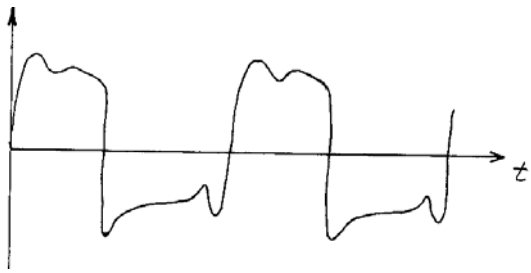

Рис. 3

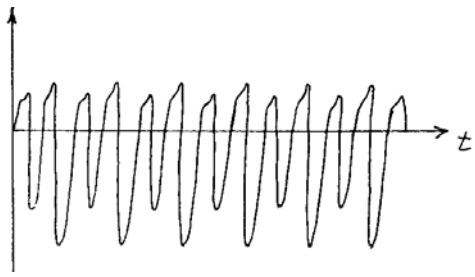

Рис. 4

Особо подчеркнем, что каждый из указанных периодических режимов удавалось «вызвать» на экран осциллографа только за счет попадания на подходящее начальное условие (при фиксированных прочих параметрах). Можно предположить, что запас потенциально реализующихся в рассматриваемом автогенераторе периодических режимов значительно шире. Трудность же их обнаружения связана в первую очередь с узостью области притяжения каждого отдельно взятого режима и с узостью области параметров, в которой имеет место явление буферности.

11. В заключение выскажем следующее эвристическое соображение. Как было показано, изученная краевая задача при подходящем уменьшении параметров имеет любое a priori фиксированное число устойчивых циклов. Если систему с несколькими устойчивыми циклами можно считать детерминированной, то поведение системы с достаточно большим количеством устойчивых циклов естественно рассматривать уже как хаотическое. Следовательно, наличие феномена буферности в каком-то реальном распределенном колебательном объекте следует считать показателем того, что в этом объекте возможен переход от детерминированного поведения к хаотическому. Рассмотренный распределенный автогенератор Ван дер Поля дает конкретный пример такого объекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Витт А. А.* // Журн. технич. физики. 1934. Т. 4. № 1. С. 144–157.
2. *Витт А. А.* // Журн. технич. физики. 1936. Т. 6. № 9. С. 1459–1479.
3. *Андронов А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М., 1937.
4. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний / Перераб. и доп. Н. А. Железцова. — М., 1959.
5. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М., 1981.
6. *Азьян Ю. М., Мигулин В. В.* // Радиотехника и электроника. 1956. Т. 1. № 4. С. 418–427.
7. *Захаров А. А., Колесов Ю. С.* // Нелинейные колебания и экология. — Ярославль, 1984. С. 3–15.
8. *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С.* // ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 12. С. 281–283.
9. *Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. — М., 1995.
10. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравненимй. — М., 1998. (Тр. МИАН. Т. 222.)
11. *Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 638–645.
12. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* // Укр. матем. журн. 1998. Т. 50. № 1. С. 22–35.
13. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* // Успехи матем. наук. 2000. Т. 55. № 2. С. 95–120.
14. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* // Прикл. матем. и механика. 2001. Т. 65. № 2. С. 183–198.
15. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М., 1977.
16. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М., 1974.
17. *Колесов Ю. С.* // Матем. сборник. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
18. *Колесов Ю. С.* // Матем. сборник. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.
19. *Ланда П. С.* Нелинейные колебания и волны. — М., 1997.
20. *Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю.* // Матем. моделирование. 1996. Т. 8. № 1. С. 93–102.

N. Rozov

BUFFERNESS PHENOMENON IN THE MATHEMATICAL MODELS OF SCIENSE AND TECHNOLOGY

A mathematical model of the distributed van der Pol generator is under consideration. The model is described by the linear system of telegraph equations with non-linearity in one of the boundary conditions; the parameters of the model represent physical properties of the generator. The bufferness phenomenon appears in the model under consideration, i.e. simultaneous existence of any a priori defined finite number of stable time-periodic solutions of the considered boundary value problem is discovered under the appropriate choice of parameter values.