В. В. Сушков, А. В. Латышев

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА БГК-УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КАНОНИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Рассматривается граничная задача для семейства интегро-дифференциальных уравнений типа уравнения БГК, понимаемого как линеаризованное уравнение Больцмана с оператором столкновений в форме БГК (Бхатнагара—Гросса—Крука). Ядро уравнения задается как матрица-функция второго порядка, зависящая от параметра. Для получения точного решения используется обобщенный и модифицированный метод канонической матрицы. Исследуются необходимые свойства канонической матрицы, доказывается теорема о полноте системы собственных векторов характеристического уравнения. Доказательство основывается на решении векторной краевой задачи Римана—Гильберта с матричным коэффициентом, диагонализирующая матрица которого имеет точки ветвления в комплексной области.

В работе рассматривается семейство уравнений

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x,\mu)+h(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu'^2}K_l^0(\mu,\mu')h(x,\mu')d\mu', \qquad (1)$$

в которых ядро задается как матрица-функция, параметрически зависящая от l:

$$K_l^0(\mu,\mu')=K_l(\mu')+2\mu\mu' L(\mu'),$$

где

$$K_l(\mu)=\begin{bmatrix}1 & \gamma(\mu^2-1/2)\\ \gamma(\mu^2-1/2) & \gamma^2[(\mu^2-1/2)^2+l]\end{bmatrix},\ L(\mu)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}K_l(\mu),$$

относительно неизвестной вектор-функции $h(x,\mu)$ с элементами $h_1(x,\mu)$ и $h_2(x,\mu)$. При этом величина $\gamma=\sqrt{2/(1+2l)}$, параметр $l\in(0,+\infty)$. В случаях $l=2$ и $l=5/2$ уравнение (1) является результатом линеаризации классического уравнения Больцмана с интегралом столкновений в форме БГК (Бхатнагара, Гросса, Крука) для двухатомных и полиатомных газов соответственно (см., например, [1–3]). Эти уравнения имеют исключительно важное значение в прикладных задачах кинетической теории газа и плазмы, теории аэрозолей, экологии, авиационной и космической промышленности (см. [4]). В частности, в данной работе в качестве элементарного приложения развитой теории

мы получим точное решение так называемой задачи о температурном скачке, впервые рассмотренной В. Смолуховским [5], для случая двухатомного и полиатомного газов.

Однако рассмотрение уравнения (1) для произвольного положительного l представляет и самостоятельный математический интерес, поскольку методика решения подобных задач в литературе до сих пор описана не была. В работах [1–3] решаются конкретные физические задачи, для описания которых используются уравнения, аналогичные (1), но с ядром, зависящим только от μ. Целью же данной работы является применение так называемого метода канонической матрицы к целому семейству векторных уравнений. Впервые метод канонической матрицы был применен А. В. Латышевым [1] для решения задачи Смолуховского в случае одноатомного газа ($l=1$). Суть метода состоит в построении матрицы канонических решений — «канонической матрицы» [6] — уравнения (1) и последующем ее применении для решения конкретных краевых задач. В данной статье мы модифицируем, упрощаем описанный метод, с тем чтобы его можно было использовать для решения не только отдельных физических, но и более общих математических задач. Рассматривается характер зависимости решения от параметра.

1. Постановка краевой задачи

Проведя замену переменной, перепишем (1) в виде

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}Y(x,\mu)+Y(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Q(\mu)\int_{-\infty}^{\infty}Q_l(\mu')Y(x,\mu')e^{-\mu'^2}d\mu'+ \\ +\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mu\int_{-\infty}^{\infty}\mu'\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Y(x,\mu')e^{-\mu'^2}d\mu', \tag{2}$$

здесь $Q(\mu)=\begin{bmatrix}\gamma(\mu^2-1/2) & 1\\ \gamma & 0\end{bmatrix}$, $\quad Q_l(\mu')=\begin{bmatrix}\gamma(\mu'^2-1/2) & l\gamma\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,

а $Y(x,\mu)=Q(\mu)h(x,\mu)$ — новая неизвестная вектор-функция. Следуя Кейзу [7], разделяем переменные в полученном уравнении: $Y_\eta(x,\mu)=e^{-x/\eta}\Phi(\eta,\mu)$, $\eta\in$ C, $\mu\in$ R. Приходим, таким образом, к характеристическому уравнению

$$(\eta-\mu)\,\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta\,Q(\mu)\,n(\eta)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mu\,\eta\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}n_1(\eta),\quad \mu\in \mathrm{R}, \tag{3}$$

где векторы $n(\eta)$ и $n_1(\eta)$ определяются как моменты нулевого и первого порядка:

$$n(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu^2}Q_l(\mu)\Phi(\eta,\mu)d\mu$$

и

$$n_1(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\mu e^{-\mu^2}Q_l(\mu)\Phi(\eta,\mu)d\mu.$$

Вектор-функции $\Phi(\eta,\mu)$ будем называть собственными функциями, а соответствующие им значения η — собственными значениями характеристиче-

ского уравнения (3). Из условия нормировки для вектора $n(\eta)$ получаем, что $n_1(\eta)$ равен тождественному нулю. Т. е., возвращаясь к (2), получаем:

$$(\eta - \mu)\,\Phi\,(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta\,Q\,(\mu)\,n\,(\eta). \tag{4}$$

Из (4) при $\eta \in$ R найдем собственные векторы непрерывного спектра:

$$\Phi(\eta,\mu) = F(\eta,\mu)n(\eta)\,,$$

здесь

$$F(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta\mathbf{P}\frac{1}{\eta-\mu}Q(\mu) + B(\eta)\delta(\eta-\mu) \tag{5}$$

есть собственная матрица непрерывного спектра, где символ $\mathbf{P}\frac{1}{x}$ означает распределение — главное значение интеграла по Коши от x^{-1}, $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака, а $B(\eta)$ — произвольная матрица-функция, определяемая условием нормировки:

$$B(\eta) = e^{\eta^2}Q_l^{-1}(\eta)\Lambda(\eta)\,,\ \eta \in \mathrm{R}.$$

Матрицу-функцию $\Lambda(z) = I + \frac{z}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\frac{Q_l(\mu)Q(\mu)}{\mu - z}d\mu$, где I — единичная матрица, будем называть дисперсионной матрицей, а ее определитель $\lambda(z)$ — дисперсионной функцией задачи. Выписав матрицу Λ в явном виде, получим:

$$\Lambda(z) = \lambda_c(z)Q_l(z)Q(z) + \frac{1}{2}\gamma\begin{bmatrix}\gamma(z^2+1/2) & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

где $\lambda_c(z) = 1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\frac{d\mu}{\mu - z}$ есть дисперсионная функция Черчиньяни [4]. Используя ее разложение в окрестности бесконечно удаленной точки, заметим, что

$$\Lambda(z) = -\frac{1}{z^2}\begin{bmatrix}(5+2l)/(2+4l) & 1/\sqrt{2+4l}\\ 1/\sqrt{2+4l} & 1/2\end{bmatrix} + o\left(\frac{1}{z^2}\right),\ |z| \to \infty\,, \tag{6}$$

а дисперсионная функция $\lambda(z) = \frac{1}{4z^4}\frac{3+2l}{1+2l} + o\left(\frac{1}{z^4}\right)$, $|z| \to \infty$. Последнее разложение показывает, что бесконечно удаленная точка является четырехкратной точкой дискретного спектра, состоящего из нулей дисперсионного уравнения $\lambda(z) = 0$.

Лемма 1. *Вне зависимости от величины параметра $l > 0$ конечных комплексных корней дисперсионное уравнение не имеет.*

Утверждение леммы доказывается с помощью принципа аргумента. Для этого представим дисперсионную функцию в виде произведения

$$\lambda(z) = 2\gamma^2\Omega_1(z)\Omega_2(z), \tag{7}$$

где $\Omega_\alpha(z) = \lambda_c(z) + \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2} - z^2 + (-1)^{\alpha+1} r(z)\right]$, $\alpha = 1, 2$, $r(z) = \sqrt{\left(z^2 - 3/2\right)^2 + 4l}$.

Функции $\Omega_\alpha(z)$ испытывают разрыв на действительной оси. Выделим действительную и мнимую части функций $\Omega_\alpha^\pm(\mu)$ на линии разрыва:

$$\Omega_\alpha^\pm(\mu) = \Omega_\alpha(\mu) \pm i\sqrt{\pi}\,\mu e^{-\mu^2}, \ \mu \in \mathrm{R}. \tag{8}$$

Мнимые части $\Omega_\alpha^\pm(\mu)$ обращаются в нуль лишь в точке $\mu = 0$, в которой произведение $2\gamma^2\Omega_1^\pm(\mu)\Omega_2^\pm(\mu)$ нулю не равно. Следовательно, число ее нулей в комплексной плоскости с разрезом по действительной оси вычисляется посредством обобщенного принципа аргумента (см. [8]):

$$N = \left[\arg\lambda(z)\right]_C / (2\pi) - 2,$$

или, учитывая (7), $N = \nu_1 + \nu_2 - 2$, где $\nu_\alpha = \left[\theta_\alpha\right]_{\tilde{N}} / (2\pi)$, $\theta_\alpha = \arg\Omega_\alpha^+$ — главное значение аргумента, C — замкнутый контур вокруг разреза по действительной оси, ориентированный по часовой стрелке, а выражение $\left[...\right]_C$ означает приращение на C функции, стоящей в квадратных скобках. Так как $\Omega_\alpha(z) = \Omega_\alpha(-z)$ и $\overline{\Omega}_\alpha^+(\mu) = \Omega_\alpha^-(\mu)$, $\mu \in \mathrm{R}$ (черта над символом означает комплексное сопряжение), то $\nu_\alpha = \frac{2}{\pi}\left[\theta_\alpha(\mu)\right]_{(0,+\infty)}$. Исследуя поведение функций $\theta_\alpha(\mu)$, получаем, что $\nu_1 = 0$ и $\nu_2 = 2$. Таким образом, дисперсионное уравнение $\lambda(z) = 0$ не имеет в комплексной плоскости конечных корней. Следовательно, бесконечно удаленная точка является единственной точкой дискретного спектра характеристического уравнения, которой соответствуют четыре собственных вектора:

$$F_1(\mu) = Q(\mu)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \gamma\begin{bmatrix}\mu^2 - 1/2\\1\end{bmatrix}, \ F_2(\mu) = Q(\mu)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{и } F_3(x,\mu) = \gamma(\mu - x)\begin{bmatrix}\mu^2 - 1/2\\1\end{bmatrix}, \ F_4(x,\mu) = (\mu - x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

Из них первые два получаются непосредственно из уравнения (4), а третий и четвертый — с применением техники, разработанной Кейзом и Цвайфелем [7]. Исходя из физических соображений, граничные условия установим в виде:

$$Y(0,\mu) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \ \mu > 0, \tag{9'}$$

$$Y(x,\mu) = Y_{as}(x,\mu), \ \ x \to \infty, \ \mu < 0, \tag{9''}$$

где $Y_{as}(x,\mu)$ задается как линейная комбинация частных решений:

$$Y_{as}(x,\mu) = A_0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + A_1(\mu - x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + A_2\begin{bmatrix}\mu^2 - 1/2\\1\end{bmatrix} + A_3(x - \mu)\begin{bmatrix}\mu^2 - 3/2\\1\end{bmatrix}. \tag{10}$$

2. Построение фактор-матрицы

Здесь мы сформулируем теорему о разложении решения краевой задачи по собственным векторам характеристического уравнения, которую и будем доказывать на протяжении нескольких последующих пунктов.

Теорема. *Задача (2) с граничными условиями (9) имеет единственное решение, представляемое в виде разложения по собственным функциям соответствующего характерического уравнения:*

$$Y(x,\mu) = Y_{as}(x,\mu) + \int_0^\infty F(\eta,\mu)a(\eta)e^{-x/\eta}d\eta, \qquad (11)$$

здесь коэффициент непрерывного спектра $a(\eta)$ *— векторная функция, непосредственно вычисляемая на основании формул (35), (37)–(38),* $F(\eta,\mu)$ *определяется формулой (5), а* $Y_{as}(x,\mu)$ *— соотношением (10), где* A_1, A_3 *— некоторые заданные коэффициенты дискретного спектра, а* A_0, A_2 *задаются формулами (39).*

Положив в формуле (11) $x = 0$, при помощи граничных условий (9) можем записать:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Y_{as}(0,\mu) + \int_0^\infty F(\eta,\mu)a(\eta)d\eta, \quad \mu > 0.$$

Воспользовавшись (5), после очевидных преобразований получим:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mu e^{-\mu^2} Q_l(\mu) Y_{as}(0,\mu) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu e^{-\mu^2} Q_l(\mu) Q(\mu) \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta)}{\eta - \mu} d\eta + \Lambda(\mu)\mu a(\mu) \quad \text{при } \mu > 0. \qquad (12)$$

Введя новую вектор-функцию

$$A(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta)}{\eta - z} d\eta \qquad (13)$$

и применяя к ней и к дисперсионной матрице $\Lambda(z)$ формулы Сохоцкого—Племели, перепишем (12) в виде:

$$\Lambda^+(\mu)\left[A^+(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_{as}(0,\mu)\right] = \Lambda^-(\mu)\left[A^-(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_{as}(0,\mu)\right], \quad \mu > 0. \qquad (14)$$

Применим к уравнению (14) транспонирование. Поскольку матрица $\Lambda(z)$ симметрична, то получится:

$$\left[A^+(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_{as}(0,\mu)\right]^{\mathrm{T}} \Lambda^+(\mu) = \left[A^-(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_{as}(0,\mu)\right]^{\mathrm{T}} \Lambda^-(\mu), \quad \mu > 0, \qquad (15)$$

где символ $[\ldots]^{\mathrm{T}}$ означает транспонирование. Домножив (15) справа на $Q^{-1}(\mu)Q_l^{-1}(\mu)$ и введя обозначение

$$W(z) = \Lambda(z)Q^{-1}(z)Q_l^{-1}(z),$$

получим следующую краевую задачу:

$$\left[A^+(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_{as}(0,\mu)\right]^{\mathrm{T}} W^+(\mu) = \left[A^-(\mu) + Q^{-1}(\mu)Y_{as}(0,\mu)\right]^{\mathrm{T}} W^-(\mu),\ \mu > 0. \quad (16)$$

Причем $W(z)$ можем выписать в явном виде:

$$W(z) = \lambda_C(z)I + \frac{1}{2l}\ddot{I}\ (z),$$

здесь $\ddot{I}\ (z) = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma(z^2 - l - 1/2) \\ 1/\gamma & 1/2 - z^2 \end{bmatrix}.$

Таким образом, для диагонализации матрицы $W(z)$ достаточно привести к диагональному виду матрицу $\ddot{I}\ (z)$. Очевидно, что диагонализирующая матрица $S(z)$ существует и имеет вид

$$S(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{2} + r(z)\right) & \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{2} - r(z)\right) \\ 1/\gamma & 1/\gamma \end{bmatrix}.$$

Теперь $S^{-1}(z)W(z)S(z) = \Omega(z) = diag\{\Omega_1(z), \Omega_2(z)\}$, где по-прежнему

$$\Omega_\alpha(z) = \lambda_c(z) + \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2} - z^2 + (-1)^{\alpha+1} r(z)\right],\ \alpha = 1, 2,\ r(z) = \sqrt{\left(z^2 - 3/2\right)^2 + 4l}.$$

Матрица-функция $S(z)$ является аналитической в комплексной плоскости за исключением точек ветвления $\pm a$, $\pm \bar{a}$, (здесь $a = \sqrt{0{,}75 + 0{,}25\sqrt{9 + 16l}} + i\sqrt{-0{,}75 + 0{,}25\sqrt{9 + 16l}}$), в которых функция $r(z)$ обращается в нуль. Соединим точки a и $\bar{a}$ с $-\bar{a}$ и $-a$ соответственно, полученные разрезы обозначим через Γ_1 и Γ_2 (очевидно, разрезы не пересекают действительной оси). Теперь $S(z)$ является однозначной аналитической матрицей-функцией в плоскости С с разрезом $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Вернемся к нашей задаче. Краевые задачи (15) и (16) имеют один и тот же матричный коэффициент

$$G_0(\mu) = \Lambda^-(\mu)\left[\Lambda^+(\mu)\right]^{-1} = W^-(\mu)\left[W^+(\mu)\right]^{-1},\ \mu > 0.$$

Построим матрицу канонических решений для задачи, сопутствующей нашей, т. е. такую каноническую матрицу, для которой на берегах разреза $(0, +\infty)$ выполняется условие (см., например, [6])

$$\left[X^+(\mu)\right]^{-1}\Lambda^+(\mu) = \left[X^-(\mu)\right]^{-1}\Lambda^-(\mu),\ \mu > 0. \quad (17)$$

Матричный коэффициент задачи (17) обозначим $G(\mu)$:

$$G(\mu) = \Lambda^+(\mu)\left[\Lambda^-(\mu)\right]^{-1},\ \mu > 0.$$

Кроме того, для однозначности матрицы-функции $X(\tau)$ необходимо потребовать, чтобы на дополнительных разрезах

$$X^{+}(\tau) = X^{-}(\tau), \quad \tau \in \Gamma. \tag{18}$$

Будем искать решение задачи в виде

$$X(z) = S(z)U(z)S^{-1}(z), \tag{19}$$

где $U(z) = diag\{U_1(z), U_2(z)\}$ — новая неизвестная диагональная матрица-функция. Тогда (17) перепишется следующим образом:

$$U^{+}(\mu) = \Omega^{+}(\mu)\left[\Omega^{-}(\mu)\right]^{-1} U^{-}(\mu), \quad \mu > 0. \tag{20}$$

Нетрудно заметить, что задача (20) в силу диагональности матриц $U(\mu)$ и $\Omega(\mu)$ эквивалентна двум скалярным краевым задачам:

$$U_{\alpha}^{+}(\mu) = \Omega_{\alpha}^{+}(\mu)\left[\Omega_{\alpha}^{-}(\mu)\right]^{-1} U_{\alpha}^{-}(\mu), \quad \mu > 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{21}$$

Обратимся теперь к условию (18). Из формулы (19) следует, что условие однозначности для матрицы $U(z)$ формулируется в виде

$$U^{+}(\tau)T(\tau) = T(\tau)U^{-}(\tau), \quad \tau \in \Gamma,$$

где
$$T(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

т. е.

$$U_1^{+}(\tau) = U_2^{-}(\tau), \quad U_1^{-}(\tau) = U_2^{+}(\tau), \quad \tau \in \Gamma, \tag{22}$$

где $U_1(\tau)$ и $U_2(\tau)$ — соответствующие диагональные элементы матрицы-функции $U(\tau)$.

Таким образом, матричная краевая задача (17)–(18) эквивалентна векторной краевой задаче (21)–(22), если рассматривать функции $U_1(\tau)$ и $U_2(\tau)$ как элементы некоторой векторной функции. Метод решения таких задач изложен в [1].

Заметив, что $\left|\Omega_{\alpha}^{+}(\mu)\right| = \left|\Omega_{\alpha}^{-}(\mu)\right|$ (элементарно следует из (8)) и переписав задачу (21) в показательной форме, после очевидных преобразований получим:

$$\begin{gathered} \ln\left(U_1(\mu)U_2(\mu)\right)^{+} - \ln\left(U_1(\mu)U_2(\mu)\right)^{-} = 2i\left(\theta_1(\mu) + \theta_2(\mu)\right) + 2\pi k i, \\ \frac{1}{r(\mu)}\ln\left(\frac{U_1(\mu)}{U_2(\mu)}\right)^{+} - \frac{1}{r(\mu)}\ln\left(\frac{U_1(\mu)}{U_2(\mu)}\right)^{-} = \frac{2i}{r(\mu)}(\theta_1(\mu) + \theta_2(\mu)) + 2\pi m i, \end{gathered} \tag{23}$$

при $\mu > 0$, где k, $m \in$ Z. Решение задач (23) будем искать в виде интегралов типа Коши при $k = -2$, $m = 0$. В конечном счете получим:

$$U_{\alpha}(z) = (z - \mu_1)U_{\alpha}^{(0)}(z), \quad \alpha = 1, 2, \tag{24}$$

где
$$U_{1,2}^{(0)}(z) = \exp\left[A(z) \mp r(z)\left(B(z) - R(z)\right)\right], \tag{25}$$

здесь и далее $A(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty a(x)\frac{dx}{x-z}$, $B(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty b(x)\frac{dx}{r(x)(x-z)}$, а величина $R(z)=\int_0^{\mu_l}\frac{dx}{r(x)(x-z)}$, где $a(x)=\theta_1(x)+\theta_2(x)-2\pi$, $b(x)=\theta_2(x)-\theta_1(x)$.

Величина μ_l выбирается таким образом, чтобы функции $U_\alpha(z)$ имели конечный предел при $|z|\to\infty$. Для этого разложим $B(z)$ и $R(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки и потребуем выполнения условия

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{b(x)}{r(x)}dx=\int_0^{\mu_l}\frac{dx}{r(x)},$$

т. е. величина μ_l определяется из задачи обращения Якоби для эллиптических интегралов. В частности, для $l=1$ она составляет 0,4232585948…

Таким образом, неизвестная матрица-функция $U(z)$ полностью построена. Следовательно, в силу (19), найдена и фактор-матрица $X(z)$. Однако очевидно, что она не является канонической, поскольку ее определитель

$$\det X(z)=(z-\mu_l)^2e^{2A(z)}$$

имеет нули второго порядка в точках $z=0$ и $z=\mu_l$. Но тогда каноническая матрица $\hat{O}(z)$ с нормальной формой на бесконечности должна иметь вид

$$\hat{O}(z)=\frac{1}{z^2(z-\mu_l)^2}X(z)P_0(z), \tag{26}$$

где $P_0(z)$ — некоторая полиномиальная матрица, такая, что $\det P_0(z)\propto z^2(z-\mu_l)^2$. При этом в силу (26), естественно, должны выполняться условия:

$$X(\xi)P_0(\xi)=0 \text{ при } \xi=0 \text{ и } \xi=\mu_l \tag{27'}$$

и

$$\frac{d}{d\xi}\left[X(\xi)P_0(\xi)\right]=0 \text{ при } \xi=0 \text{ и } \xi=\mu_l. \tag{27''}$$

Следуя Мусхелишвили [6], запишем: $\hat{O}(z)\to K\ diag\{z^{-\kappa_1},z^{-\kappa_2}\}$, $\det K\neq 0$, при $|z|\to\infty$, где κ_1 и $\kappa_2\geq\kappa_1$ — частные индексы задачи факторизации.

Лемма 2. *Частные индексы задачи факторизации* $\kappa_1=\kappa_2=1$.

Действительно, заметим, что $\kappa_1+\kappa_2=\kappa$, где κ может быть найдено через $\det G(\mu)$; как показано в работе [2], $\kappa=2$. Далее, используя равенство (26) наряду с точным выражением для $S(z)$ и $U_\alpha(z)$, можем утверждать, что при $|z|\to\infty$

$$P_0(z)\to z^3\begin{bmatrix}a_{11}z^{-\kappa_1} & a_{12}z^{-\kappa_2}\\ a_{21}z^{-\kappa_1} & a_{22}z^{-\kappa_2}\end{bmatrix},$$

откуда очевидно, что $\kappa_1 > -2$, поскольку в противном случае вторая колонка $P(z)$ необходимо должна тождественно равняться нулю, что невозможно. Кроме того, из формул (24)–(25) видно, что $U_2(z)$ имеет в точке $z = 0$ нуль второго порядка, т. е. (27) переписывается в виде

$$\begin{bmatrix} \delta & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_0(0) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \delta & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} P_0(\xi) = \mathbf{0} \quad \text{при } \xi = 0$$

и

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} P_0(\mu_l) = \mathbf{0} \quad \text{для формулы (27') в точке } \xi = \mu_l,$$

где величина $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}\left(r(\mu_l) + \mu_l^{\,2} + \frac{1}{2}\right)$, а $\delta = \frac{2}{\gamma}\left(r(0) - \frac{1}{2}\right)^{-1}$. Нетрудно проверить, что $\delta > 0$, в то время как $\alpha < 0$. Если предположить, что элементы второй колонки $P_0(z)$ линейны по z, то из равенств, полученных для $\xi = 0$, автоматически следует отношение $P_{12}^{(0)}(z) / P_{22}^{(0)}(z) = -\delta^{-1}$. Но это противоречит третьему выписанному равенству, полученному для $\xi = \mu_l$, так как $\alpha \neq \delta^{-1}$. Следовательно, вторая колонка $P_0(z)$ должна быть как минимум квадратична по z, т. е. $\kappa_2 \leq 1$. Таким образом, и $\kappa_1 \leq 1$, откуда окончательно получаем, что $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, что и требовалось доказать.

3. Некоторые свойства канонической матрицы

Прежде чем перейти к непосредственному вычислению канонической матрицы задачи (17), сформулируем некоторые свойства, которым она в случае существования должна необходимо удовлетворять. Для этого рассмотрим задачу факторизации:

$$\hat{O}^+(\mu) = G(\mu)\hat{O}^-(\mu), \quad \mu > 0, \tag{28}$$

поставленную в предыдущем разделе. Ее матричный коэффициент

$$G(\mu) = \Lambda^+(\mu)\left[\Lambda^-(\mu)\right]^{-1}, \ \mu > 0.$$

Лемма 3. *Пусть $\hat{O}(z)$ — некоторое каноническое решение задачи (28). Тогда справедлива следующая факторизация дисперсионной матрицы:*

$$\Lambda(z) = \Phi(z)\,\mathbf{P}(z)\Phi^{\mathrm{T}}(-z), \tag{29}$$

где $\mathbf{P}(z)$ — матричный полином, определяемый частными индексами задачи.

Действительно, введем в рассмотрение новую функцию:

$$\Psi(z) = \Lambda(z)\Phi^{-\mathrm{T}}(-z),$$

где символ $\Phi^{-\mathrm{T}}(z)$ означает $\left[\Phi^{\mathrm{T}}(z)\right]^{-1}$. Тогда, рассмотрев $\Psi(-z)$ и воспользовавшись четностью матрицы $\Lambda(z)$, можем утверждать, что граничные значения

$$\begin{aligned}\Psi^{-}(-\mu) &= \Lambda^{+}(\mu)\left[\Phi^{+}(\mu)\right]^{-T},\\ \Psi^{+}(-\mu) &= \Lambda^{-}(\mu)\left[\Phi^{-}(\mu)\right]^{-T},\end{aligned} \quad \mu > 0$$

равны между собой. Действительно, $\Lambda(z) = \Lambda^{T}(z)$, а из равенства (17) автоматически следует, что $\Psi^{-}(-z) = \Psi^{+}(-z)$, $\mu > 0$. Таким образом, $\Psi(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением положительной действительной полуоси, имеет конечный порядок на бесконечности и удовлетворяет условию (28). Следовательно, $\Psi(z)$ представляется в виде:

$$\Psi(z) = \Phi(z)\,\mathbf{P}(z),$$

где $\mathbf{P}(z)$ — некоторая полиномиальная матрица. Возвращаясь к определению $\Psi(z)$, легко получаем требуемую факторизацию.

Поскольку любая матрица канонических решений задачи (17) $\Phi(z)$ должна удовлетворять условию (26), то для нее верно:

$$\Phi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}.$$

Утверждение. *Существует матрица канонических решений задачи (28)* $\Phi_0(z)$*, осуществляющая следующую факторизацию дисперсионной матрицы* $\Lambda(z)$:

$$\Lambda(z) = \Phi_0(z)\Phi_0^{T}(-z).$$

Воспользовавшись разложением (29) и учитывая то, что $\Lambda(z) = \overline{\Lambda(\bar{z})}$ и $\Lambda(z) = \Lambda(-z) = \Lambda^{T}(z)$, для соответствующей полиномиальной матрицы $\mathbf{P}(z)$ получим:

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{P}^{T}(z) \text{ и } \mathbf{P}(z) = \overline{\mathbf{P}(\bar{z})}.$$

Кроме того, по определению канонической матрицы [6], $\Phi(z) \to K\,\mathrm{diag}\{z^{-\kappa_1}, z^{-\kappa_2}\}$, $\det K \neq 0$, при $|z| \to \infty$, т. е. из равенства (29) с учетом (7) получаем соотношение:

$$\mathbf{P}(z) \to -\frac{1}{z^2}\begin{bmatrix} z^{\kappa_1} & 0 \\ 0 & z^{\kappa_2} \end{bmatrix} K^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{5+2i}{2+4i} & \dfrac{1}{\sqrt{2+4i}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2+4i}} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} (-z)^{\kappa_1} & 0 \\ 0 & (-z)^{\kappa_2} \end{bmatrix}.$$

Положим

$$\Phi_0(z) = \Phi(z)K^{-1}\begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{3+2i}{2+4i}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+2i}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$\Phi_0(z)$ — каноническое решение задачи (28) с нормальной формой на бесконечности, причем $\Phi_0(z) = \overline{\Phi_0(\overline{z})}$. Поскольку по доказанному в предыдущем разделе $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, то для $\Phi_0(z)$ получим:

$$\Lambda(z) = \Phi_0(z)\Phi_0^{\mathrm{T}}(-z)$$

и

$$\lim_{|z|\to\infty} z\Phi_0(z) = \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{3+2l}{2+4l}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+2l}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

4. Построение и применение канонической матрицы

Вернемся собственно к доказательству теоремы о разложении решения краевой задачи. Сохраним и далее обозначение $\Phi_0(z)$ для канонического решения с нормальной формой на бесконечности, существование и свойства которого были показаны в предыдущем разделе. Тогда, как было показано в п. 2, матрица-функция $\Phi_0(z)$ представляется в виде:

$$\hat{O}_0(z) = \frac{1}{z^2(z-\mu_1)^2} X(z)P_0(z), \tag{31}$$

здесь $X(z)$ — фактор-матрица, построенная в п. 2, а $P_0(z)$ — полиномиальная матрица со свойствами, доказанными там же. Заметим, что из поведения $P_0(z)$ на бесконечности следует, что

$$P_0(z) = A + Bz + Cz^2,$$

где A, B, C — числовые действительные матрицы 2*2, причем матрица C автоматически находится из формулы (30):

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}q_0 & c_{12}p_0 \\ 0 & c_{22}p_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} p_0 = U_1^{(0)}(\infty) \\ q_0 = U_2^{(0)}(\infty) \end{matrix},$$

здесь и далее $c_{11} = \sqrt{\dfrac{3+2l}{2+4l}}$, $c_{12} = \dfrac{1}{\sqrt{1+2l}}$, $c_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. В новых обозначениях формулы (27')–(27'') перепишутся в виде:

$$\begin{bmatrix} 1/\gamma & \dfrac{1}{2}\left(r(0) - \dfrac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} 1/\gamma & \dfrac{1}{2}\left(r(0) - \dfrac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot B = \mathbf{0} \tag{32}$$

в точке $z = 0$ и

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \cdot (A + B\mu_l) = -\mu_l^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{11}q_0 & (c_{12} + \alpha c_{22})p_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \cdot B + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot (A + B\mu_l) = -2\mu_l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{11}q_0 & \left(c_{12} + \alpha c_{22} + \dfrac{c_{22}}{2}\beta\mu_l\right)p_0 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{33}$$

в точке $z = \mu_l$.

Здесь и далее величины

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2}\left(r(\mu_l) + \mu_l^{\,2} + \frac{1}{2} \right), \;\; \beta = -\frac{\gamma}{2}\left(\frac{2\mu_l^3 - 3\mu_l}{r(\mu_l)} + 2\mu_1 \right). \tag{34}$$

Введем обозначение $\frac{\gamma}{2}\left(r(0) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\delta}$. Нетрудно проверить, что $\delta > 0$. Тогда решение уравнений (32)–(33) запишется в виде:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -\delta a_{11} & -\delta a_{12} \end{bmatrix}, \;\; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ -\delta b_{11} & -\delta b_{12} \end{bmatrix},$$

здесь

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\mu_l^3}{1-\alpha\delta}\left[\frac{\beta\delta}{1-\alpha\delta} + \frac{1}{\mu_l} \right] c_{11} q_0, \\
b_{11} &= -\frac{\mu_l^2}{1-\alpha\delta}\left[\frac{\beta\delta}{1-\alpha\delta} + \frac{2}{\mu_l} \right] c_{11} q_0, \\
a_{12} &= \frac{\mu_l^3}{1-\alpha\delta}\left[\frac{c_{12} + \alpha c_{22}}{1-\alpha\delta}\beta\delta + \frac{c_{12} + (\alpha+\beta)c_{22}}{\mu_l} \right] p_0, \\
a_{12} &= -\frac{\mu_l^2}{1-\alpha\delta}\left[\frac{c_{12} + \alpha c_{22}}{1-\alpha\delta}\beta\delta + \frac{2\left(c_{12} + (\alpha + \frac{\beta}{2})c_{22} \right)}{\mu_l} \right] p_0,
\end{aligned} \tag{35}$$

где α, β определяются по формулам (34), а μ_l — из задачи обращения Якоби для эллиптических интегралов.

Таким образом, искомая полиномиальная матрица найдена. В силу (31) можем утверждать, что окончательно построена и каноническая матрица решений краевой задачи (17) с нормальной формой на бесконечности.

Вернемся к исходной краевой задаче (15). После очевидной подстановки получаем:

$$\left[A^+(\mu) + Q^{-1}(\mu) Y_{as}(0,\mu) \right]^{\mathrm{T}} \Phi_0^+(\mu) = \left[A^-(\mu) + Q^{-1}(\mu) Y_{as}(0,\mu) \right]^{\mathrm{T}} \Phi_0^-(\mu), \;\; \mu > 0.$$

Транспонируя уравнение и учитывая поведение на бесконечности входящих в него векторов и матриц, можем записать его общее решение:

$$A(z) = -Q^{-1}(z) Y_{as}(0,z) + \Phi_0^{-\mathrm{T}}(z) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \;\; \mu > 0, \tag{36}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Вычислим первое слагаемое в формуле (36):

$$Q^{-1}(z) Y_{as}(x,z) = (A_0 + A_1 z) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{A_2}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A_3 z \begin{bmatrix} -1/\gamma \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

А построив матрицу, обратную к найденной полиномиальной, можем записать, что

$$\Phi_0^{-\mathrm{T}}(z) = \frac{1}{c_{11}c_{22}} X^{-\mathrm{T}}(z)\Xi(z), \tag{38}$$

где матрица

$$\Xi(z) = \begin{bmatrix} -\delta(a_{12} + b_{12}z) + c_{22}p_0z^2 & \delta(a_{11} + b_{11}z) \\ -a_{12} - b_{12}z - c_{12}p_0z^2 & a_{11} + b_{11}z + c_{11}q_0z^2 \end{bmatrix}.$$

Разложим в ряд Лорана функции $A(z)$, $B(z)$, $R(z)$, $U_1(z)$, $U_2(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\frac{1}{U_1(z)} = \frac{1}{p_0} + p_{-1}\frac{1}{z} + \ldots, \quad \frac{1}{U_2(z)} = \frac{1}{q_0} + q_{-1}\frac{1}{z} + \ldots, \quad |z| \to \infty,$$

здесь

$$q_0 = e^{B_{-2} - R_{-2}}, \quad q_0q_{-1} = e^{-A_{-1} - B_{-3} + R_{-3}},$$
$$p_0 = e^{-B_{-2} + R_{-2}}, \quad q_0q_{-1} = e^{-A_{-1} + B_{-3} - R_{-3}},$$

где A_k, B_k, R_k — соответствующие коэффициенты разложения в ряд Лорана функций $A(z)$, $B(z)$ и $R(z)$.

Используя формулы (37) и (38), выпишем лорановское разложение в окрестности точки $z = \infty$ правой части равенства (36). Приравнивая нулю коэффициенты при z и z^2 в верхней и нижней строках, как результат получим:

$$C_1 = -\frac{c_{11}}{\gamma}A_3, \quad C_2 = c_{22}A_1,$$

т. е.

$$C_1 = -\frac{\sqrt{3+2l}}{2}A_3, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}A_1. \tag{39}$$

$$\begin{aligned} A_0 = A_1\left[\mu_1 + q_0q_{-1} + \frac{b_{11}}{c_{11}}\left(p_0(1+\delta\gamma) - q_0\delta\gamma\right)\right] + \\ A_3\left[\mu_1 + p_0p_{-1} + \frac{b_{12}}{c_{12}}\left(p_0(1+\delta\gamma) - q_0\delta\gamma\right)\right], \end{aligned} \tag{40'}$$

$$A_2 = A_1\frac{b_{11}}{c_{11}}q_0\delta\gamma - A_3\left[\mu_1 + p_0p_{-1} - \frac{b_{12}}{c_{12}}q_0\delta\right]. \tag{40''}$$

Здесь

$$q_0 = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\tau b(\tau)}{r(\tau)}d\tau - \int_0^{\mu_l}\frac{\tau d\tau}{r(\tau)}\right], \quad p_0 = \exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\tau b(\tau)}{r(\tau)}d\tau + \int_0^{\mu_l}\frac{\tau d\tau}{r(\tau)}\right],$$

$$q_0q_{-1} = \exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left(a(\tau) + \frac{\tau^2 b(\tau)}{r(\tau)}\right)d\tau + \int_0^{\mu_l}\frac{\tau^2 d\tau}{r(\tau)}\right],$$

$$p_0p_{-1} = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left(-a(\tau) + \frac{\tau^2 b(\tau)}{r(\tau)}\right)d\tau - \int_0^{\mu_l}\frac{\tau^2 d\tau}{r(\tau)}\right].$$

Коэффициенты непрерывного спектра разложения (11) также находятся однозначно на основании формул Сохоцкого для функции (13).

Таким образом, теорема полностью доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Латышев А. В.* Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК-уравнения в задаче о температурном скачке // Прикл. матем. и механика. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 581–586.

2. *Сушков В. В.* О вычислении индекса задачи при решении некоторого семейства БГК-уравнений // Информатика и информационные технологии в образовании: Межвуз. сб. науч. тр. — СПб., 2002. Вып. 6. С. 43–46.

3. *Latyshev A. V., Yushkanov A. A.* The temperature jump and slow evaporation in molecular gases // J. of experimental and theoretical physics. 1998. Vol. 87. № 3. P. 518–526 // Mathematical Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics and Control in Condensed Systems, and Other Media. Kluwer Academic / Plenum Publishers. — New York, 1999. P. 3–16.

4. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. — М., 1978.

5. *Smoluchowski V.* Über Wärmeleitung in verdünnten Gasen // Ann. Phys. Chem. 1898. Vol. 64. P. 101.

6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М., 1968.

7. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. — М., 1972.

8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М., 1977.

V. Sushkov, A. Latyshev

ANALYTICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS FOR A FAMILY OF BGK EQUATIONS OBTAINED BY THE APPLICATION OF THE CANONICAL MATRIX METHOD

A family of equations (BGK equation) obtained as a linearization of the Boltzmann equation with the collision operator in the BGK form (Bhatnagar—Gross—Krooks) is considered. The kernel is defined as a matrix function depending on a parameter. The exact solution is based on a generalization and modification of the canonical matrix method. Properties of the matrix of canonical solutions are analyzed. A theorem on the completeness of the system of eigenvectors of the characteristic equation is proved. The proof is reduced to solving a vector boundary value Reedman—Hilbert problem with a matrix coefficient, the diagonalizing matrix of the matrix coefficient having branch points in the complex plane.