

РАЗМЫШЛЕНИЯ НАД РАСШИРЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ СЛУЦКОГО¹

Выдвигая стандартные предпосылки, мы описываем эффект прямого влияния перекрестной ценовой эластичности спроса на поведение потребителя и косвенного влияния — на производителя. При этом используются два вида функции полезности: традиционная асимптотически выпуклая и неасимптотически выпуклая и, следовательно, нетрадиционная. В результате потребитель общепринятой функции, имеющий рациональные намерения, ведет себя нерационально, тем самым подвергая сомнению маргинальную основу анализа фирмы. С другой стороны, иррационально настроенный потребитель нетрадиционной функции действует рационально, подтверждая такого рода маргинальный анализ. Таким образом, подвергается сомнению обоснованность прямой связи между намерениями и действиями потребителя.

Уравнение Слуцкого показывает непосредственное воздействие изменения цены товара на величину потребительского спроса на этот товар². Уравнение делит итоговый результат отношения между ценой товара и величиной спроса на него на два эффекта: эффект замещения и эффект дохода.

Расширенное уравнение Слуцкого, используя тот же метод анализа, изучает перекрестное влияние изменения цены одного товара на решение потребителя приобрести другой товар.

Данная статья, как показывает ее заголовок, ставит своей задачей дополнительный анализ расширенного уравнения Слуцкого. Более конкретно, в статье подвергается проверке утверждение, что «результат изменения цены одного товара на величину спроса на другой товар является неопределенным — все зависит от того, как выглядит карта кривых безразличия»³. На основании такой проверки делаются определенные философские выводы, в частности, по проблеме рациональности.

Уравнение Слуцкого в общей табличной форме

В статье используется традиционная экономическая модель, содержащая два товара (X и Y). Предполагается, что уровень спроса на каждый товар является функцией: дохода потребителя этих товаров (I); предпочтений потребителя, выраженных в функциях полезности (U); цены товара X (P_x) и, наконец, цены товара Y (P_y). Также предполагается, что P_y , I и U в течение рассматриваемого периода остаются постоянными величинами.

Итак: $X = f(P_x, P_y = \text{const}, I = \text{const}, U = \text{const})$; $Y = g(P_x, P_y = \text{const}, I = \text{const}, U = \text{const})$; $U = h(X, Y)$; $I = P_x \cdot X + P_y \cdot Y$.

Для достижения поставленной цели мы представим уравнение Слуцкого (как первоначальное, так и расширенное) сначала в общем табличном виде независимо от формы кривой безразличия. Затем мы проанализируем ситуации перекрестного эффекта, в которых индивидуальные предпочтения потребителя выражены специфическими математическими функциями полезности.

P	Эффект замещения (SE)		Эффект дохода (IE)		Итоговый результат (общий эффект):SE+IE					
I. X и Y—нормальные товары										
P_x	X	Y	X	Y	X			Y		
								$SE > IE$	$SE = IE$	$SE < IE$
								заменители	нет отношения	дополнители
$+$ ⁴	-	+	-	-	-			+	0	-
-	+	-	+	+	+			-	0	+
II. X—нормальный товар, Y—товар низшей категории										
P_x	X	Y	X	Y	X			Y		
								Заменители		
+	-	+	-	+	-			+		
-	+	-	+	-	+			-		
III. X—товар низшей категории, Y—нормальный товар										
P_x	X	Y	X	Y	X			Y		
					$SE > IE$	$SE = IE$	$SE < IE$	SE > I	$SE = IE$	$SE < IE$
								E		
+	-	+	+	-	-	0	+	+	0	-
-	+	-	-	+	+	0	-	-	0	+

Анализ таблицы позволяет сделать следующие два предварительных вывода. Во-первых, утверждение о неопределенности результата взаимодействия между P_x и Y не выдерживает критики в случае, когда X является нормальным товаром, а Y — товаром низшей категории (см. часть II таблицы). Здесь взаимоотношение совершенно определено и не зависит от специфической карты безразличия.

Во-вторых, утверждение о неопределенности подтверждается в ситуации, при которой либо X , и Y относятся к разряду нормальных товаров (см. часть I таблицы), либо X — это товар низшей категории, а Y — нормальный товар (см. часть III таблицы). Более того, последний случай (часть III таблицы) наиболее двусмысленный, поскольку здесь влияние изменений P_x как на X , так и на Y очень запутанное и сложное:

(1) если $SE > IE$ и для X , и для Y , то оба товара являются заменителями по отношению друг к другу;

(2) если $SE < IE$ и для X , и для Y , то оба товара также являются заменителями по отношению друг к другу;

(3) если $SE > IE$ для X и $SE < IE$ для Y , то оба товара являются дополнителями по отношению друг к другу;

(4) если $SE < IE$ для X и $SE > IE$ для Y , то оба товара также являются дополнителями по отношению друг к другу;

(5) во всех остальных случаях между двумя товарами нет никаких взаимоотношений.

Но, в конечном счете, принадлежит ли тот или иной товар к нормальным товарам или к товарам низшей категории, определяется индивидуальными предпочтениями потребителя. Очевидно, что субъективный характер последних предполагает существование бесчисленного количества функций полезности. В настоящей статье мы ограничимся исполь-

зованием двух нелинейных функций полезности, в основу которых положен принцип сокращающихся предельных норм замещения одного товара другим, т. е. принцип выпуклости кривых безразличия по отношению к началу координат.

Индивидуальные случаи расширенного уравнения Слуцкого

Мы проверим обоснованность расширенного уравнения Слуцкого на примере двух категорий функций полезности. Для этого мы используем математический метод, который можно найти у Henderson and Quandt⁵.

Случай первый. Асимптотически⁶ выпуклые функции полезности группы $U = X^n \cdot Y^m$.

Нахождение f_{yx} этой функции в соответствии с постулатом расширенного уравнения Слуцкого⁷ приводит к совершенно определенному выводу: $f_{yx} = 0$. Это означает, что, при прочих равных условиях, для любой нелинейной асимптотически выпуклой функции полезности группы $U = X^n \cdot Y^m$, основывающейся на посылке сокращающихся предельных норм замещения одного товара другим, эффект замещения и эффект дохода в расширенном уравнении Слуцкого всегда компенсируют друг друга. Значит, для этого типа функций полезности товары X и Y не являются ни дополнителями, ни заменителями: между ними (товарами) просто нет никаких отношений⁸.

Из этого следует, что в заданных обстоятельствах ценовая эластичность спроса как на X , так и на Y всегда равна единице. Отсюда в данных условиях кривая спроса на каждый товар представляет собой прямоугольную гиперболу, так что предельный доход (MR) от продажи каждого из этих товаров всегда равен нулю вне зависимости от какого бы то ни было изменения цены любого из этих товаров на рынках несовершенной конкуренции. Поэтому в указанных обстоятельствах теория потребительского спроса, важнейшими предпосылками которой как раз

и являются, во-первых, сокращающиеся предельные нормы замещения одного товара другим и, во-вторых, существование асимптотически выпуклых кривых безразличия теряет свою способность служить основой маргинального анализа.

Случай второй. Неасимптотически⁹ выпуклые функции полезности группы $U = X^n + Y^m$ ¹⁰.

В отличие от первого случая, f_{yx} для неасимптотически выпуклых функций полезности группы $U = X^n + Y^m$ показывает, что перекрестное отношение между изменениями цены товара X (P_x) и величиной потребительского спроса на товар Y является неопределенным и сложным¹¹.

В результате учитывая, что, как было отмечено в п. 10 примечаний, $l > n ? 0$ и $l > m ? 0$, общий эффект влияния P_x на Y зависит исключительно от величины n :

(1) если $n > 0$ (вне зависимости от того, является ли $m > 0$ или $m < 0$), то $f_{yx} > 0$, что означает, что X и Y — товары-заменители: $SE > IE$;

(2) если $n < 0$ (вне зависимости от того, является ли $m > 0$ или $m < 0$), то $f_{yx} < 0$, что означает, что X и Y — товары-дополнители: $SE < IE$;

(3) однако вследствие наших предположений в отношении m и n третий результат ($f_{yx} = 0$), когда X и Y никак не соотносятся друг с другом, исключается: для этой группы функций полезности SE никогда не равно IE .

Анализ расширенного уравнения Слуцкого, примененного к двум типам выпуклых кривых безразличия, в основе которых лежит принцип сокращающихся предельных норм замещения одного товара на другой, дает поистине удивительные результаты. Традиционная, должная «правильно» вести себя асимптотически выпуклая функция полезности группы $U = X^n \cdot Y^m$, поскольку предполагает **рационально настроенно** потребителя, в действительности находит себе выражение в иррациональном **поведении** последнего. Предполагается, что потребитель, когда он движется вдоль

кривой безразличия, испытывает возрастающее нежелание жертвовать тем или иным количеством одного товара для приобретения добавочной единицы другого товара. Предполагается, таким образом, что потребитель никогда не будет испытывать удовольствия от потребления лишь одного товара, находящегося в «корзине». Но **действия** потребителя как раз противоположны его **намерениям**: потребителю совершенно все равно, сохраняется или нет баланс между двумя товарами, им (потребителем) востребованными.

Но нетрадиционная, неасимптотически выпуклая функция полезности группы $U = X^n \cdot Y^m$, от которой ожидают «неправильного» поведения, поскольку она предполагает **иррационально предрасположенного** потребителя, своим итогом имеет **рациональные действия** последнего. Двигаясь вдоль кривой безразличия, потребитель совершенно равнодушен, **решая**, купить ли ему X , и Y в определенной пропорции или купить только X либо только Y . Однако в своем поведении потребитель, ограниченный бюджетной линией, очень чувствителен к любому нарушению равновесия между двумя товарами, которое имеет место вследствие изменения цены.

Но не только потребитель «страдает» от такой непоследовательности между побуждением и поведением. «Страдает» также и производитель. То есть в то время как **рационально нацеленный** потребитель первой функции полезности наносит удар по способности предприятия рынка несовершенной конкуренции увеличить доход путем манипулирования ценами на продукцию, **иррационально мотивированный** потребитель второй функции полезности является единственным, с кем предприятие несовершенной конкуренции, преследующее цель максимизации прибыли, может иметь дело.

Значит ли это, что расширенная функция Слуцкого может быть применена только к «недисциплинированным», «су-

масшедшим» функциям полезности? Более того, если **рациональная мотивация ведет к иррациональному результату, а иррациональная мотивация к рациональному итогу**, должны ли экономисты отказаться от принципа рациональности в намерениях потребителя?

Разумеется, анализ лишь только двух типов функций полезности не может быть достаточным, чтобы так или иначе ответить на поставленные вопросы. Определенный и ясный ответ может быть дан, если, во-первых, пройдет испытание множество видов функций полезности и, во-вторых, результаты этих исследований будут применены к ситуациям, в которых реализуется более двух товаров.

Такую задачу невозможно решить в пределах настоящей статьи, ибо конечная двоякая цель последней более ограничена. Во-первых, используя расширенное уравнение Слуцкого в упрощенной экономике одного потребителя, двух товаров и двух групп функций полезности, продемонстрировать «нелинейные», «безумные» отношения между намерениями и действиями потребителя. Во-вторых, стимулировать поиски «нового» подхода к экономическим проблемам, который может быть найден в «старой» китайской диалектической мудрости.

Таоисты вывели два основных правила поведения людей. Всякий раз, когда ты хочешь чего-то достигнуть, говорят они, ты должен начать с противоположного. Так, Лао Тзу [учит]: «Для того, чтобы вещь сократить, надо обязательно сначала ее расширить. Для того, чтобы ослабить, сначала непременно усиль. Для того, чтобы ниспровергнуть, сначала непременно возвысь. Для того, чтобы взять, сначала непременно отдай. Это называется тонкой мудростью». С другой стороны, всякий раз, когда ты хочешь что-то сохранить, ты должен допустить что-то противоположное в нем: «Изогнись, и ты останешься прямым. Будь пустым, и ты останешься наполненным. Будь усталым, и ты останешься свежим»¹².

ПРИМЕЧАНИЯ

¹ Данная статья представляет собой русскую версию английского текста, который под названием «The Extended Slutsky Equation Revisited» автор опубликовал в семнадцатом томе десятого номера британского журнала *International Journal of Social Economics* (с. 22–27) в 1990 году.

² Здесь и далее слово «товар» будет пониматься в широком смысле — как товар и услуга.

³ Nicholson W. *Intermediate Microeconomics and its Application*. 4th ed. Chicago: The Dryden Press, 1987. С. 97.

⁴ Здесь и далее (+), (–) и (0) означают соответственно увеличение, уменьшение и отсутствие изменений величины переменной.

⁵ Henderson J. M., Quandt R. E. *Microeconomic Theory. A Mathematical Approach*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1980. С. 29.

⁶ В нашем примере «асимптота» представляет собой либо вертикальную, либо горизонтальную ось координат, к которой постоянно и неограниченно приближаются (но которую никогда не пересекают) точки кривой безразличия по мере их «продвижения» в бесконечность.

⁷ Решение находится следующим способом:

(1) Выразим асимптотически выпуклые функции полезности группы $U = X^n \cdot Y^m$ и бюджетной линии $I = P_x \cdot X + P_y \cdot Y$ с помощью функции Лагранжа: $V = X^n \cdot Y^m + \lambda \cdot (I - P_x \cdot X - P_y \cdot Y)$.

(2) Для значений V в стационарном состоянии найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} f_x &= (\partial V / \partial X) = n \cdot X^{n-1} \cdot Y^m - \lambda \cdot P_x = 0; \\ f_y &= (\partial V / \partial Y) = m \cdot Y^{m-1} \cdot X^n - \lambda \cdot P_y = 0; \\ f_\lambda &= (\partial V / \partial \lambda) = I - P_x \cdot X - P_y \cdot Y = 0. \end{aligned}$$

(3) Найдем полные дифференциалы каждого из трех уравнений и приравняем полученные выражения к нулю:

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot X^{n-2} \cdot dX \cdot Y^m + m \cdot n \cdot X^{n-1} \cdot Y^{m-1} \cdot dY - \lambda \cdot dP_x - P_x \cdot d\lambda &= 0; \\ m \cdot (m-1) \cdot Y^{m-2} \cdot dY \cdot X^n + m \cdot n \cdot Y^{m-1} \cdot X^{n-1} \cdot dX - \lambda \cdot dP_y - P_y \cdot d\lambda &= 0; \\ dI - P_x \cdot dX - X \cdot dP_x - P_y \cdot dY - Y \cdot dP_y &= 0. \end{aligned}$$

(4) Перегруппируем каждое из трех уравнений:

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot X^{n-2} \cdot Y^m \cdot dX + m \cdot n \cdot X^{n-1} \cdot Y^{m-1} \cdot dY - P_x \cdot d\lambda &= \lambda \cdot dP_x; \\ m \cdot n \cdot Y^{m-1} \cdot X^{n-1} \cdot dX + m \cdot (m-1) \cdot Y^{m-2} \cdot X^n \cdot dY - P_y \cdot d\lambda &= \lambda \cdot dP_y; \\ -P_x \cdot dX - P_y \cdot dY &= -dI + X \cdot dP_x + dP_y + Y \cdot dP_y. \end{aligned}$$

(5) Используя правило Крамера, найдем dY :

$$dY = \frac{n \cdot (n-1) \cdot X^{n-2} \cdot Y^m \cdot (-P_y \cdot dI + P_y \cdot X \cdot dP_x + P_y \cdot Y \cdot dP_y) + \lambda \cdot P_x \cdot P_y \cdot dP_x - m \cdot n \cdot Y^{m-1} \cdot X^{n-1} \cdot (-P_x \cdot dI + P_x \cdot X \cdot dP_x + P_x \cdot Y \cdot dP_y) - P_x^2 \cdot \lambda \cdot dP_y}{X^{n-2} \cdot Y^{m-2} \cdot [-n \cdot (n-1) \cdot Y^2 \cdot P_y^2 + 2 \cdot m \cdot n \cdot X \cdot Y \cdot P_x \cdot P_y - P_x^2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot X^2]}.$$

(6) Найдем $f_{yx} = (dY/dP_x)$ (согласно предположению, что изменяется лишь P_x):

$$f_{yx} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot X^{n-1} \cdot P_y \cdot Y^m + \lambda \cdot P_x \cdot P_y - P_x \cdot m \cdot n \cdot Y^{m-1} \cdot X^n}{X^{n-2} \cdot Y^{m-2} \cdot [-n \cdot (n-1) \cdot Y^2 \cdot P_y^2 + 2 \cdot m \cdot n \cdot X \cdot Y \cdot P_x \cdot P_y - P_x^2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot X^2]}.$$

(7) Так как в (2) $f_x = (\partial V / \partial X) = n \cdot X^{n-1} \cdot Y^m - \lambda \cdot P_x = 0$, то

$$\lambda = \frac{n \cdot X^{n-1} \cdot Y^m}{P_x}.$$

(8) Подставим это значение λ в выражение (6) и соответственно упростим его:

$$f_{yx} = \frac{n \cdot X \cdot Y \cdot (n \cdot P_y \cdot Y - m \cdot P_x \cdot X)}{-n \cdot (n-1) \cdot P_y^2 \cdot Y^2 + 2 \cdot m \cdot n \cdot P_x \cdot P_y \cdot X \cdot Y - m \cdot (m-1) \cdot P_x^2 \cdot X^2}$$

(9) Так как в (2) $f_y = (\partial V / \partial Y) = m \cdot Y^{m-1} \cdot X^n - \lambda \cdot P_y = 0$, то

$$\lambda = \frac{m \cdot Y^{m-1} \cdot X^n}{P_y} = \frac{n \cdot X^{n-1} \cdot Y^m}{P_x}$$

и, упростив, мы получаем

$$n \cdot P_y \cdot Y = m \cdot P_x \cdot X.$$

(10) Поскольку в результате числитель в выражении (8) равен нулю, постольку $f_{yx} = 0$.

⁸ Можно, конечно, возразить, что иного и нельзя было ожидать от функции типа производственной функции Кобб-Дугласа. Но все дело в том, что отличительной особенностью производственной функции Кобб-Дугласа является то, что сумма величин параметров, выраженных степенями m и n , равна единице: $m + n = 1$. В разбираемом нами «непроизводственном» случае такое условие совершенно не обязательно.

⁹ В нашем примере «неасимптота» есть либо вертикальная, либо горизонтальная ось координат, к которой приближаются и которую в конечном счете пересекают точки кривой безразличия.

¹⁰ В отличие от предыдущего случая, где ни на m , ни на n не накладывалось ограничений, в данном примере для сохранения условия нелинейной выпуклости по отношению к началу координат требуется, чтобы $m < 1$, $n < 1$, $m \neq 0$ и $n \neq 0$.

¹¹ Решение находится в той же последовательности и тем же способом, что и для асимптотически выпуклых функций полезности класса $U = X^n \cdot Y^m$:

(1) Выразим неасимптотически выпуклые функции полезности группы $U = X^n + Y^m$ и бюджетной линии $I = P_x \cdot X + P_y \cdot Y$ с помощью функции Лагранжа:

$$V = (X^n + Y^m) + \lambda \cdot (I - P_x \cdot X - P_y \cdot Y).$$

(2) Для значений V в стационарном состоянии найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} f_x &= (\partial V / \partial X) = n \cdot X^{n-1} - \lambda \cdot P_x = 0; \\ f_y &= (\partial V / \partial Y) = m \cdot Y^{m-1} - \lambda \cdot P_y = 0; \\ f_\lambda &= (\partial V / \partial \lambda) = I - P_x \cdot X - P_y \cdot Y = 0. \end{aligned}$$

(3) Найдем полные дифференциалы каждого из трех уравнений и приравняем полученные выражения к нулю:

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot X^{n-2} \cdot dX - \lambda \cdot dP_x - P_x \cdot d\lambda &= 0; \\ m \cdot (m-1) \cdot Y^{m-2} \cdot dY - \lambda \cdot dP_y - P_y \cdot d\lambda &= 0; \\ dI - P_x \cdot dX - X \cdot dP_x - P_y \cdot dY - Y \cdot dP_y &= 0. \end{aligned}$$

(4) Перегруппируем каждое из трех уравнений:

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot X^{n-2} \cdot dX - P_x \cdot d\lambda &= \lambda \cdot dP_x; \\ m \cdot (m-1) \cdot Y^{m-2} \cdot dY - P_y \cdot d\lambda &= \lambda \cdot dP_y; \\ -P_x \cdot dX - P_y \cdot dY &= -dI + X \cdot dP_x + Y \cdot dP_y. \end{aligned}$$

(5) Используя правило Крамера, найдем dY :

$$dY = \frac{n \cdot (n-1) \cdot X^{n-2} \cdot P_y \cdot (-dI + X \cdot dP_x + Y \cdot dP_y) + \lambda P_x \cdot P_y \cdot dP_x - P_x^2 \cdot \lambda \cdot dP_y}{n \cdot (1-n) \cdot X^{n-2} \cdot P_y^2 + m \cdot (1-m) \cdot Y^{m-2} \cdot P_x^2}$$

(6) Найдем $f_{yx} = (dY/dP_x)$ (согласно предположению, что изменяется лишь P_x):

$$f_{yx} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot X^{n-1} \cdot P_y + \lambda \cdot P_x \cdot P_y}{n \cdot (1-n) \cdot X_{n-2} \cdot P_y^2 + m \cdot (1-m) \cdot Y^{m-2} \cdot P_x^2}.$$

(7) Так как в (2) $f_x = (\partial V/\partial X) = n \cdot X^{n-1} - \lambda \cdot P_x = 0$, то

$$\lambda = \frac{n \cdot X^{n-1}}{P_x}.$$

(8) Подставим это значение λ в выражение (6) и соответственно упростим его:

$$f_{yx} = \frac{n^2 \cdot X^{n-1} \cdot P_y}{n \cdot (1-n) \cdot X_{n-2} \cdot P_y^2 + m \cdot (1-m) \cdot Y^{m-2} \cdot P_x^2}.$$

(9) Так как в (2) $f_y = (\partial V/\partial Y) = m \cdot Y^{m-1} - \lambda \cdot P_y = 0$, то

$$\lambda = \frac{m \cdot Y^{m-1}}{P_y} = \frac{n \cdot X^{n-1}}{P_x}$$

и, упростив, мы получаем

$$n \cdot X^{n-1} \cdot P_y = m \cdot Y^{m-1} \cdot P_x.$$

(10) Заменяя числитель и левую часть знаменателя в выражении (8) на $(m \cdot Y^{m-1} \cdot P_x)$ в выражении (9), получим

$$f_{yx} = \frac{n \cdot X \cdot Y}{(1-n) \cdot P_y \cdot Y + (1-m) \cdot P_x \cdot X}.$$

¹² Capra F. The Tao of Physics. An Exploration of the Parallels between Modern Physics and Eastern Mysticism, 2nd ed., revised and updated. Bolder, Colorado: Shambala, 1983. С. 115.

E. Raichlin

THE EXTENDED SLUTSKY EQUATION REVISITED

This article, making standard assumptions, tests the effect that cross price elasticity of demand has on consumer's (directly) and producer's (indirectly) behavior. Two classes of utility functions are employed: one is asymptotically convex and, hence, conventional; another is nonasymptotically convex and, therefore, unconventional. As a result, the rationally intended consumer of the conventional function behaves irrationally, questioning the marginal base of the analysis of the firm. The irrationally contemplating consumer of the unconventional function acts rationally, upholding such marginal analysis. Thus, the validity of the direct relation between intentions and actions is doubted.