Ф. А. Ихсанова

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ MATHEMATICA

Работа представлена кафедрой алгебры и геометрии
Елабужского государственного педагогического университета.
Научный руководитель – доктор педагогических наук, профессор Т. В. Капустина

В статье рассматриваются вопросы организации практических занятий в техническом вузе с применением среды Mathematica. Перечислены методические цели применения компьютерной поддержки и ее роль в обучении. Предложена новая методика решения задач по двум темам программы по математике в техническом вузе (в частности, приемы создания и использования учебной анимации).

The article considers the questions of practical exercise organisation in a technical college using the Mathematica environment. Methodical purposes of computer support application and its role in training are listed. The author offers a new technique of problem solving on the two themes of the mathematics syllabus in a technical college (in particular, techniques of creation and use of educational animation).

Многие процессы, описываемые в науке, технике и других областях человеческой деятельности, требуют подготовки специалистов, в совершенстве владеющих как методами проведения сложных математических расчетов, так и активно использующих новейшие информационные технологии.

Наличие систем компьютерной математики, которые имеют большой потенциал и как педагогические программные продукты, обусловливает необходимость переориентации учебного процесса. Правильно организованное занятие с применением одной из компьютерных математических систем (КМС) может стать значительно эффективнее, если активно использовать возможности автоматического проведения трудоемких математических выкладок.

Специфика самого предмета «математика» такова, что основными в процессе обучении являются наглядно-вербальные средства в различных сочетаниях. Передача части обучающих функций техническому устройству преобразует деятельность и преподавателя, и студента, изменяя не только ее содержание и операционную структуру, но также в значительной мере систему взаимоотношений между ними. Современные системы компьютерной математики резко повышают интерес учащихся к математике, поскольку облегчают процесс ее усвоения и сочетают его с увлекательной работой с современной вычислительной техникой. Новый подход к изучению конкретных тем математики с использованием КМС, учитывающий непроизвольную тягу студентов к работе на персональном компьютере, в соответствии с требованиями жизни подводит их к самостоятельному приобретению новых знаний и умений, повышает эффективность познавательной деятельности, развивает мышление и улучшает результативность учебного процесса.

В настоящее время уделяется большое внимание компьютеризации обучения, в частности, при проведении лабораторных работ, чтении лекций и при дистанционном обучении. Как средство обучения среда Mathematica рассмотрена в работе Т. В. Капустиной, где дано описание этой системы и методика ее применения в изучении геометрии. В диссертационной работе С. А. Дьяченко дается методика проведения лабораторных работ с применением системы Mathematica. Е. А. Дахер в своей диссертационной работе раскрывает возможности достижения высокого уровня усвоения знаний в экономическом вузе через лабораторные работы, введение новых форм лекционных занятий и форм дистанционного обучения.

Однако улучшающееся оснащение вузов компьютерами, необходимость подготовки квалифицированного специалиста, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, вступают в противоречие с малым объемом обязательных лабораторных занятий, что приводит к необходимости регулярного проведения практических занятий по математике с применением компьютерных сред.

Таким образом, с учетом поставленной цели обучения, структуры и содержания темы, а также особенностей мыслительной деятельности студентов приходим к необходимости применения компьютерной поддержки практических занятий по математике.

Деятельность преподавателя при проведении практических занятий с применением компьютерной математической среды заключается в следующем:

1) подготовка педагогических программных продуктов по соответствующей теме:

а) подборка предметных и учебных задач, подлежащих решению по новой методике с компьютерной поддержкой;

б) разработка новой методики решения выбранных задач с компьютерной поддержкой;

в) осуществление подготовки к практическому применению новой методики;

2) инструктаж студентов по методике работы с ПК.

Признано, что внедрение новых информационных технологий сдерживается не столько вследствие недостаточной оснащенности вузов этой техникой, сколько по причине отставания методики преподавания от уровня технических решений и требований учебного процесса.

В результате проводимых практических занятий с применением системы Mathematica на компьютере нами установлено, что вычисления, проводимые на компьютере, должны периодически сочетаться с живым словом преподавателя. Основная роль на занятии отводится преподавателю, и только в отдельные моменты занятия работа в системе Mathematica должна помочь студенту в усвоении знаний.

При изучении некоторых тем громоздкие предварительные вычисления могут вызвать уже на первой стадии работы сомнения в правильности выполняемых выкладок. Чтобы нейтрализовать возникший негативный настрой, система Mathematica помогает в проверке проводимых построений и вычислений.

Преподаватели математики знают, что тема «Исследование функций и построение графиков» является одной из самых трудоемких в плане проведения множества вычислений; особенно это относится к функциям, заданным параметрически и в полярной системе координат. Внесение изменений в методику проведения этих занятий назрело давно. Умение строить графики функций, заданных параметрически, в полярной системе координат, доведение этого построения до уровня хороших навыков необходимо для студента по многим причинам. Хорошие навыки пригодятся ему в дальнейшем в прикладных задачах при вычислении площадей плоских фигур. При этом половина отведенного времени, а то и более тратится студентом на процесс построения фигур. Опытный преподаватель знает, что при нанесении точек графика на координатную плоскость и последующем их соединении у большинства студентов, в силу различных причин, возникают затруднения по поводу того, каким же образом соединять точки (особенно это касается сложных кривых с самопересечениями). Применение анимации в среде Mathematica при построении графиков функций, показ построения графиков сложных функций в динамике позволяет снять психологический барьер и ведет к приобретению устойчивых навыков построения фигур, их дальнейшего исследования.

При изучении этой темы с использованием компьютера достигаются следующие развивающие цели:

1) индивидуализация и дифференциация процесса обучения (за счет возможности поэтапного продвижения к цели);

2) осуществление самоконтроля и самокоррекции;

3) высвобождение учебного времени без ущерба качеству усвоения за счет выполнения трудоемких вычислений;

4) визуализация изучаемых процессов и наглядная демонстрация их динамики;

5) использование нетрадиционных форм подачи и контроля материала для оживления процесса обучения и создания тем самым непринужденной обстановки в учебной группе.

Новую методику решения задачи исследования функции, заданной параметрически, и построения ее графика (в частности, прием создания анимации) можно предложить студентам на демонстрационном примере, заранее подготовленном преподавателем.

З а д а ч а. Построить график параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases} \quad \text{при} \quad t \in [-3;3].$$

Р е ш е н и е. В данном случае вначале необходимо провести исследование некоторых ее свойств.

1. Область определения: $x \geq 0$ при любом t, линия расположена в правой полуплоскости относительно оси ординат.

2. Точки пересечения с осями координат. $y = 0 \iff 3t - t^3 = 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \pm\sqrt{3} \end{array}\right. \quad x = 0 \iff t = 0;$$

следовательно, $M_1(0;0)$, $M_2(9;0)$

3. Промежутки знакопостоянства:

$$y(t)>0 \Leftrightarrow 3t-t^3>0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t<-\sqrt{3} \\ 0<t<\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Следовательно, получаем, что

$$y>0 \quad \Leftrightarrow \quad t\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$$

$$y<0 \quad \Leftrightarrow \quad t\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty).$$

Методика построения графиков функций, заданных параметрически, с помощью среды Mathematica отличается от традиционной тем, что можно провести исследование экстремумов, промежутков монотонности, выпуклости и вогнутости, точек перегиба с помощью вычислительных средств среды, тратя на это минимум времени. А правильно соединить точки графика, заданные таблицей (составленной опять-таки при помощи Mathematica), поможет анимация, стандартная программа для которой одна и та же для всех задач подобного типа и заложена в демонстрационном примере.

Следует отметить, что при создании учебной анимации математических процессов необходимо учитывать, является ли процесс непрерывным или дискретным. В статье рассматривается анимация непрерывного процесса (изменения значения скалярной функции в зависимости от непрерывного изменения скалярного аргумента на заданном числовом промежутке).

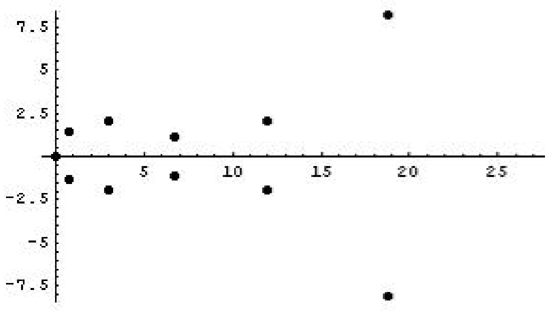
В рассматриваемой задаче для экономии времени студентов при составлении таблицы значений t, x, y применим систему Mathematica. Все эти дополнительные вычисления в демонстрационном примере можно оформить в виде гиперссылки, для получения которой ставим курсор мыши на выделенное слово и нажимаем на левую клавишу мыши. Тогда в гиперссылке студенты увидят следующие результаты вычислений (входные ячейки печатаются полужирным шрифтом, выходные – светлым):

Table $\left[\{x[t]==3*t^2, y[t]==(3*t-t^3),\{t,-3,3,0.5\}\right]$

{{x[–3]=27,y[–3]=18}, {x[–2.5]=18.75, y[–2.5]=8.125}, {x[–2.]=12, y[-2.]=2.},{x[-1.5]=6.75, y[-1.5]=-1.125}, {x[-1.]=3,y[-1.]=-2.},{x[-0.5]=0.75,y[-0.5]=1.375}, {x[0.]= 0, y[0.]=0.}, {x[0.5]=0.75, y[0.5]=1.375},{x[1.]=3.,y[1.]=2.},{x[1.5]=6.75,y[1.5]=1.125}, {x[2.]=12.,y[2.]=-2.}, {x[2.5]=18.75,y[2.5]=-8.125},{x[3.]=27.,y[3.]=-18.}}

Отметим эти точки на координатной плоскости.

ListPlot[Table[{3t²,(3t-t³)},{t,-3,3,0.5}], PlotStyle → PointSize[0,02]]



Практика показывает, что, отмечая эти точки, студенты часто не знают, в какой последовательности следует их соединять. Эта неопределенность полностью исчезает с применением системы Mathematica. Последовательность соединения точек показана на рис.1:

Далее рассмотрим демонстрационный пример построения графика функции, заданной в полярной системе координат.

З а д а ч а. Построить график функции $\rho = 2\cos\varphi$.

Р е ш е н и е. Составим таблицу значений координат φ, ρ при $\varphi\in[0, 2\varphi]$ с шагом $\varphi = \pi/8$

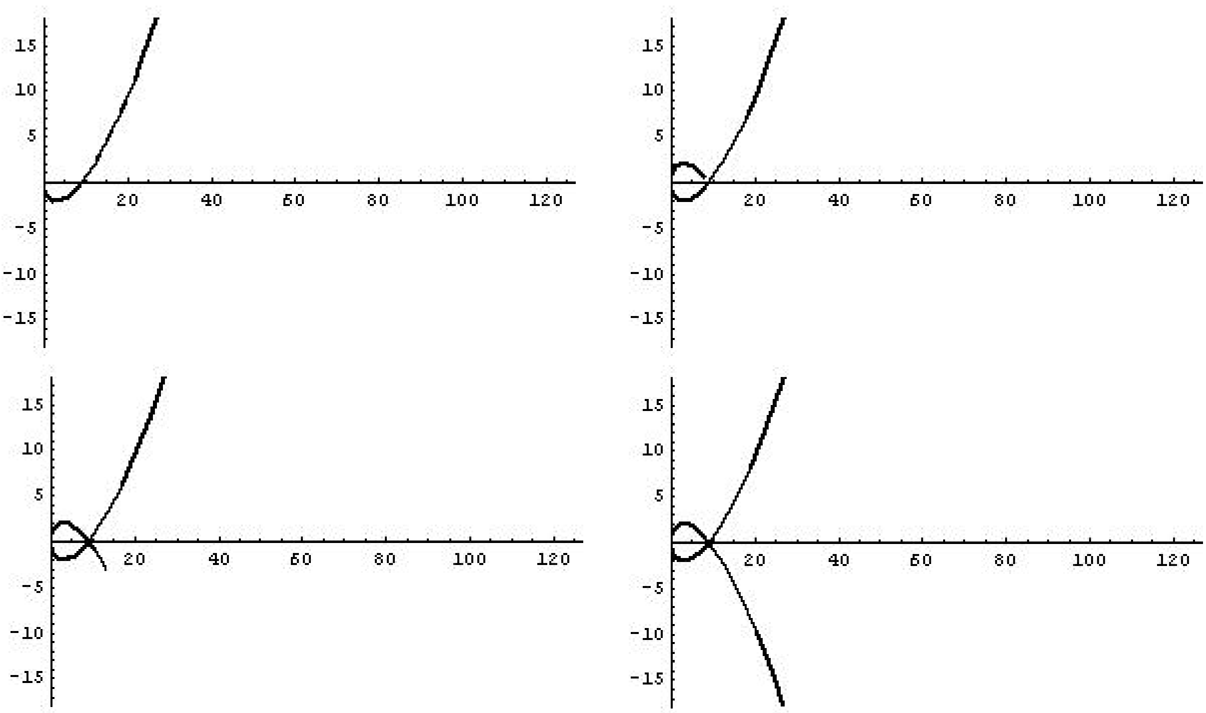


Рис. 1. Последовательность соединения точек на графике

Table $[\rho[\varphi] == 2 * Cos[\varphi], \{\varphi, 0, 2 * \pi, \frac{\pi}{8}\}]$

$\rho[0] = 2, \rho[0.392699] = 1.84776, \rho[0.785398] = 1.41421,$
$\rho[1.1781] = 0.765367, \rho[1.5708] = 1.22461 \times 10^{-16}, \rho[1.9635] = -0.765367,$
$\rho[2.35619] = -1.41421, \rho[2.74889] = -1.84776, \rho[3.14159] = -2., \rho[3.53429] = -1.84776,$
$\rho[3.92699] = -1.41421, \rho[4.31969] = -0.765367, \rho[4.71239] = -3.67382 * 10^{-16},$
$\rho[5.10509] = 0.765367, \rho[5.49779] = 1.41421, \rho[5.89049] = 1.84776, \rho[6.28319] = 2.$

Студенты в своих тетрадях отмечают полученные точки в полярной системе координат и соединяют их плавной кривой. Для демонстрации правильного порядка соединения точек в системе Mathematica студентам следует курсор мыши подвести под один из графиков и нажать на левую клавишу мыши. На рисунке появится в динамике построение следующего графика (рис. 2):

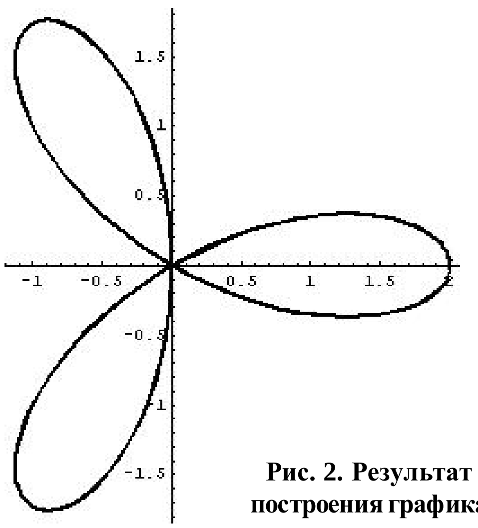


Рис. 2. Результат построения графика

К одной из трудоемких тем практических занятий относится тема «Приложения определенного интеграла». Решение задачи на вычисление площади плоской фигуры состоит из трех основных этапов: вначале надо построить кривые в различных системах координат и увидеть полученную кривую, следующим является нахождение точек пересечения кривых, и только после этого с помощью определенного интеграла вычисляется площадь полученной фигуры. Студент на каждом из этих этапов вычислений может проверить результат вычислений в системе Mathematica. Преподаватель в течение всего занятия должен следить за тем, чтобы:

• компьютер помогал студенту понимать математику;

• механизмы вычисления, представленные КМС, не затушевывали математическое понимание предмета;

• математическая система не ослабляла способность вычислять вручную.

Студенты знакомятся с демонстрационным примером решения одной задачи подобного типа и по этому образцу сами могут применить новую методику решения с использованием среды Mathematica.

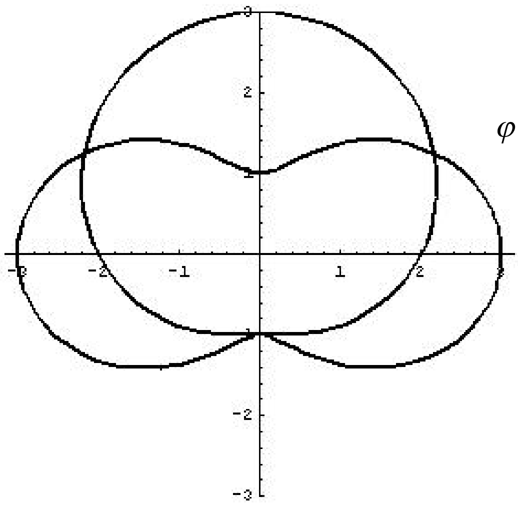
З а д а ч а. Найти площадь части фигуры, ограниченной линией ρ=2+cos2φ , лежащей вне линии ρ=2+sinφ.

Р е ш е н и е.

1. Построение графиков функций.

Студенты самостоятельно рисуют фигуру, затем с помощью гиперссылки проверяют правильность своего построения:

```
<<Graphics `Graphics`
PolarPlot[{2+Cos[2φ],2+Sin[φ]},{φ,0, 2 },PlotRange →{–3, 3}, PlotStyle → Thickness
[ 0.01]]
```



$\varphi \to -\frac{\pi}{2}$ $\varphi \to \frac{\pi}{6}$

2. Нахождение точек пересечения кривых ρ_1=2+cos2φ, ρ_2=2+sinφ производится путем приравнивания правых частей уравнений и нахождения из полученного уравнения:

$$2+\cos 2\varphi = 2+2+\sin\varphi \Leftrightarrow \cos 2\varphi - \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos^2\varphi - \sin^2\varphi - \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-\sin^2\varphi - \sin^2\varphi - \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\varphi + \sin\varphi - 1 = 0$$

Обозначим sin φ = t, тогда имеем

$$2t^2+t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-1 \\ t_2=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\varphi=-1 \\ \sin\varphi=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi=-\frac{\pi}{2}+2\pi n \\ \varphi=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n. \end{array}\right.$$

По условию задачи получаем

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{6}, \quad \varphi_3 = -\frac{5\pi}{6}.$$

Определим точки пересечения двух кривых в системе Mathematica.
Студенты могут воспользоваться гиперссылкой, которая имеет вид:
Solve $[2 + Cos[2 * \varphi] == 2 + Sin[\varphi], \varphi]$

$$\{\{\varphi \to -\frac{\pi}{2}\}\{\varphi \to \frac{\pi}{6}\}\{\varphi \to \frac{5\pi}{6}\}\}$$

3. Найдем площадь фигуры.

$$S=2 \cdot \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\rho_1^2 - \rho_2^2)d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}((2+\cos 2\varphi)^2 - (2+\sin\varphi)^2))d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(4+4\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi - 4 - 4\sin\varphi - \sin^2\varphi)d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(4\cos 2\varphi - 4\sin\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2})d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\frac{9}{2}\cos 2\varphi - 4\sin\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2})d\varphi = (\frac{9}{4}\sin 2\varphi + 4\sin\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{51\sqrt{3}}{16}$$

Проверим результаты вычислений площади фигуры в Mathematica.

Затрудняющиеся студенты пользуются гиперссылкой:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}((2+Cos[2\varphi])^2 - (2+Sin[\varphi])^2)d\varphi$$

$$\frac{51\sqrt{3}}{16}$$

Таким же образом с помощью компьютерной поддержки можно продолжить изучение данной темы (решение задач на нахождение длин дуг кривых, объемов пространственных тел и т. д.). В результате подобной организации практического занятия достигаются условия комфортности получения знаний по данной теме. Помощь системы Mathematica приводит к более быстрому усвоению, значительно увеличивается темп и эффективность занятия. Высвобождение времени вполне закономерно приводит к изменению содержания математической дисциплины в техническом вузе в сторону практического применения математики к задачам физики и техники.

Рассмотрим следующую физическую задачу, в которой для упрощения вычислений применяется разложение в ряд.

З а д а ч а. Найти период полураспада радия Ra^{226} если известно сколько ядер распадаются в 1 кг радия за 1 секунду.

Р е ш е н и е. По закону радиоактивного распада $N=N_0e^{-\lambda t}$, где N_0 – начальное число нераспавшихся ядер в момент времени $t = 0$; N – число нераспавшихся ядер в момент времени t; λ – постоянная радиоактивного распада для данного вещества.

Так как для периода полураспада ($T_{1/2}$): $N = N_0/2$ и $t = T_{1/2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}} \Leftrightarrow \ln 2 = \lambda \mathrm{T}_{1/2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{\mathrm{T}_{1/2}}$$

Количество распавшихся ядер найдем из разницы:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 \cdot (1 - e^{-\lambda t}) = N_0 \cdot (1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\tau})$$

где τ = 1с.

Разложим функцию e^{x} в ряд Маклорена по степеням x до 5-го порядка включительно

Series[E^x,{x,0,5}]

После нажатия одновременно двух клавиш Shift+ Enter получаем

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + 0[x]^6.$$

Так как величина $\dfrac{\tau \cdot \ln 2}{T_{1/2}}$ мала, то возьмем первые члены ряда разложения

$$\Delta N = N_0 \cdot (1 - 1 + \frac{\ln 2}{T_{1/2}}\tau) = N_0 \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

(так как $\tau = 1$ с)

Число нераспавшихся ядер N_0 можно найти из соотношения

$$\frac{m}{M} = \frac{N_0}{N_A} \Leftrightarrow N_0 = \frac{m \cdot N_A}{M}$$

где m = 1 кг, M = 0.226 кг, N_A – постоянная Авогадро.

Итак,

$$\Delta N = \frac{m \cdot N_A}{M} \cdot \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Из уравнения найдем $T_{1/2}$. Можно воспользоваться средой Matematica для нахождения корня $T_{1/2}$ уравнения:

Solve[$\Delta N == \frac{N_A}{M} * \frac{Log[2]}{T_{1/2}}, T_{1/2}$ **]**

$$\{\{\mathrm{T}_{1/2} \to \frac{Log[2]\ N_A}{M\ \Delta N}\}\}$$

Ответ: $\mathrm{T}_{1/2} = \dfrac{N_A \cdot \ln 2}{M \cdot \Delta N}$

Практические занятия, проводимые с использованием системы Mathematica, способствуют развитию у студентов интереса к математике. Данный метод обучения способствует глубокому усвоению знаний, получению устойчивых умений и навыков. Тестирование студентов показало, что 63% студентов за применение среды Mathematica на практических занятиях, 20% студентов считают, что не на всех практических занятиях нужен компьютер и 17% считают, что практические и лабораторные занятия надо проводить отдельно.

Будущий специалист с техническим образованием должен знать методы вычислений, а эффективность реализации этих методов зависит от того, какие средства он использует. Система Mathemtica является одним из таких эффективных средств.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Капустина Т. В.* Компьютерная система Mathematica 3.0 для пользователей.М.: СОЛОН–Р, 1999.

[2] *Дьяченко С. А.* Использование интегрированной символьной системы Mathematica в процессе обучения высшей математике в вузе: Дис. на соис. учен. степени канд. пед. наук. Орел: Орловский гос. пед. ун-т. 2002.

[3] *Дахер Е. А.* Система Mathematica в процессе математической подготовки специалистов экономического профиля: Дис. на соис. учен. степени канд. пед. наук. М.: МГПУ, 2004.