Л. К. Садыкова

ПОДГОТОВКА СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ПЕДВУЗОВ ОБОБЩЕННОМУ ПРИЕМУ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ НА БАЗЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

Работа представлена кафедрой геометрии и методики преподавания математики Самарского государственного педагогического университета. Научный руководитель – доктор педагогических наук, профессор В. А. Гусев

В данной статье отражены основные положения исследования по актуальной проблеме подготовки студентов педвузов к решению нестандартных уравнений и неравенств.

The article reflects the main ideas of the research on pedagogical university students' training for solving non-standard equations and inequations.

Процесс подготовки учителей математики в педагогических вузах в настоящее время переживает период глубоких преобразований, которые обусловлены:

- дифференциацией обучения (появлением профильных школ и классов: физико-математических, гуманитарных, экономических, технических и т. п.), которая требует специальной подготовки учителя;
- введением многоуровневой подготовки и личностной ориентацией обучения на всех ступенях образования;
- появлением различных учебных программ, учебников по математике и возможностью учителя выбирать любой из них.

Основной особенностью современного развития системы школьного образования является ориентация на профильную дифференциацию обучения. В связи с этим поновому встают вопросы подготовки студентов – будущих учителей математики в педагогических вузах.

На наш взгляд, профессиональная подготовка студентов должна отвечать ряду требований, включающих овладение:

- теорией и практикой любой математической дисциплины, не требующей в дальнейшем дополнительной переподготовки;
- такими знаниями, которыми будущий учитель может воспользоваться по своему усмотрению при работе в классах любой профильной направленности;
- умениями работать с научной и методической литературой при разработке любой программной темы по математике и ее приложений.

Особая роль в формировании квалифицированного учителя математики отводится методической подготовке, так как именно она влияет на повышение качества математического образования. Вопросы методической подготовки постоянно находятся в центре внимания известных математиков и методистов, а также преподавателей, работающих в педагогических вузах. Этими вопросами в разное время занимались Л. С. Атанасян, Н. Я. Виленкин, Г. Д. Глейзер, В. А. Гусев, А. Н. Колмогоров, Ю. М. Колягин, В. И. Крупич, Г. Л. Луканкин, Е. Н. Лященко, И. А. Новик, А. В. Погорелов, Г. И. Саранцев, А. А. Столяр, Л. М. Фридман, Р. С. Черкасов и др.

Анализ различных программ по математике показывает, что, несмотря на некоторую разнородность содержания, в них можно выделить основную неизменную

часть – «ядро» школьного курса математики. К числу понятий, составляющих «ядро» школьного курса алгебры, относятся функция, уравнение и неравенство. Между этими понятиями существует глубокая внутренняя связь, реализация которой в практике обучения является эффективнейшим средством сознательного овладения курсом алгебры и начал анализа.

Проблема выявления и реализации взаимосвязи понятий «функция», «уравнение», «неравенство» поставлена в методике преподавания математике давно. На необходимость взаимосвязи понятий указывали П. С. Александров, В. Д. Гончаров, А. А. Столяр, А. Я. Хинчин, П. М. Эрдниев и др. Однако эта проблема продолжает оставаться актуальной.

Научить обучающихся решению всех уравнений и неравенств, которые могут встретиться в жизни, невозможно. Но можно научить учащихся подходам к решению задач, которые в большинстве связаны с необходимостью владения общими правилами и приемами. Поэтому, как отмечается в психолого-педагогической литературе, овладение общими подходами к изучению теории и решению задач является неотъемлемым условием творческой работы в любой деятельности учащихся. Следовательно, теоретическое обобщение при изучении математических знаний должно занимать важное место.

В исследованиях психологов Е. Н. Кабановой-Меллер, А. Н. Леонтьева, Н. А. Менчинской, Л. М. Фридмана, А. Ф. Эсаулова и методистов А. К. Артемова, В. А. Гусева, В. А. Далингера, Е. Ф. Даниловой, Ю. М. Колягина, В. И. Крупича, В. М. Монахова, Д. Пойя, Г. И. Саранцева, А. А. Столяра, А. И. Фетисова, А. Я. Цукаря, П. М. Эрдниева на основе системного анализа и деятельностного подхода к обучению описываются общие и специальные закономерности решения задач, выявляется роль мыслительных операций и логического мышления в этом процессе, формулируются общие и специальные приемы и алгоритмы решения различных классов задач, а также необходимые для их решения приемы логического мышления. Показано, что усвоение специальных приемов учебной математической деятельности открывает перед учащимися возможность единого подхода к решению учебных задач целого класса, избавляет от излишней затраты энергии и времени, делает знание обобщенным, разумным, сознательным, открывает путь к самостоятельному построению системы знаний и способов деятельности, к росту активности.

Исследования вышеперечисленных авторов показывают, что при изучении и усвоении определенного материала учащиеся должны выполнять ряд специальных мыслительных операций, которые внешне выражаются в перечне учебных действий, оказывающихся в зависимости от самой системы знаний.

Анализ диссертационных работ, посвященных проблеме обучения студентов – будущих учителей математики решению нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств элементарных функций, показал, что внимание исследователей было уделено вопросам:

- методики изучения в средней школе функциональных понятий (А. И. Жаворонков, В. Г. Ашкинудзе, Ю. Н. Макарычев, В. А. Байдак, А. А. Михеева, В. В. Крючкова, В. А. Гуськов);
- взаимосвязи понятия «функция» с одним из понятий: уравнение, неравенство, тождество (А. А. Ундуск, Л. И. Токарева, Л. П. Афонькина, Н. А. Ильина Н.А. и др.);
- применения функционального подхода при решении различных задач, в том числе при решении уравнений, неравенств, при проведении тождественных преобразований (Н. Н. Шунда, Р. А. Маейер, Т. Д. Моралишвили, М. Махкамов, И. П. Буслаева, С. И. Мещерякова и др.);
- рассмотрения решений основных уравнений и неравенств, связанных с использованием равносильных замен (А. Н. Бекаревич, Р. А. Рыбакова, В. А. Герлингер, А. Н. Ярыгин и др.).

Таким образом, можно констатировать, что перечисленные исследования направлены на обучение школьников решению нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств элементарных функций. Не имеется научных исследований, направленных на обучение студентов педвузов – будущих учителей математики решению нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств функций.

Анализ научных исследований, государственных документов, регламентирующих образовательные процессы, и учебно-методической литературы показал, что необходимость обучения студентов педагогических вузов обобщенным приемам решения нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств функций обусловлена целым рядом особенностей.

Во-первых, обучение студентов методам решения нестандартных уравнений и неравенств рассматривается как необходимый компонент профессиональной деятельности учителя. Об этом свидетельствуют нормативно-законодательные документы Российской Федерации о высшем педагогическом образовании[1].

Во-вторых, анализ состояния данной проблемы в массовой школьной практике показывает, что педагоги зачастую обучение учащихся решению нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств элементарных функций сводят к иллюстрации готовых решений, выбор свойства функции – к авторитарному указанию, какое свойство следует применить. К сожалению, существующая система высшего педагогического образования не обеспечивает в полной мере обучение студентов методике обучения учащихся решению нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств элементарных функций. По данным опросов, большинство молодых учителей отмечает, что у них отсутствуют умения и навыки в решении нестандартных уравнений и неравенств. Поэтому у педагогов *отсутствует потребность* в формировании у учащихся приема по выбору применяемых свойств функций при решении уравнений и неравенств.

В-третьих, анализ учебных программ педагогических вузов показывает, что недостаточность знаний и умений, полученных учителями в процессе специальной и методической подготовки, необходимых для обучения учащихся решению нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств элементарных функций, обуславливается тем, что освоение методики обучения решению нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств элементарных функций строится на фрагментарном обучении отдельным аспектам из-за нехватки учебного времени.

Таким образом, сегодня назрела необходимость такого усовершенствования традиционной методики обучения, чтобы формирование у студентов педагогических вузов приемов решения нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств осуществлялось на *более высоком уровне*. Подобное обусловило наше обращение к теории *укрупнения дидактических единиц*, так как сторонниками этой теории не раз отмечалось, что применение на уроках ее приемов способствует повышению качества усваиваемых учащимися знаний по изучаемому предмету без потери его познавательной ценности и при меньшем потреблении временных ресурсов.

Задачи, решение которых основано на использовании свойств функций, до сих пор считаются трудными. При этом методы и приемы их решения называются нестандартными (М. К. Потапов, Н. Х. Розов, С. Н. Олехник, В. Г. Чирский, Е. Г. Шавгулидзе, В. И. Шарыгин, В. И. Голубев, А. Г. Мордкович, В. Н. Литвиненко). И хотя во многих учебных пособиях и статьях встречаются уравнения и неравенства, при решении которых используются свойства входящих в них функций[2], методические проблемы, связанные с ними, не разработаны, *отсутствуют методические рекомендации* для школьников, студентов педагогических вузов и учителей. Одновремен-

но учащиеся должны свободно владеть умением решать нестандартные уравнения и неравенства в связи с тем, что такие уравнения и неравенства предлагаются среди заданий ЕГЭ и олимпиад. На основе анализа единого государственного экзамена в 2003–2006 гг. можно констатировать тот факт, что наибольшие затруднения вызывают задания, в которых следует, кроме стандартных методов решения уравнений и неравенств, применить общие методы исследования функций на область определения и множество значений, на монотонность и экстремумы и т. д. Также наиболее сложными для учащихся оказываются задания, в которых, кроме умения преобразовывать выражения и решать уравнения и неравенства с параметром, надо было сочетать эти умения с исследованием графиков определенных функций. Из этого напрашивается вывод, что учителя школ недостаточно готовят учащихся по рассматриваемой проблеме и поэтому студенты, обучающиеся в педагогических вузах, не владеют аппаратом решения нестандартных уравнений и неравенств.

Все вышесказанное обуславливает *актуальность проблемы* поиска условий и средств реализации идеи функционального подхода решения уравнений и неравенств для студентов педагогических вузов – будущих учителей математики.

Цель исследования заключается в разработке методики обучения студентов обобщенному приему решения нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств функций, а также приемам составления таких уравнений и неравенств.

Объект исследования: процесс обучения студентов, будущих учителей математики, обобщенному приему решения нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств функций.

Предмет исследования: цели, задачи, содержание, формы и методы обучения студентов решению нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств функций.

Методологическую основу исследования составили работы в области философии, психологии, дидактики и методики обучения математике по рассмотренной проблеме. В основу исследования положены концепции деятельностного подхода; концепция развития личности; основные положения теории познания; исследования по проблеме определения роли и места задач в обучении; теория укрупнения дидактических единиц.

При разработке методических рекомендаций мы руководствовались следующими положениями:

1) использовать взаимосвязь понятий «функция», «уравнение» и «неравенство»;

2) использовать сочетание графических приемов решения уравнений и неравенств с аналитическим;

3) разработать приемы учебной работы по применению отдельных свойств функций при решении и составлении нестандартных уравнений и неравенств;

4) разработать обобщенный прием учебной работы по решению и составлению нестандартных уравнений и неравенств, позволяющий делать выбор свойства функции;

5) разработать обобщенный прием решения и составления уравнений и неравенств с параметрами;

6) разработать систему практических заданий.

Анализ решения нестандартных уравнений и неравенств позволил выделить требования, которые предъявляют эти методы мышлению решающего. Учащиеся должны овладеть всеми приемами решения уравнений и неравенств с использованием теории равносильности и уметь выполнять следующие действия:

- выполнять операции над функциями;
- определять структуру уравнения или неравенства: выяснять, из каких функций и каким образом оно составлено;
- выделять свойства, присущие функциям, входящим в уравнение или неравенство (ограниченность, четность, монотонность, периодичность, выпуклость и т. д.), т. е. исследовать функции;

• строить графики и эскизы графиков функций.

Таким образом, можно выделить следующий обобщенный прием решения уравнений и неравенств, основанный на использовании свойств функций, составляющих эти уравнения и неравенства:

1. Выяснить возможность рационального решения уравнения (неравенства) стандартным способом. Сама структура уравнения подсказывает, какие методы при решении необходимо применять: стандартные или нестандартные. Например, присутствие в уравнении или неравенстве различных типов элементарных функций, двух и более переменных есть весьма надежный признак того, что методы тождественных преобразований, замен переменных, упрощения выражений и т. д. сами по себе не приведут к ответу.

2. Определить структуру уравнения (неравенства). Выяснить, из каких функций и каким образом оно составлено.

3. Исследовать эти функции и перейти к равносильным, более простым уравнениям (неравенствам), опираясь на соответствующие приемы по применению отдельных свойств функций при решении уравнений и неравенств.

4. Решить эти уравнения (неравенства) традиционным способом.

Продемонстрируем этапы обобщенного приема на примере решения следующего уравнения.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{|\sin x|} = 5 - \frac{9}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right| .$$

Решение.

1. Выясним возможность рационального решения уравнения стандартным способом. Видим, что в данном уравнении присутствуют тригонометрическая и линейная функции и никакими преобразованиями мы не сможем одну из них привести к другой. Это наталкивает нас на необходимость применения при решении функционального подхода.

2. Определяем структуру уравнения. Уравнение имеет вид $f(x)=g(x)$.

3. Исследуем функции, стоящие в левой и правой частях уравнения. Находим ОДЗ: $x \neq \pi n$, $n \in Z$. Построим эскизы графиков функций

$$f(x) = \frac{1}{|\sin x|} \quad \text{и} \quad g(x) = 5 - \frac{9}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right|$$

(рис. 1, 2, 3). При построении эскиза графика функции $y = f(x)$ применен общий прием построения графика сложной функции, а для функции $y = g(x)$ – геометрические преобразования графиков функций.

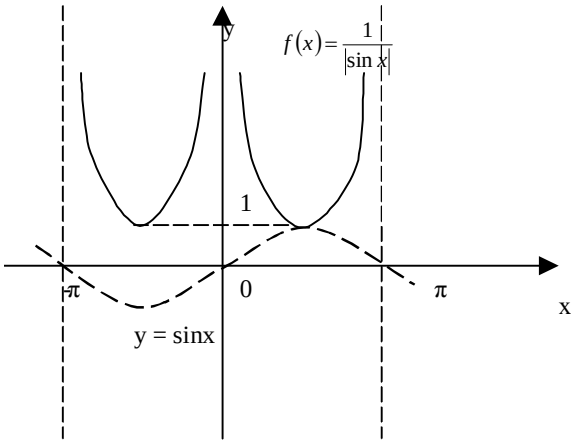

Рис. 1. Эскиз графика функции $f(x)=\frac{1}{|\sin x|}$

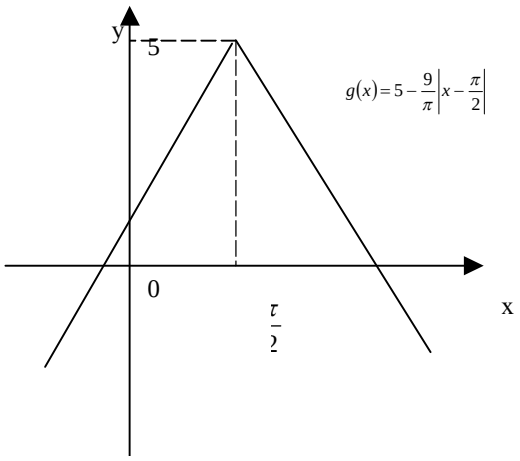

Рис. 2. Эскиз графика функции $g(x)=5-\frac{9}{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$

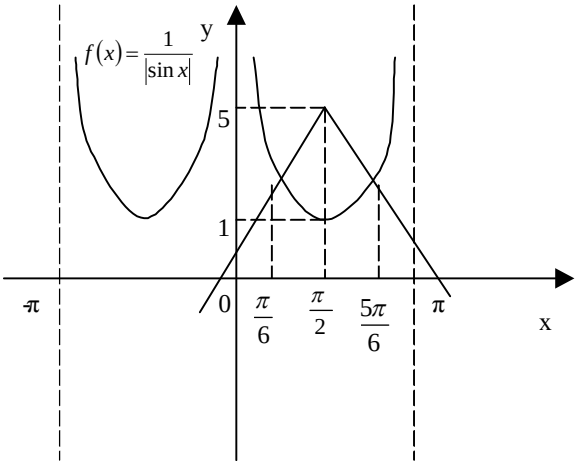

Рис. 3. Эскиз графика функции $f(x)=\frac{1}{|\sin x|}$

В этом случае без построения эскизов графиков функций сложно было бы решить уравнение. Явно не видно, как найти решение и какое свойство функции применить при решении. Рисунок помогает найти число корней и сами корни, а также позволяет провести дальнейшие аналитические рассуждения.

Графики функций пересекаются в двух точках: $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{5\pi}{6}$.

Докажем, что других корней уравнение не имеет.

1) $x\in(-\infty,0)$ $f(x)\geq 1$, $g(x)\leq\frac{1}{2}$, следовательно, на этом интервале уравнение не имеет корней;

2) $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Функция $y = f(x)$ убывает, $y = g(x)$ возрастает, следовательно, на этом промежутке уравнение имеет не более одного корня, т. е. $x = \pi/6$;

3) $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Функция $y = f(x)$ возрастает, $y = g(x)$ убывает, следовательно, на этом промежутке уравнение имеет не более одного корня, т. е. $x = 5\pi/6$;

4) $x\in(\pi,+\infty)$ $f(x)\geq 1$, $g(x)\leq\frac{1}{2}$, следовательно на этом интервале уравнение не имеет корней.

Ответ: $x_1 = \pi/6$, $x_2 = 5\pi/6$.

Подготовка студентов к обучению учащихся методам решения нестандартных уравнений и неравенств состоит из четырех этапов:

1-й этап – специальная подготовка (1–2-й курс) – курс алгебры и математического анализа вооружает студентов теоретическими знаниями, необходимыми при решении нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств функций;

2-й этап – методическая подготовка (3-й курс) – в курсе методики обучения математике студенты получают сведения по методам поиска решения задач, овладевают логико-дидактическим анализом определений, теорем, задач, системы задач; в курсе элементарной математики повторяются основные методы решения уравнений и неравенств;

3-й этап – специальная методическая подготовка (4–5-й курс) – спецкурс по методике обучения математике синтезирует знания по алгебре, математическому анализу и методике обучения математике с целью обучения студентов обобщенному приему решения нестандартных уравнений и неравенств, приему выбора свойства функции, позволяющего решить то или иное уравнение (неравенство);

4-й этап – практическая подготовка (4–5-й курс) – разработка и реализация методики обучения учащихся решению и составлению нестандартных уравнений и неравенств на педагогической практике, при написании курсовых и квалификационных работ.

Спецкурс по методике обучения математике предусмотрен программой[3]. Спецкурсы имеют теоретико-методологическую направленность. Они полагают своим назначением углубленное изучение студентами актуальных проблем методики обучения математике на базе исследований, проводимых научными коллективами, привлечение студентов к научно-исследовательской работе, формирование у них творческого подхода к профессиональной деятельности.

При подготовке студентов к решению нестандартных уравнений и неравенств предусмотрена *самостоятельная работа студентов* по составлению проблемных лекций для классов различной профильной направленности, согласно разработанным методическим рекомендациям, и их изложение на семинарских занятиях. В соответствии с предлагаемой методикой разработаны *индивидуальные задания* для студентов. Подробная разработка содержания и организации проведения занятий со студентами описаны в методических разработках[4]. Всего по теме исследования опубликовано 10 работ.

Предлагаемая методика позволяет формировать у студентов:

- конструктивные умения – при выполнении задания на подбор содержания лекции, на составление системы задач;
- коммуникативные и организаторские умения – при ролевом ведении лекции;
- гностические умения – при работе с литературой, обсуждении итогов занятий.

Организационные формы обучения: коллективное решение задач под руководством преподавателя с обязательным обсуждением процесса выбора свойства функции, позволяющего решить то или иное уравнение (неравенство); ролевое поведение студентов, которое обеспечивает переход от познавательной мотивации к профессиональной и от регуляции деятельности преподавателем к самоорганизации и саморегуляции деятельности студентами; самостоятельная работа студентов.

При обучении студентов решению нестандартных уравнений и неравенств на базе свойств функций широкое применение получили современные технические средства обучения. В том числе в рамках курса «Современные средства оценивания результатов обучения» со студентами разрабатываются тесты по исследуемой тематике.

Практическая значимость исследования. Результаты исследования могут быть использованы преподавателями педвузов при проведении спецкурса, позволяющих студентам применять его материалы в период педагогической практики и в дальнейшей профессиональной деятельности; авторами научно-методических пособий для учащихся и учителей, сборников алгебраических задач; педагогами школ в целях повышения качества знаний, умений и навыков учащихся по алгебре. Овладение студентами и учащимися приемами выбора свойства функции при решении нестандартных уравнений и неравенств способствует развитию у них навыков самостоятельной работы, необходимых для успешного изучения предмета, так и для систематизации полученных знаний и добыванию новых знаний.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность 032100.00. Математика с дополнительной специальностью. Квалификация учитель математики (в соответствии с дополнительной специальностью). Министерство образования Российской Федерации. М., 2000.

[2] *Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов и учителей. М.: Просвещение, 1991; *Олехник С. Н. и др.* Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10–11 классы: Учебно-методическое пособие. М.: Дрофа, 2001.

[3] Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования.

[4] Свойства функций при решении нестандартных уравнений и неравенств: Методическая разработка по курсам элементарной математики и методики преподавания математики / Сост. Н. С.Новичкова, Л. К.Садыкова. Самара: Изд-во СамГПУ, 2005; Функции и построение графиков: Методическая разработка по курсам элементарной математики и методики преподавания математики / Сост. Н. С. Новичкова, Л. К. Садыкова. Самара: Изд-во СамГПУ, 2005.