А. С. Урусова

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ СОЛОУ

Работа представлена кафедрой информатики и вычислительной математики Карачаево-Черкесского государственного университета им. У. Дж. Алиева.
Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Е. А. Семенчин

В статье поставлена обратная задача для оценки экзогенных параметров математической модели Солоу односекторной экономики. Предложен метод ее решения, который позволяет свести решение рассматриваемой задачи к решению нескольких относительно простых задач квадратичного программирования.

The article presents the inverse problem for estimation of the exogenous parameters of the Solow mathematical model in the single-sector economy. The proposed method of its solution makes it possible to reduce solution of the considered problem to solution of several relatively simple tasks of square programming.

Постановка задачи. Математическая модель экономического роста односекторной экономики (модель Солоу) имеет вид[1]:

$$L=L_0e^{vt},\quad \frac{dK}{dt}=-\mu K+\rho X,\quad t\in[t_0,T],\quad K(t_0)=K_{0,} \quad (1)$$

$$X=F(K,L),\quad I=\rho X,\quad C=(1-\rho)X, \quad (2)$$

где X – валовой внутренний продукт (ВВП); K – объем производственных фондов; L – число занятых в производственном процессе; I – инвестиции в экономику; C – объем фонда непроизводственного потребления; μ – доля выбывших за год основных производственных фондов; v – годовой темп прироста числа занятых; ρ – норма накопления (доля валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте).

Переменные величины $L = L(t)$, $K = K(t)$, $X = X(t)$, $I = I(t)$, $C = C(t)$ принято называть *эндогенными* (т. е. внутренними) переменными рассматриваемой экономической системы, параметры μ, v, ρ – *экзогенными* (т. е. данными вне системы) параметрами, которые являются постоянными величинами, удовлетворяющими ограничениям[2]

$$-1 < v < 1,\ 0 < \mu < 1,\ 0 < \rho < 1. \quad (3)$$

Если ввести в рассмотрение относительные показатели[3]:

$k = K/L$ – фондовооруженность; $x = X/L$– народно-хозяйственную производительность труда; $i = I/L$ – удельные инвестиции (на одного занятого); $c = C/L$ – среднедушевое потребление (на одного занятого), то модель (1), (2) в удельных (относительных) показателях примет вид:

$$\frac{dk}{dt}=-\lambda k+\rho x,\quad t\in[t_0,T],\quad k(0)=k_0=\frac{K_0}{L_0},\quad \lambda=\mu+v, \quad (4)$$

$$x=f(k),\quad f(k)=F(\frac{K}{L},1),\quad i=\rho x,\quad c=(1-\rho)x. \quad (5)$$

Задача определения $L(t)$, $K(t)$, $X(t)$, $I(t)$, $C(t)$ из модели (1), (2) по заданным $L(t)$, v, μ, ρ, K_0 условимся называть *прямой задачей* в (1), (2).

Аналогично задачу определения $k(t)$, $x(t)$, $i(t)$, $c(t)$ из модели (4), (5) по заданным v, μ, ρ, k_0 будем называть *прямой задачей* в этой модели.

В рамках модели (1), (2) сформулируем ***задачу****: по заданным переменным* $L(t)$, $K(t)$ (*а значит, и по одновременно заданным* $X(t)$, $I(t)$, $C(t)$, K_0), $t\in[t_0, T]$ *найти параметры* μ, v, ρ.

Данную задачу условимся называть ***обратной задачей*** (по отношению к указанной

выше прямой). Она представляет существенный интерес в тех случаях, когда требуется по заданным статистическим данным значений $L(t)$, $K(t)$ в дискретные моменты времени t_0, t_1, t_2, K, $t_n \in [0, T_1]$, $T_1 < T$ восстановить модель (1), (2) и на ее основе спрогнозировать значения $L(t)$, $K(t)$, $X(t)$, $I(t)$, $C(t)$ на последующие моменты времени $t \in [T_1, T]$.

Аналогично в рамках моделей (1), (2), (3), (4) можно сформулировать следующую обратную задачу: *по заданным* $L(t)$, $k(t)$, $t \in [t_0, T]$ *найти* μ, ν, ρ.

Метод решения поставленной задачи. Реально на практике функции $L(t)$, $K(t)$, $k(t)$ задаются не в виде аналитического выражения, а таблично.

Таблица 1

t_0	t_1	t_2	$\cdots$	t_n
$K(t_0)=K_0$	$K(t_1)=K_1$	$K(t_2)=K_2$	$\cdots$	$K(t_n)=K_n$
$L(t_0)=L_0$	$L(t_1)=L_1$	$L(t_2)=L_2$	$\cdots$	$L(t_n)=L_n$
$k(t_0)=k_0$	$k(t_1)=k_1$	$k(t_2)=k_2$	$\cdots$	$k(t_n)=k_n$

С помощью табл. 1 можно найти значения $K'(t)$ или $k'(t)$ в точках t_1, t_2, K, t_n, воспользовавшись известными методами либо численного дифференцирования[4], либо методом регуляризации[5], минимизируя по $K'(t)$ выражение

$$\left(\int_0^t K'(\tau)\,d\tau - K(t) + K_0\right)^2 + \alpha\,(K'(t))^2$$

или по $k'(t)$ – выражение

$$\left(\int_0^t k'(\tau)\,d\tau - k(t) + k_0\right)^2 + \alpha\,(k'(t))^2,$$

где α – параметр регуляризации (достаточно малое положительное число), который на практике удобно находить методом подбора[6].

Если вычислены $K'(t_0)$, $K'(t_1)$, Λ, $K'(t_n)$ по данным табл. 1, то, воспользовавшись соотношениями (1), (2), приходим к системам алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \ln L(t_1) = \ln L_0 + \nu \cdot t_1, \\ \ln L(t_1) = \ln L_0 + \nu \cdot t_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \ln L(t_n) = \ln L_0 + \nu \cdot t_n, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} K'(t_0) = -\mu\,K(t_0) + \rho \cdot F(L(t_0),\ K(t_0)), \\ K'(t_1) = -\mu\,K(t_1) + \rho \cdot F(L(t_1),\ K(t_1)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K'(t_n) = -\mu\,K(t_n) + \rho \cdot F(L(t_n),\ K(t_n)). \end{cases} \tag{7}$$

Аналогично по данным табл. 1, воспользовавшись соотношениями (1), (4), (5), придем к системе (6) и системе

$$\begin{cases} k'(t_0) = -\lambda\,k(t_0) + \rho \cdot f(k(t_0)), \\ k'(t_1) = -\lambda\,k(t_1) + \rho \cdot f(k(t_1)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k'(t_n) = -\lambda\,k(t_n) + \rho \cdot f(k(t_n)). \end{cases} \tag{8}$$

Из (6) находим ν_1, ν_2, K, ν_n. Решая задачу квадратичного программирования[7]

$$(\nu - \nu_1)^2 + (\nu - \nu_2)^2 + \ldots + (\nu - \nu_n)^2 \to \min,$$

$$-1 < \nu < 1, \tag{9}$$

найдем наилучшую в среднем квадратическом оценку $\overline{\nu}$ параметра ν.

Из системы (7), группируя первые n уравнений системы по m подсистем из двух уравнений (очевидно, $m = C_{n+1}^2$, где C_{n+1}^2 – число сочетаний из (n+1) по 2), находим μ_0, μ_1, Λ, μ_m и ρ_0, ρ_1, Λ, ρ_m.

Решая задачи квадратичного программирования

$$(\mu - \mu_0)^2 + (\mu - \mu_1)^2 + \ldots + (\mu - \mu_m)^2 \to \min,$$

$$0 < \mu < 1, \tag{10}$$

$$(\rho - \rho_0)^2 + (\rho - \rho_1)^2 + \ldots + (\rho - \rho_m)^2 \to \min,$$

$$0 < \rho < 1, \tag{11}$$

находим наилучшие в среднем квадратическом оценки $\overline{\mu}$, $\overline{\rho}$ параметров μ, ρ.

Совершенно аналогично из системы (8) можно найти λ_0, λ_1, Λ, λ_m и ρ_0, ρ_1, Λ, ρ_m. Решая задачи квадратичного программирования

$$(\lambda-\lambda_0)^2+(\lambda-\lambda_1)^2+\ldots+(\lambda-\lambda_m)^2\to\min,$$
$$-1<\lambda<2, \qquad (12)$$

и (11), найдем наилучшие в среднем квадратическом оценки $\bar{\lambda}$, $\bar{\rho}$ параметров λ, ρ (заметим, что условие $-1<\lambda<2$ следует из условий $-1<v<1$, $0<\mu<1$, $\lambda=\mu+v$:). Наконец, по найденным $\bar{\lambda}$, $\bar{v}$, учитывая, что $\lambda=\mu+v$, находим оценку $\bar{\mu}$.

Для решения задач квадратичного программирования (9)–(12) можно воспользоваться средствами Microsoft Excel.

Пример. Пусть $k(t)$, $L(t)$, из (1), (4) заданы табл. 2:

Таблица 2

t	0	1	2	3	4	5
$k(t)$	4	4,5	4,9	5,1	5,2	5,4
$L(t)$	1000	1200	1300	1400	1450	1500

Будем считать, что функция $f(k)$ является функцией Кобба-Дугласа:

$$f(k)=A\cdot k^{\beta},\quad A=const>0,\quad \beta=const,\quad 0<\beta<1,$$

где $A=1$, $\beta=0{,}5$, т. е. $f(k)=\sqrt{k}$. Требуется найти оценки $\bar{\mu},\bar{v},\bar{\rho}$ для μ, v, ρ в модели (4), (5).

Согласно данным, приведенным в табл. 2, система (6) принимает вид:

$$\begin{cases}\ln 1200=\ln 1000+v\cdot 1,\\ \ln 1300=\ln 1000+v\cdot 2,\\ \ln 1400=\ln 1000+v\cdot 3,\\ \ln 1500=\ln 1000+v\cdot 4,\\ \ln 1450=\ln 1000+v\cdot 5.\end{cases}$$

Из этой системы находим $v_1=0{,}182$, $v_2=0{,}131$, $v_3=0{,}112$, $v_4=0{,}093$, $v_5=0{,}081$. Решая задачу квадратичного программирования

$$(v-v_1)^2+(v-v_2)^2+\ldots+(v-v_n)^2\to\min,\quad -1<v<1,$$

с помощью Microsoft Excel найдем $\bar{v}=0{,}12$.

Система (8) имеет вид (в данном случае в (8) отсутствует последнее уравнение):

$$\begin{cases}0{,}5=-4\,\lambda+\sqrt{4}\,\rho,\\ 0{,}4=-4{,}5\,\lambda+\sqrt{4{,}5}\,\rho,\\ 0{,}2=-4{,}9\,\lambda+\sqrt{4{,}9}\,\rho,\\ 0{,}1=-5{,}1\,\lambda+\sqrt{5{,}1}\,\rho,\\ 0{,}2=-5{,}2\,\lambda+\sqrt{5{,}2}\,\rho.\end{cases}$$

Из этой системы по описанной выше методике находим $\lambda_1=0{,}5$, $\lambda_2=0{,}72$, $\lambda_3=0{,}7$, $\lambda_4=0{,}55$, $\lambda_5=1$, $\lambda_6=1{,}09$, $\lambda_7=0{,}6$, $\lambda_8=1{,}18$, $\lambda_9=0{,}04$, $\lambda_{10}=-1{,}87$, $\rho_1=1{,}25$, $\rho_2=1{,}69$, $\rho_3=1{,}65$, $\rho_4=1{,}35$, $\rho_5=2{,}32$, $\rho_6=2{,}5$, $\rho_7=1{,}458$, $\rho_8=2{,}7068$, $\rho_9=0{,}18$, $\rho_{10}=-4{,}1756$.

Задачи (11), (12) принимают соответственно вид:

$$(\rho-\rho_1)^2+(\rho-\rho_2)^2\cdots+(\rho-\rho_{10})^2\to\min_{\rho},\quad 0<\rho<1,$$

$$(\lambda-\lambda_1)^2+(\lambda-\lambda_2)^2+\cdots+(\lambda-\lambda_{10})^2\to\min_{\lambda},\quad -1<\lambda<2\,.$$

С помощью средств Microsoft Excel находим решение этих задач: $\bar{\lambda}=0{,}451$, $\bar{\rho}=0{,}9$. Из условия $\lambda=\mu+v$ найдем $\bar{\mu}=0{,}33$.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Кундышева Е. С.* Математическое моделирование в экономике: Учеб. пособие. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К⁰», 2006. С. 224; *Колемаев В. А.* Математическая экономика: Учебник для вузов. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2002. С. 106.

[2] *Кундышева Е. С.* Указ. соч. С. 224; *Колемаев В. А.* Указ. соч. С. 106.

[3] *Кундышева Е. С.* Указ. соч. С. 218.

[4] *Сизиков В. С.* Математические методы обработки результатов измерений: Учебник для вузов. СПб.: Политехника, 2001. С. 217; *Вержбицкий В. М.* Численные методы. М.: Высшая школа, 2001. С. 189.

[5] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, Гл. ред. физмат. лит., 1986. С. 186.

[6] *Сизиков В. С.* Указ. соч. С. 217.

[7] Там же.