Н. П. Алёшина

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ЛОГИКИ

*Работа представлена кафедрой математического анализа
Рязанского государственного университета им. С. А. Есенина.
Научный руководитель – доктор педагогических наук, профессор А. Х. Назиев*

Логика и эвристика являются двумя сторонами одной «медали», так как в процессе решения задачи они дополняют и подчеркивают друг друга. Кроме того логика, как и эвристика, способна давать эффективные советы по поиску решения задачи, т. е. продуцирует эвристики, а, следовательно, участвует не только в процессе доказательства, но и в процессе открытия.

Logic and heuristics are the two sides of one medal as they supplement and accentuate each other in the problem solving process. Moreover, logic as well as heuristics can give effective advice about search of a problem solution, that is, generates heuristics and, therefore, participates not only in the proving process but also in the discovery.

Многие авторитетные психологи и педагоги считают, что эвристика и логика никак не связаны между собой. С эвристикой связывают творческий процесс «открытия» решения задачи, а с логикой – проверку готового решения на истинность, строгость и обоснованность каждого шага решения. Наиболее ярким сторонником данной позиции является Д. Пойа. В своей книге, которая так и называется «Математическое открытие», он отрицает любую возможность использования логики в процессе поиска решения задачи. По его словам, «логика – это дама, стоящая у выхода магазина самообслуживания и проверяющая стоимость каждого предмета в большой корзине, содержимое которой отбиралось не ею»[1].

Однако взгляд на эвристику и логику, как на два совершенно несовместимых понятия не является единственно возможным. Напротив, возможны и другие толкования, при которых логика способна не только «обрабатывать» открытия, полученные с помощью эвристик, но и сама может наводить на открытия, т. е. обладает эвристическими возможностями.

Во-первых, что значит – сделать открытие? Это значит не только рассказать о своей новой идее, предложении, но и привести рассуждение, которое убеждает в истинности данного предложения, и, таким образом, доказать правомерность своего открытия, так как ничего не открыто – пока не доказано. Значит, логика принимает самое непосредственное участие в процессе открытия нового.

Во-вторых, знание основных понятий и законов логики уже имеет большое значение при решении задач. Здесь можно провести аналогию с аксиомами, теоремами, определениями, алгоритмами и решенными задачами, которые являются ключевыми в деятельности по приобретению знаний и, как считает Е. Е. Семенов, не являясь эвристиками сами по себе, становятся ими, выполняя их роль при решении задач с познавательными и развивающими функциями. Можно считать, что логические законы, так же как и перечисленные Е. Е. Семеновым элементы, «составляют верхний, азбучный набор эвристик»[2]. Действительно, как отмечает А. А. Столяр, «если учащимся «открывать глаза», т. е. разъяснять сущность выполняемых ими логических операций, можно устранить много трудностей на пути усвоения ими математических знаний»[3].

В-третьих, на основе логических правил вывода можно дать эффективные, действенные советы по отысканию доказательств. Например, на основе закона контрапозиции, а именно: «*Каковы бы ни были предложения A и B, имеет место эквиваленция* $(A \to B) \leftrightarrow ((\textit{не } B) \to (\textit{не } A))$», – можно дать следующий совет: «*Пытаясь доказать какую-либо импликацию, держите в поле зрения и ее контрапозит. Не исключено, что он доказывается легче*»[4].

Приведем пример А. А. Столяра использования закона контрапозиции в доказательстве следующей теоремы: «*Если всякая прямая плоскости, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны*». Чтобы доказать эту теорему, достаточно, по правилу контрапозиции, доказать эквивалентную ей теорему: «*Если прямые a и b пересекаются, то существует прямая такая, что она пересекает прямую и не пересекает прямой b (или, наоборот, пересекает b, но не пересекает a)*». Эта теорема очень просто доказывается. Достаточно взять на прямой a произвольную точку A, не лежащую на прямой b, и через нее на плоскости, определяемой прямыми a и b, провести прямую c, параллельную прямой b[5].

Покажем, как помогают решать задачи закон выражения импликации через конъюнкцию и закон выражения импликации через дизъюнкцию. Первый закон гласит: «*Каковы бы ни были предложения A и B, имеет место эквиваленция* $(A \to B) \leftrightarrow (\textit{не } (A \wedge (\textit{не } B)))$». В силу этого закона утверждать импликацию – значит утверждать, что не может быть так, чтобы посылка выполнялась, а заключение – нет. Закон выражения импликации через конъюнкцию применяется для доказательства отрицаний конъюнкций вида $A \wedge (\textit{не } B)$ с помощью импликаций $A \to B$, и помогает ответить, например, на такие вопросы: «Возможно ли, чтобы прямая, не принадлежащая плоскости a, была параллельна какой-нибудь прямой плоскости a и при этом не параллельна самой этой плоскости?» Ответ: «Нет, так как, в соответствии с признаком параллельности прямой и плоскости, если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой этой плоскости».

Второй закон (закон выражения импликации через дизъюнкцию) гласит: «*Каковы бы ни были предложения A и B, имеет место эквиваленция* $(A \to B) \leftrightarrow ((\textit{не } A) \vee B))$». Этот закон говорит нам о том, что если требуется доказать импликацию, то необходимо сначала выяснить, истинна или ложна посылка. Если посылка истинна, то следует доказать, что тогда имеет место и заключение. Если посылка ложна, то, в соответствии с законом ложной посылки, вся импликация заведомо истинна. Эта необходимость вызвана тем, что импликацию обычно формулируют лишь в тех случаях, когда заранее неизвестно, истинны или ложны составляющие ее предложения. Как правило, это бывают предложения с переменными, выполняющиеся при одних значениях переменных и не выполняющиеся при других. Рассмотрим простой пример:

ПРИМЕР 1. Докажите, что для любого действительного числа a, если $a \neq 0$, то $a^2>0$.

Доказательство. Пусть $a \neq 0$, тогда $a<0$ или $a>0$. В обоих случаях правило знаков дает, что $a^2>0$. Значит, импликация истинна для любого действительного числа a отличного от нуля. Пусть теперь $a=0$. Но и в этом случае импликация истинна в силу закона ложной посылки. Таким образом, импликация «если $a \neq 0$, то $a^2>0$» истинна для любого действительного числа a. Для сравнения удалим посылку из данной импликации. Получим предложение $a^2>0$. Утверждать такое предложение было бы неверно, так как оно выполняется не для всех значений входящей в него переменной. Формулирование утверждения в виде импликации позволяет избежать подобных проблем.

Обратим внимание на то, что в предыдущем примере вместо того, чтобы непосредственно доказать импликацию, мы доказали ее заключение, предполагая, что имеет место посылка. Несмотря на это мы считаем, что доказали то, что требовалось. Основание для этой уверенности дает правило дедукции: «*Если предложение B выполняется всякий раз, когда выполняется предложение A, то импликация «$A \rightarrow B$» является теоремой*». На этом правиле основан очевидный совет: «*Если Вам нужно доказать импликацию, допустите, что имеет место посылка, и докажите, что тогда имеет место и заключение*»[6].

Очень действенным для решения задач является также закон выражения дизъюнкции через импликацию: «*Каковы бы ни были предложения A и B, имеет место эквиваленция* $(A \vee B) \leftrightarrow ((\text{не } A) \rightarrow B)$». Чаще всего этот закон используется для доказательства дизъюнкций:

ПРИМЕР 2. Докажите, что для любых чисел a, b, c если $ab=ac$, то $a=0$ или $b=c$.

Доказательство. Пусть $ab=ac$. Теперь нужно доказать дизъюнкцию «$a=0$ или $b=c$». Но как ее доказывать? Станем доказывать первый член, а верен, может быть, второй. Станем доказывать второй, а верен, может быть, первый. Можно выйти из этого затруднения следующим образом:

либо $a=0$, либо $a \neq 0$.

Если $a=0$, то тем самым имеет место первый член доказываемой дизъюнкции. Если же $a \neq 0$, то существует a^{-1}. Благодаря этому заключаем, что $a^{-1} \cdot ab = a^{-1} \cdot ac$, откуда $1 \cdot b = 1 \cdot c$, то есть $b=c$, тем самым имеет место второй член дизъюнкции. Таким образом, в любом случае дизъюнкция выполняется.

Однако можно поступить еще проще. Зная закон выражения дизъюнкции через импликацию, уже не нужно начинать с «либо-либо», можно сразу приступать к доказательству импликации «если $a \neq 0$, то $b=c$».

Отсюда весьма полезный совет: *«Если Вам нужно доказать дизъюнкцию, попробуйте вывести какой-нибудь ее член из отрицания другого»*[7].

Таким образом, логика дает советы, как искать решение задачи, то есть продуцирует эвристики, а, следовательно, участвует не только в процессе доказательства, но и в процессе открытия.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Пойа Д.* Математическое открытие. М., 1976. С. 321.
[2] *Семенов Е. Е.* // Математика в школе. 1995. №5. С. 42.
[3] *Столяр А. А.* Логические проблемы преподавания математики. Минск, 1965. С. 21.
[4] *Назиев А. Х.* Вводный курс математики (Элементы математической логики). Рязань, 2000. С. 58.
[5] *Столяр А. А.* Логические проблемы преподавания математики. Минск, 1965. С. 99.
[6] *Назиев А. Х.* Вводный курс математики (Элементы математической логики). Рязань, 2000. С. 105.
[7] Там же. С. 59.