З. М. Лайпанова

ФИЛЬТРАЦИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ ВЕКТОРА СПРОСА В БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

Работа представлена кафедрой математического анализа Карачаево-Черкесского государственного университета им. У. Дж. Алиева. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Е. А. Семенчин

В данной работе предлагаются методы построения оптимальной в среднем квадратическом смысле оценки решения балансовой модели Леонтьева при наличии аддитивных случайных помех в компонентах вектора спроса.

The article is devoted to the methods for forming of Leontiev's balance model decision assessment, which is optimal in the quadratic average in the presence of additive random interferences in components of the demand vector.

1**. *Одношаговая фильтрации ошибок измерений вектора спроса.*** Экономико-математическая балансовая модель Леонтьева имеет вид[1]:

$$x = Ax + f, \quad x \geq \overline{0}\,. \tag{1}$$

Здесь A –заданная технологическая матрица размера $n\times n$,

f – известный вектор спроса размерности n,

x – неизвестный вектор валового производства (выпуска) размерности n, подлежащий определению,

$\overline{0}$ – нулевой вектор размерности n.

Систему (1) можно переписать в виде:

$$Bx = f, \quad B = E - A, \quad x \geq 0, \tag{2}$$

где E единичная матрица размера $n\times n$.

Реально элементы f_i, $i = 1, ..., n$ вектора f не могут быть заданы (измерены) абсолютно точно (очевидно, нельзя заранее абсолютно точно предсказать спрос на продукцию любой отрасли), а с некоторыми ошибками, которые, вообще говоря, имеют случайный характер. Поэтому (2), с учетом ошибок измерений f, можно формально представить в виде

$$Bx + v = f, \quad x \geq 0, \tag{3}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} -$$

случайный вектор ошибок измерений элементов A и f размерности n (вектор помех). Будем считать, что v удовлетворяет следующим условиям:

1. Математическое ожидание v равно нулю:

$$Mv = 0.$$

2. Известна (задана) симметричная положительно определенная матрица ковариаций размера $n\times n$ вектора v:

$$R = M\left(v \cdot v^T\right)$$

(здесь и далее T – операция транспонирования).

Кроме того, допускаем, что выполнены также следующие предположения.

3. Задан вектор ψ размерности n, представляющий собой математическое ожидание (начальное приближение, априорную оценку, прогнозное значение) вектора x из (3):

$$\psi = Mx.$$

4. Задана априорная ковариационная матрица N ошибок решения (размера $n\times n$,

симметричная, положительно определенная):

$$N = M\left[(x-\psi)(x-\psi)^T\right].$$

Укажем способ решения следующей задачи: по измеренному f найти неотрицательный вектор γ, учитывающий результаты измерений f и доставляющий минимум $M\left|\gamma - x\right|^2$, где x – решение системы (2).

Данная задача представляет задачу оптимальной линейной фильтрации. Согласно[2], она может быть сведена к решению следующей задачи квадратичного программирования:

$$(Bx-f)^T R^{-1}(Bx-f)+(x-\psi)^T N^{-1}(x-\psi)\to\min,\quad x\geq 0.\quad(4)$$

П р и м е р 1. Пусть в модели (3)

$$A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}10\\ 20\end{pmatrix},$$

тогда

$$B=E-A=\begin{pmatrix}0{,}9 & -0{,}5\\ -0{,}4 & 0{,}7\end{pmatrix}.$$

Случайный вектор ошибок измерений $v=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$ имеет следующие характеристики.

1.$Mv=0$, т. е. $Mv_1=0$, $Mv_2=0$.

2. Матрица ковариаций R вектора v имеет вид:

$$R=\begin{pmatrix}0{,}02 & 0{,}015\\ 0{,}015 & 0{,}025\end{pmatrix}.$$

3. Начальное приближение ψ для вектора $\bar{x}$ из (3) задано выражением:

$$\psi=B^{-1}\cdot f=\begin{pmatrix}0{,}9 & -0{,}5\\ -0{,}4 & 0{,}7\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}10\\ 20\end{pmatrix}.$$

4. Задана ковариационная матрица ошибок решения:

$$N=M\left[(x-\psi)(x-\psi)^T\right]=\begin{pmatrix}0{,}11\\ 0{,}14\end{pmatrix}\cdot(0{,}11;\quad 0{,}14)=\begin{pmatrix}0{,}0121 & 0{,}0154\\ 0{,}0154 & 0{,}0196\end{pmatrix}.$$

Требуется найти оптимальную оценку $\bar{x}$ вектора x из (3).

Подставляя в (4) указанные данные, с помощью программы Microsoft Office Excel 2003 находим:

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}40\\ 51.1\end{pmatrix}.$$

2. ***Многошаговая оптимальная фильтрация ошибок измерений вектора спроса.*** На практике вектор f измеряется не один раз, как это предполагалось в предыдущем п. 1, а многократно: k раз, $k\geq 1$. Пусть $v_k = col\left(v_1^{(k)}, v_2^{(k)},\ldots,v_n^{(k)}\right)$ – вектор-столбец случайных ошибок k-го результата измерений компонент вектора f. Кроме того, матрицы R, N, вектор ψ не могут быть известны заранее. В этом случае задачу фильтрации: найти оценку γ решения x уравнения (2) (или что то же самое – уравнения (1)), построенную с учетом результатов измерений f и доставляющей минимум $M|\gamma - x|^2$, можно решить следующим образом.

Пусть система (2), в которой учитываются ошибки измерений v_k вектора f на каждом шаге k = 1, 2, ..., представлена в виде:

$$Bx+v_k = f,\quad x\geq 0,\ x\geq 0,\ k = 1, 2, \ldots,\quad(5)$$

математическое ожидание v_k, k = 1, 2, ..., равно нулю $Mv_k = 0$:

Обозначим через R_k – матрицу размера $n\times n$, элементы которой $r_{ij}^{(k)}$ имеют вид

$$r_{ij}^{(k)}=\frac{1}{k}\sum_{q=1}^{k}v_i^{(q)}v_j^{(q)},\quad i,j=1,\cdots,n,\quad(6)$$

и представляют собой статистические оценки соответствующих элементов r_{ij} симметричной, положительно определенной матрицы

$$R=M\left[v\cdot v^T\right];$$

ψ_k –вектор размерности n с элементами

$$\psi_i^{(k)}=\frac{1}{k}\sum_{q=1}^{k}x_i^{(q)},\quad(7)$$

где $x_i^{(q)} - i$ -я компонента вектора x_q, полученного на q-ом шаге измерения f, представляющая собой статистическую оценку компоненты $\psi_i = Mx_i$ вектора $\psi = Mx$; N_k – матрицу с элементами

$$n_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{q=1}^{k}\left(x_i^{(q)} - \psi_i^{(q)}\right)\left(x_j^{(q)} - \psi_j^{(q)}\right),$$

представляющими собой статистические оценки элементов

$$n_{ij} = M\left(x_i - \psi_i\right)\left(x_j - \psi_j\right)$$

симметричной положительно определенной ковариационной матрицы

$$N = M\left[\left(x-\psi\right)\left(x-\psi\right)^T\right] \text{ размера } n\times n.$$

Воспользовавшись методикой построения фильтра Калмана-Бьюси[3], можно заключить, что в данном случае оценка γ может быть найдена путем решения следующей задачи квадратичного программирования:

$$\left(Bx - f\right)^T R_k^{-1}\left(Bx - f\right) + \left(x-\psi\right)^T N_k^{-1}\left(x-\psi_k\right) \to \min, \quad x \ge 0. \tag{8}$$

П р и м е р 2. Пусть в модели (3)

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Случайный вектор ошибок v_k измерений вектора f при различных k = 1, 2, 3, 4 имеет вид:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} -0,2 \\ -0,1 \end{pmatrix},$$

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,5 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти оптимальную оценку $\bar{x}$ вектора x из (3).

Согласно приведенным данным

$$Mv = \frac{1}{4}\left[v_1 + v_2 + v_3 + v_4\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_{11}^{(4)} = 0,025,$$

$$r_{12}^{(4)} = 0,$$

$$r_{21}^{(4)} = 0,$$

$$r_{22}^{(4)} = 0,025,$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} r_{11}^{(4)} & r_{12}^{(4)} \\ r_{21}^{(4)} & r_{22}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,025 & 0 \\ 0 & 0,025 \end{pmatrix},$$

находим $x^{(q)}$; решая систему

$$Bx + v_k = f$$

при k = 1 $\quad x_1^1 = 39, \quad x_2^1 = 51,$

при k = 2 $\quad x_1^2 = 29, \quad x_2^2 = 32,$

при k = 3 $\quad x_1^3 = 39, \quad x_2^3 = 51,$

при k = 4 $\quad x_1^4 = 46, \quad x_2^4 = 63.$

Находим

$$\psi_1^{(4)} = \frac{1}{4}\sum_{g=1}^{4} x_1^{(q)} = \frac{1}{4}\left[x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)} + x_1^{(4)}\right] = 38,$$

$$\psi_2^{(4)} = \frac{1}{4}\sum_{g=1}^{4} x_2^{(q)} = \frac{1}{4}\left[x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)} + x_2^{(4)}\right] = 49,$$

$$\psi_1^{(3)} = \frac{1}{3}\sum_{g=1}^{3} x_1^{(q)} = \frac{1}{3}\left[x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)}\right] = 36,$$

$$\psi_2^{(3)} = \frac{1}{3}\sum_{g=1}^{3} x_2^{(q)} = \frac{1}{3}\left[x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)}\right] = 45,$$

$$\psi_1^{(2)} = \frac{1}{2}\left[x_1^{(1)} + x_1^{(2)}\right] = 34,$$

$$\psi_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left[x_2^{(1)} + x_2^{(2)}\right] = 42,$$

$$\psi_1^{(1)} = x_1^{(1)} = 39,$$

$$\psi_2^{(1)} = x_2^{(1)} = 51,$$

$$n_{11}^{(4)} = \frac{1}{4}\sum_{q=1}^{4}\left(x_1^{(q)} - \psi_1^{(q)}\right)\left(x_1^{(q)} - \psi_1^{(q)}\right) = \frac{1}{4}\sum_{q=1}^{4}\left(x_1^{(q)} - \psi_1^{(q)}\right)^2 = 24,5,$$

$$n_{12}^{(4)} = \frac{1}{4}\sum_{q=1}^{4}\left(x_1^{(q)} - \psi_1^{(q)}\right)\left(x_2^{(q)} - \psi_2^{(q)}\right) = 45,$$

$$n_{21}^{(4)} = n_{12}^{(4)} = 45\,,$$

$$n_{22}^{(4)} = \frac{1}{4}\sum_{q=1}^{4}\left(x_2^{(q)} - \psi_2^{(q)}\right)^2 = 103,$$

$$N^{(4)} = \begin{pmatrix} n_{11}^{(4)} & n_{12}^{(4)} \\ n_{21}^{(4)} & n_{22}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24{,}5 & 45 \\ 45 & 103 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в (8) полученные данные, с помощью программы Microsoft Office Excel 2003 находим:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 51 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Кундышев Е. С.* Математическое моделирование в экономике. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2006.

[2] *Сизиков В. С.* Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001.

[3] Там же.