А. С. Урусова

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТРЕХСЕКТОРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

Работа представлена кафедрой информатики и вычислительной математики Карачаево-Черкесского государственного университета им. У. Д. Алиева.
Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Е. А. Семенчин

В статье поставлена и подробно исследована обратная задача для параметров трехсекторной модели экономики. Для ее решения автор предлагает построить специальные системы линейных алгебраических уравнений, воспользовавшись моделью трехсекторной экономики, затем, применяя методы квадратичного программирования, найти наилучшие в среднем квадратическом оценки параметров модели: ν, μ_i, α_i, $i = 0, 1, 2$.

The inverse problem for the parameters of the three-sector economics model is investigated in the article in detail. For its solution the author proposes working out special systems of linear algebraic equations using the three-sector economics model and then applying the methods of square programming. The author also suggests finding estimations of the model's parameters, which are the best in the quadratic average: ν, μ_i, α_i, $i = 0, 1, 2$.

Постановка задачи. Пусть экономика разбита на 3 сектора[1]: нулевой (материальный) сектор производит предметы труда; первый (фондосоздающий) – средства труда; второй (потребительский) – предметы потребления. Материальный сектор занимает особую промежуточную позицию между фондосоздающим и потребительским секторами.

Предполагается, что за каждым сектором закреплены основные производственные фонды (ОПФ), а труд и инвестиции свободно перемещаются между секторами.

Пусть выполнены следующие допущения[2]:

1. Производственные возможности каждого сектора заданы в форме линейно-однородных неоклассических производственных функций

$X_j = F_j(K_j, L_j)$, $j = 0, 1, 2$,

где X_j, K_j, L_j – соответственно выпуск, основные производственные фонды и число занятых в j-м секторе.

2. Общее число занятых L (в производственной сфере) изменяется с постоянным темпом прироста ν.

3. Коэффициенты износа ОПФ μ_i и прямых затрат α_i секторов постоянны.

4. Экономика замкнутая, т. е. внешняя торговля в математической модели напрямую не рассматривается.

5. Время t изменяется непрерывно.

Используя указанные предположения, можно построить трехсекторную модель экономики[3]:

$L = L(0)e^{\nu t}$ (число занятых); (1)

$L_0 + L_1 + L_2 = L$ (распределение занятых по секторам); (2)

$$\frac{dk_j}{dt} = -\mu_j K_j + I_j, K_j(0) = K_{j0}, j = 0,1,2$$

(динамика фондов по секторам); (3)

$X_j = F_j(K_j, L_j), j = 0,1,2$ (выпуск продукции по секторам); (4)

$X_1 = I_0 + I_1 + I_2$ (распределение продукции фондосоздающего сектора); (5)

$X_0 = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$ (распределение продукции материального сектора), (6)

где I_j – инвестиции в j-й сектор; ν – темп прироста числа занятых; μ_j– коэффициенты выбытия основных производственных фондов по секторам; α_j– коэффициенты прямых материальных затрат по секторам.

Задачу определения $L(t)$, $K(t)$, $X(t)$ из модели (1)–(6) по заданным ν, μ_i, α_i, K_0 будем называть *прямой задачей* в трехсекторной математической модели экономики.

По отношению к этой прямой задаче сформулируем *обратную задачу*: по заданным переменным $L(t)$, $K_j(t)$, $X_j(t)$, $I_j(t)$, j=0, 1, 2, найти параметры ν, μ_i, α_i, i=0, 1, 2.

Метод решения поставленной задачи. На практике величины $L(t)$, $K_j(t)$, $X_j(t)$, $I_j(t)$, j=0, 1, 2 согласно экспериментальным данным могут быть заданы только в дискретные моменты времени t_0, t_1, K, t_n (см.табл.1).

С помощью табл. 1 находим значения $K'_j(t\ )$ в точках t_0, t_1, K, t_n численно[4], где j=0, 1, 2.

Если $K'_j(t_0), K'_j(t_1), \ldots, K'_j(t_n)$ вычислены по данным табл. 1, то воспользовавшись соотношениями (3), приходим к системам алгебраических уравнений

$$\begin{cases} K'_0(t_0) = -\mu_0^0 K_0(t_0) + I_0(t_0), \\ K'_0(t_1) = -\mu_0^1 K_0(t_1) + I_0(t_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K'_0(t_n) = -\mu_0^n K_0(t_n) + I_0(t_n), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} K'_1(t_0) = -\mu_1^0 K_1(t_0) + I_1(t_0), \\ K'_1(t_1) = -\mu_1^1 K_1(t_1) + I_1(t_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K'_1(t_n) = -\mu_1^n K_1(t_n) + I_1(t_n), \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} K'_2(t_0) = -\mu_2^0 K_2(t_0) + I_2(t_0), \\ K'_2(t_1) = -\mu_2^1 K_2(t_1) + I_2(t_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K'_2(t_n) = -\mu_2^n K_2(t_n) + I_2(t_n). \end{cases} \quad (9)$$

Таблица 1

t_0	t_1	t_2	К	t_n
$K_0(t_0)=K_0^0$	$K_0(t_1)=K_1^0$	$K_0(t_2)=K_2^0$	К	$K_0(t_n)=K_n^0$
$K_1(t_0)=K_0^1$	$K_1(t_1)=K_1^1$	$K_1(t_2)=K_2^1$	К	$K_1(t_n)=K_n^1$
$K_2(t_0)=K_0^2$	$K_2(t_1)=K_1^2$	$K_2(t_2)=K_2^2$	К	$K_2(t_n)=K_n^2$
$L(t_0)=L_0$	$L(t_1)=L_1$	$L(t_2)=L_2$	К	$L(t_n)=L_n$
$I_0(t_0)=I_0^0$	$I_0(t_1)=I_1^0$	$I_0(t_2)=I_2^0$	К	$I_0(t_n)=I_n^0$
$I_1(t_0)=I_0^1$	$I_1(t_1)=I_1^1$	$I_1(t_2)=I_2^1$	К	$I_1(t_n)=I_n^1$
$I_2(t_0)=I_0^2$	$I_2(t_1)=I_1^2$	$I_2(t_2)=I_2^2$	К	$I_2(t_n)=I_n^2$
$X_0(t_0)=X_0^0$	$X_0(t_1)=X_1^0$	$X_0(t_2)=X_2^0$	К	$X_0(t_n)=X_n^0$
$X_1(t_0)=X_0^1$	$X_1(t_1)=X_1^1$	$X_1(t_2)=X_2^1$	К	$X_1(t_n)=X_n^1$
$X_2(t_0)=X_0^2$	$X_2(t_1)=X_1^2$	$X_2(t_2)=X_2^2$	К	$X_2(t_n)=X_n^2$

Из (7) находим $\mu_0^0,\mu_0^1,\ldots,\mu_0^n$, из (8) находим $\mu_1^0,\mu_1^1,\ldots,\mu_1^n$, из (9) находим $\mu_2^0,\mu_2^1,\ldots,\mu_2^n$.

Решая задачи квадратичного программирования [5]:

$$
\begin{aligned}
&(\mu_0-\mu_0^0)^2+(\mu_0-\mu_0^1)^2+\ldots+(\mu_0-\mu_0^n)^2\to\min,\quad 0\le\mu_0\le1,\\
&(\mu_1-\mu_1^0)^2+(\mu_1-\mu_1^1)^2+\ldots+(\mu_1-\mu_1^n)^2\to\min,\quad 0\le\mu_1\le1,\\
&(\mu_2-\mu_2^0)^2+(\mu_2-\mu_2^1)^2+\ldots+(\mu_2-\mu_2^n)^2\to\min,\quad 0\le\mu_2\le1,
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

найдем наилучшую в среднем квадратическом оценки $\bar{\mu}_0,\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2$ параметров μ_0,μ_1,μ_2 соответственно.

Воспользовавшись данными табл. 1 и соотношением (1) приходим к системе алгебраических уравнений:

$$
\begin{cases}
\ln L(t_1)=\ln L_0+\nu t_1,\\
\ln L(t_2)=\ln L_0+\nu t_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\ln L(t_n)=\ln L_0+\nu t_n.
\end{cases}
\qquad (11)
$$

Из (10) находим $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n$. Решая задачу квадратичного программирования

$$
(\nu-\nu_1)^2+(\nu-\nu_1)^2+\ldots+(\nu-\nu_1)^2\to\min,-1\le\nu\le1, \qquad (12)
$$

найдем наилучшую в среднем квадратичную оценку $\bar{\nu}$ параметра ν.

Аналогично, по данным табл. 1, воспользовавшись соотношением (6), придем к системе

$$
\begin{cases}
X_0(t_0)=a_0X_0(t_0)+a_1X_1(t_0)+a_2X_2(t_0),\\
X_0(t_1)=a_0X_0(t_1)+a_1X_1(t_1)+a_2X_2(t_1),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_0(t_n)=a_0X_0(t_n)+a_1X_1(t_n)+a_2X_2(t_n).
\end{cases}
\qquad (13)
$$

Из системы (13), группируя первые n уравнений системы по m подсистем из 3 уравнений находим

$$
(a_0^0,a_1^0,a_2^0),\quad (a_0^1,a_1^1,a_2^1),\cdots,(a_0^m,a_1^m,a_2^m)\cdot
$$

Решая задачу квадратичного программирования

$$
\begin{aligned}
&(a_0-a_0^0)^2+(a_0-a_0^1)^2+\ldots+(a_0-a_0^m)^2\to\min, 0\le a_0\le1,\\
&(a_1-a_1^0)^2+(a_1-a_1^1)^2+\ldots+(a_1-a_1^m)^2\to\min, 0\le a_1\le1,\\
&(a_2-a_2^0)^2+(a_2-a_2^1)^2+\ldots+(a_2-a_2^m)^2\to\min, 0\le a_2\le1.
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Таблица 2

$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	$t_4 = 4$
$K_0(t_0) = 400$	$K_0(t_1) = 480$	$K_0(t_2) = 500$	$K_0(t_3) = 520$	$K_0(t_4) = 550$
$K_1(t_0) = 420$	$K_1(t_1) = 450$	$K_1(t_2) = 480$	$K_1(t_3) = 500$	$K_1(t_{4n}) = 540$
$K_2(t_0) = 440$	$K_2(t_1) = 460$	$K_2(t_2) = 480$	$K_2(t_3) = 510$	$K_2(t_4) = 520$
$L(t_0) = 1000$	$L(t_1) = 1020$	$L(t_2) = 1040$	$L(t_3) = 1050$	$L(t_n) = 1100$
$I_0(t_0) = 300$	$I_0(t_1) = 310$	$I_0(t_2) = 315$	$I_0(t_3) = 330$	$I_0(t_4) = 340$
$I_1(t_0) = 400$	$I_1(t_1) = 420$	$I_1(t_2) = 430$	$I_1(t_3) = 440$	$I_1(t_4) = 450$
$I_2(t_0) = 400$	$I_2(t_1) = 410$	$I_2(t_2) = 420$	$I_2(t_3) = 430$	$I_2(t_4) = 440$
$X_0(t_0) = 450$	$X_0(t_1) = 455$	$X_0(t_2) = 460$	$X_0(t_3) = 430$	$X_0(t_4) = 440$
$X_1(t_0) = 350$	$X_1(t_1) = 320$	$X_1(t_2) = 400$	$X_1(t_3) = 380$	$X_1(t_4) = 390$
$X_2(t_0) = 490$	$X_2(t_1) = 495$	$X_2(t_2) = 510$	$X_2(t_3) = 520$	$X_2(t_4) = 530$

найдем наилучшую в среднем квадратичную оценку параметров соответственно.

При решении задач квадратичного программирования (10), (12), (14) можно использовать средства Microsoft Excel.

Пример. Значения $L(t)$, $K_j(t)$, $X_j(t)$, $I_j(t)$, $j = 0, 1, 2$, в момент времени $t = 0, 1, 2, 3, 4$ представлены в табл. 2.

Требуется найти наилучшие в среднем квадратичные оценки $\bar{y}$ $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$, $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$, параметров v, μ_i, α_i, $i = 0, 1, 2$.

Решение. Согласно данным, приведенным в табл. 2, системы (7)–(9), (11), (13) соответственно принимают вид (в данном случае в (7)–(9) отсутствует последнее уравнение):

$$\begin{cases} 80 = -\mu_0 \cdot 400 + 300, \\ 20 = -\mu_0 \cdot 480 + 310, \\ 20 = -\mu_0 \cdot 500 + 315, \\ 30 = -\mu_0 \cdot 520 + 320; \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} 30 = -\mu_1 \cdot 420 + 400, \\ 30 = -\mu_1 \cdot 450 + 420, \\ 20 = -\mu_1 \cdot 480 + 430, \\ 40 = -\mu_1 \cdot 500 + 440; \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} 20 = -\mu_2 \cdot 440 + 400, \\ 20 = -\mu_2 \cdot 460 + 410, \\ 30 = -\mu_2 \cdot 480 + 420, \\ 10 = -\mu_2 \cdot 510 + 430; \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \cdot \ln \frac{1020}{1000}, \\ v_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1040}{1000}, \\ v_3 = \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{1050}{1000}, \\ v_4 = \frac{1}{4} \cdot \ln \frac{1100}{1000}; \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} 450 = a_0 \cdot 450 + a_1 \cdot 350 + a_2 \cdot 490, \\ 455 = a_0 \cdot 455 + a_1 \cdot 320 + a_2 \cdot 495, \\ 460 = a_0 \cdot 460 + a_1 \cdot 400 + a_2 \cdot 510, \\ 430 = a_0 \cdot 430 + a_1 \cdot 380 + a_2 \cdot 520, \\ 440 = a_0 \cdot 440 + a_1 \cdot 390 + a_2 \cdot 530. \end{cases} \quad (19)$$

Из системы (15) находим

$\mu_0^0 = 0{,}55,\ \mu_0^1 = 0{,}6,\ \mu_0^2 = 0{,}59,\ \mu_0^3 = 0{,}58$;

из системы (16) находим

$\mu_1^0 = 0{,}88,\ \mu_1^1 = 0{,}87,\ \mu_1^2 = 0{,}85,\ \mu_1^3 = 0{,}8$;

из (17) находим

$\mu_2^0 = 0{,}86,\ \mu_2^1 = 0{,}85,\ \mu_2^2 = 0{,}8,\ \mu_2^3 = 0{,}82$;

из (18)

$\nu_1 = 0{,}0198,\ \nu_2 = 0{,}0196,\ \nu_3 = 0{,}016,\ \nu_4 = 0{,}024$;

и наконец, из (19) находим

$a_0^i = 1,\ a_1^i = 0,\ a_2^i = 0,\ i = 0,1,\ldots,m.$

Задачи (15)–(19) в данном случае принимают соответственно вид:

$$\begin{aligned} &(\mu_0 - 0{,}55)^2 + (\mu_0 - 0{,}6)^2 + (\mu_0 - 0{,}59)^2 + (\mu_0 - 0{,}58)^2 \to \min, \quad 0 \le \mu_0 \le 1, \\ &(\mu_1 - 0{,}88)^2 + (\mu_1 - 0{,}87)^2 + (\mu_1 - 0{,}85)^2 + (\mu_1 - 0{,}8)^2 \to \min, \quad 0 \le \mu_1 \le 1, \\ &(\mu_2 - 0{,}86)^2 + (\mu_2 - 0{,}85)^2 + (\mu_2 - 0{,}8)^2 + (\mu_2 - 0{,}82)^2 \to \min, \quad 0 \le \mu_2 \le 1, \end{aligned}$$

$$(\nu - 0{,}0198)^2 + (\nu - 0{,}0196)^2 + (\nu - 0{,}016)^2 + (\nu - 0{,}024)^2 \to \min, \quad -1 \le \nu \le 1,$$

$$\begin{aligned} &(a_0 - 1)^2 + (a_0 - 1)^2 + (a_0 - 1)^2 + (a_0 - 1)^2 \to \min,\ 0 \le a_0 \le 1, \\ &(a_1 - 0)^2 + (a_1 - 0)^2 + (a_1 - 0)^2 + (a_1 - 0)^2 \to \min,\ 0 \le a_1 \le 1, \\ &(a_2 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2 \to \min,\ 0 \le a_2 \le 1. \end{aligned}$$

С помощью средств Microsoft Excel находим окончательно исходной задачи:

$$\overline{\mu}_0 = 0{,}58,\ \overline{\mu}_1 = 0{,}85,\ \overline{\mu}_2 = 0{,}83,\ \overline{\nu} = 0{,}02,\ \overline{a}_0 = 1,\ \overline{a}_1 = 0,\ \overline{a}_2 = 0.$$

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Колемаев В. А.* Математическая экономика: Учебник для вузов. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2002. С. 121.

[2] Там же. С. 121.

[3] Там же. С. 121.

[4] *Вержбицкий В. М.* Численные методы. М.: Высшая школа, 2001. С. 189.

[5] *Сизиков В. С.* Математические методы обработки результатов измерений: Учебник для вузов. СПб.: Политехника, 2001. С. 217.