

КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВЕ КУЛЬТУРОТВОРЧЕСКОГО ПОДХОДА

Статья посвящена проблемам разработки курса математики для начальной школы. Предлагается организовать изучение математики в начальной школе на основе культуротворческого подхода, который чрезвычайно актуален в настоящее время. Такой подход позволяет учитывать современные идеи в образовании: гуманизм, включение в процесс обучения личного опыта ребенка, развитие образного мышления, изучение элементов логики и т.д. В статье рассматриваются цели построения курса, содержание и методы обучения.

Переосмысление места, роли, целей образования касается и его математической составляющей. В настоящее время под образованием человека понимается обретение им своего образа: неповторимой индивидуальности, духовности, творческого начала¹. Происходит переориентация образования на «культуросообразную» систему. Образование создает условия для «вращения» человека в культуру, для культуроосвоения, включающего в себя элементы культуротворчества².

Настоящий курс математики исходит из общей позиции, что образование ориентировано на подготовку человека не только грамотного, способного адаптироваться в современном обществе, но и духовного, овладевающего целостным, ценностно-смысловым содержанием образования, т. е. человека, являющегося носителем и преобразователем культуры³. Образованный человек — это человек, обладающий целостной картиной мира и понимающий свое место в нем, способный сознательно и целесообразно действовать в окружающем мире. Поэтому в основу программы положена идея развития и обучения ребенка с учетом его субъектного опыта (приобретенного в процессе жизни). Развитие происходит не путем надстройки нового опыта на старый, а путем перестройки, дополнения и преобразования прежнего опыта⁴. Первоначально субъектный опыт человека формируется через освоение пространства, восприни-

маемого *органами чувств*. Образовательная система ставит задачу преобразования субъектного опыта ребенка, сохранение и развитие его индивидуального мировоззрения как уникального вклада в совокупность представлений о мире (И. С. Якиманская).

Курс математики для начальных классов создан в рамках проекта «Мир ребенка — мир культуры», нацеленного на становление ребенка как носителя и преобразователя культуры с учетом его личностных особенностей, опыта.

Цели и задачи курса

При определении роли учебного предмета в образовании учитывалась его *бифункциональность*: направленность учебного предмета, с одной стороны, на развитие и самопознание ребенка, с другой — на понимание ребенком окружающего мира, места в нем математики. В связи с этим выделены две основные функции начального математического образования: 1) развитие и познание учениками себя, 2) овладение математическим языком, знаниями и деятельностью с целью знакомства с соответствующей наукой и познания окружающего ребенка мира с математических позиций.

Обе функции вносят вклад в создание основы математической культуры школьников. Для их реализации мы выделяем *две группы целей и задач начального обучения математике*: психолого-педагогические и предметные.

Психолого-педагогические цели

1. Формирование предпосылок теоретического мышления. Развитие образного и практического видов мышления, образной, ассоциативной и на их основе логической памяти. Развитие дивергентных мыслительных операций.

Достижение этой цели предполагает решение следующих задач:

а) Развитие интеллектуальных умений:

- общих — анализ, сравнение, классификация, обобщение, планирование;
- специфических, характерных для математической деятельности, — абстрагирование, моделирование, обоснование математических операций, оперирование пространственными образами, что позволит обеспечить преемственность с основной школой *в развивающем аспекте*.

б) Развитие эмоциональной и мотивационной сферы учащихся.

в) Развитие творческих и рефлексивных способностей учащихся.

2. Развитие ребенка как субъекта учебной деятельности.

Достижение этой цели предполагает обучение умениям: а) проводить содержательный анализ ситуации; б) формулировать цель предстоящей работы; в) планировать и контролировать свою деятельность; г) оценивать уровень достижения поставленной цели. Это позволит ученику осознавать ценность своего образования, развивать и корректировать свои ценностные устремления и качества личности.

Предметные цели

Создание у детей некоторого целостного представления о математике и овладение математической деятельностью (на определенном уровне).

Достижение этих целей обеспечивается через решение *следующих задач*.

а) формирование основ математической деятельности: умения оперировать знаково-символическими средствами и обосновывать свои рассуждения, умения оперировать положением, структурой

геометрических образов, умения воспринимать и перерабатывать математическую информацию;

б) овладение первоначальными представлениями о математическом моделировании, овладение математической речью: умением грамотно изложить, объяснить и обосновать производимые действия; овладение системой общих способов математических действий;

в) овладение «системой» математических понятий и обобщенных представлений, адекватных научным понятиям, что позволяет обеспечить преемственность с основной школой *в содержательном аспекте*;

г) использование элементов математических знаний историко-культурного, этимологического характера.

В процессе достижения поставленных целей и задач ребенок овладевает основами математической культуры.

Начальный курс математики построен на основе следующих положений:

1. Изучение материала строится с учетом: 1) логики развития, индивидуальных и возрастных особенностей младших школьников; 2) необходимости создания условий: а) для адаптации ребенка к окружающему миру в настоящем и будущем, б) для развития способностей к творческому преобразованию мира и себя, в) для развития коммуникативных умений; 3) направленности процесса обучения математике на формирование учащимися математической составляющей образа мира *на данном возрастном этапе*^б и овладение математической культурой; 4) истории развития математики.

2. Развивающая и предметная цели обучения математике равноправны и взаимосвязаны. Поэтому не только выявляется уровень математических знаний и умений учащихся, но и проводится диагностика развития учащихся.

3. В содержании курса выделены составляющие: *ведущие* — арифметика с элементами алгебры и наглядная геометрия; *дополнительные*: элементы комбинаторики и элементы логики. Каждая из них имеет свое происхождение (напри-

мер, арифметика была наукой о дискретном, а геометрия — наукой о непрерывной протяженности⁷; самостоятельную логику развертывания и значение в развитии ребенка: геометрия в большей степени связана с развитием пространственного мышления; арифметика, элементы алгебры и логики — со словесно-логическим мышлением; изучение комбинаторики — с вариативностью и критичностью мышления. Выбор составляющих курса определен необходимостью пропедевтики соответствующих разделов математики и установления между ними внутрисубъектных связей (предметный аспект); учетом наиболее благоприятных периодов развития различных компонентов мышления и значением в этом развитии каждой составляющей (психологический аспект). Изучение всех составляющих во взаимосвязи с остальными создает более полное представление о математике.

4. Изучение курса организовано по спирали: вопросы программы рассматриваются неоднократно на все более высоком уровне. Содержание курса представляет собой взаимосвязанную последовательность тем.

5. Обучение направлено на понимание учебного материала (а не просто на тренинг и запоминание) через выявление и учет субъектного опыта учеников в содержании, в форме предъявления материала, в организации его усвоения и контроля. Введение нового математического объекта предполагает рассмотрение реальных ситуаций и их адаптированную научную трактовку, анализ близких ребенку примеров, применение знаний в реальной жизни. Ребенок переводит понятие на свой язык, связывает новые знания с наличными — вводит в свой субъектный опыт.

6. Воспитание осознания ценности математических знаний для изучения других предметов, для собственного становления и решения жизненных задач (интеллектуальный ресурс). Понимание места знаний по математике в мире, ответственное отношение к их использованию.

7. Реализация преемственности (содержательной и развивающей).

8. Реализация вариативности через дифференциацию учебную (задания отличаются по степени сложности, самостоятельности выполнения, по объему) и психологическую (задания отличаются по способу восприятия и выполнения: они предназначены для слухового, зрительного или двигательного восприятия). Вариативность относится к содержанию заданий, к методам и средствам обучения. Ученик имеет право выбора заданий. Кроме того, реализуется двуполушарный подход к обучению⁸ — каждая тема курса рассматривается и с логической, и с образной точки зрения. Создаются условия для развития неведущих каналов восприятия и полушария.

9. Деятельностный подход. Изучение нового материала организуется через самостоятельную деятельность ребенка, направленную на разрешение системы проблемных ситуаций, на основе которых через диалог (с учителем или сверстниками) формулируются теоретические выводы.

10. Эмоциональная составляющая математического образования. Уделяется специальное внимание созданию учебной доминанты, настрою на урок, возникновению желания изучать математику, развитию познавательного интереса и мотивации («Чтобы переварить знания, надо поглощать их с аппетитом». *А. Франс*).

11. Реализация развивающей и предметной целей обучения математике опирается на принципы «Не навреди!» и «Ученик имеет право на ошибку».

12. Процесс обучения математике является открытой системой по отношению к другому опыту и преобразованиям.

Характеристика содержания

Арифметика с элементами алгебры

1) *Целые неотрицательные числа и действия с ними.*

Линия числа и вычислений является ведущей содержательной линией курса.

Количественные особенности реального мира (наряду с пространственными

и структурными) выступают в качестве одного из объектов современной математики (и первого объекта в ходе исторического развития общества). Изучение количественных отношений соответствует культуротворческому подходу к образованию, оно необходимо школьнику для лучшего понимания и математики, и мира. Умение оперировать идеальными, абстрактными объектами отражает общую специфику математики.

Множество натуральных чисел изучается по одной схеме с другими числовыми системами (элементы множества, отношения между ними, операции, свойства операций, вычислительные приемы, совместное выполнение разных операций). Правильный подход к изучению темы в начальных классах обеспечивает содержательную и психологическую преемственность в обучении.

Линия числа включает понятие натурального числа (его образование, запись, чтение, сравнение), операции (арифметические действия) над натуральными числами и нулем, теоретические знания о каждом действии и основанные на этих знаниях устные и письменные вычислительные приемы.

Существуют различные подходы к понятию натурального числа. В качестве ведущего реализуется теоретико-множественный подход (количественный аспект), в соответствии с которым натуральное число выступает как эквивалент класса конечных равномоощных множеств. Детям предъявляют множества различной природы, содержащие одно и то же количество элементов, при этом используется основной способ получения натуральных чисел, имеющийся в опыте детей, — счет. С порядковым аспектом числа ученики знакомятся при образовании натурального числа прибавлением 1 к предыдущему числу и вычитанием 1 из непосредственно следующего числа (элементы аксиоматического подхода). С измерительным аспектом — при получении числа в результате измерения величин, т. е. сравнения величины с эталоном. Операторный аспект натурального числа

проявляется, когда числа получают в результате выполнения арифметических действий. Использование для счета элементов разной природы (предметов, движений, звуков) позволяет показать независимость числа от природы множеств и задействовать разные каналы восприятия детей. Счет отдельными элементами и их группами (парами, тройками и др.) позволяет показать зависимость результата счета от счетной единицы, подготовить введение десятичной группировки (десяток, сотня и т. д.), показать аналогию счета и измерения. Различные подходы к числу формируют у детей более полное представление о нем, о способах его иллюстрации.

Натуральные числа и 0 изучаются по концентрам: числа от 0 до 20, от 0 до 100, от 0 до 1000, от 0 до 1 000 000. Изучение в качестве первого концентра чисел от 0 до 20 (а не до 10) позволяет детям: а) хорошо усвоить способ образования натурального числа прибавлением 1 к предыдущему числу и вычитанием 1 из непосредственно следующего за ним; б) выполнять счет не только по одному, но и группами, в) рассмотреть все табличные случаи сложения однозначных чисел.

Смысл арифметических действий раскрывается, прежде всего, с теоретико-множественной точки зрения, т. е. через операции над множествами. Позже используется измерение и уравнивание величин. Кроме того, действия второй ступени рассматривают как усложнение соответствующих действий первой ступени: умножение — как сложение равных чисел, а деление — как вычитание равных чисел (каждое действие второй ступени заменяет несколько действий первой ступени). На этапе обобщения вычитание и деление рассматриваются как обратные сложению и умножению (в этом проявляются элементы аксиоматической теории). Различные точки зрения на арифметические действия позволяют детям лучше понять их, а разделение действий на ступени — видеть аналогию действий внутри одной ступени и отли-

чия от другой (они проявляются в свойствах действий и в правиле порядка выполнения действий).

Специальное внимание уделяется изучению теоретических знаний о каждом арифметическом действии, таких как: конкретный смысл действия, взаимосвязь его результата и компонентов, свойства действия, знания об изменении результатов действия в зависимости от изменения его компонентов, правила. Эти знания находят широкое применение для обоснования общих и частных вычислительных приемов, для рационализации программы вычислений, для составления, анализа и запоминания таблиц сложения и умножения, для поиска различных способов решения задач и уравнений, сравнения выражений. Это дает ученику возможность выбора более понятного способа выполнения задания, обеспечивает его понимание, способствует развитию вариативности мышления.

Для обеспечения понимания арифметического материала используются разные языки. Это позволяет учить школьников моделировать ситуации, осуществлять обратимый перевод математических фактов с одного языка на другой: оперировать конечными множествами и величинами (практический язык); выполнять схематические рисунки и чертежи (графический язык); выполнять арифметические действия над числами, записанными арабскими цифрами и условными знаками (символический язык); формулировать математические утверждения на бытовом языке и с использованием доступной детям научной терминологии (вербальный язык). Перевод и установление содержательных связей между знаниями способствует их пониманию.

Важную роль в усвоении знаний и развитии личности играют задания творческого и исследовательского характера. Знания являются предпосылкой, средством и результатом творчества⁹. Опыт творческой деятельности — один из компонентов содержания образования — накапливается при выполнении заданий

творческого характера, в том числе, исследовательских. Они направлены на классификацию числовых выражений, на установление закономерностей в наборе выражений; на изменение, дополнение, составление выражений по указанию о применении конкретных знаний об арифметических действиях и вычислительных приемах; выявление влияния изменения выражений на способ вычисления их значений.

Знакомство с рационализацией вычислений позволяет: а) увидеть красоту и изящество вычислительной работы, сделать вычислительную деятельность интересной, разнообразной, творческой, более привлекательной, б) внести вклад в подготовку к последующему использованию техники за счет обучения более высокому уровню планирования деятельности, поиску различных вариантов решения и выбору более рационального, прогнозированию результатов. Такая работа помогает вырастить из младшего школьника культурного вычислителя.

2) *Величины.*

Понятие величины является основным в приложениях математики к практическим задачам и одним из основных в школьном курсе математики. В начальной школе уточняются представления о величинах, известных детям (длина, емкость, масса и др.), происходит знакомство с новыми видами величин (площадь, время, скорость и т. д.). Большая часть величин рассматривается только в связи с решением текстовых задач. Величина вводится как свойство объектов реальной действительности, по которому их можно сравнивать, которое можно измерить, а с числовыми значениями можно выполнять арифметические действия. Первоначально процесс измерения понимается как процесс сравнения данной величины с величиной, принятой за единицу. Поэтому большое внимание уделяется воспроизведению величины, равной данной. Дети учатся сравнивать величины между собой непосредственно, затем — через использование посредника, а позже — эталона; строить величины по заданной

единице и числовому значению, решать обратные задачи. Уравнивание величин позволяет по-новому рассмотреть операции сложения и вычитания, что дает возможность использовать отрезки как средство моделирования в сюжетных задачах. На данном этапе вводятся сначала нестандартные, затем старинные неметрические единицы, потом уже метрические единицы длины, емкости, массы. Практически дети убеждаются в необходимости более крупных единиц каждой величины, знакомятся с соотношениями между единицами величин, с выполнением арифметических действий над величинами и т. д. Одновременно в практической деятельности школьники знакомятся с измерительными инструментами, формируют измерительные умения. Тесная связь изучения величин и нумерации позволяет осознать позиционный способ записи числа и десятичную систему счисления.

Изучая различные величины, ученики усваивают основные признаки понятия «величина» — величины можно сравнивать, складывать, измерять.

3) Арифметические задачи.

В процессе решения задач конкретных видов происходит обучение общим приемам работы над задачей. Очень важно помочь детям понять, что большие группы задач, которые отличаются друг от друга только сюжетом, имеют один способ решения. Для его нахождения надо ориентироваться на отношения между данными, данными и искомым.

Поиску решения задачи, построению цепочки суждений помогает использование наглядных опор: схематического чертежа, граф-схемы, алгоритмического предписания и т. д., создаваемых детьми совместно.

В обучении решению задач выделены этапы: подготовительный, обучение решению простых задач и анализу текста задачи; введение задач, обратных данной; введение составных задач; обучение составлению задач, решению задач несколькими способами, элементарному исследованию задач.

На подготовительном этапе на задачах в ситуациях с одновременным использованием разных моделей (предметных, графических, символических) рассматривается конкретный смысл действий сложения и вычитания, вводится понятие «увеличить (уменьшить) на несколько единиц». Разнообразные сюжеты задач позволяют ученику убедиться, что внешне различные действия часто имеют один образ и математическую запись. Обучению анализу текста и обоснованию выбора действия помогает использование различных видов иллюстрации текста задачи: предметная, схематический рисунок, схематический чертеж, краткая запись с опорными словами, таблица. Для первых простых задач целесообразно использовать схематический чертеж, так как он: дает наглядное представление о связях искомого и данных задачи; заставляет ученика внимательно читать текст задачи; является наглядной опорой для выбора арифметического действия и его обоснования; облегчает поиск разных способов решения задач.

Осознанию необходимости анализа текста способствуют задачи с условными данными, с лишними и недостающими данными, задачи, не имеющие решения, задачи, в которых числовые данные записаны словами, заданы перечислением объектов и т. д. Полезно составлять задачи, аналогичные данной, задачи с тем же условием и новым вопросом и т. д. — получить из одной задачи целое семейство задач. Это помогает ученику осознать тесную связь текста задачи и ее решения. Исследованию при решении сюжетных задач подлежат: влияние изменения условия задачи (чисел, отношений, величин) на увеличение или уменьшение ее ответа (и наоборот); влияние изменения условия задачи (чисел, отношений, величин) на способ или способы решения задачи. Для этого используются дополнительные вопросы и задания учебных пособий.

Решение простых задач с пропорциональными величинами позволяет усвоить взаимосвязи между тройками величин

(таких, как цена, количество, стоимость). Для выявления общности этих связей используется переход от одной тройки величин к другой. Задания исследовательского характера позволяют пронаблюдать, как изменение одной величины влияет на изменение другой величины при постоянной третьей. Решение составных задач с пропорциональными величинами, в том числе связанных с движением, опирается на знание взаимосвязи величин (как найти цену по стоимости и количеству) и на знания пропорциональной зависимости величин (как изменится стоимость при увеличении количества в несколько раз и постоянной цене). Для нахождения различных способов решения задач используются: анализ схематического чертежа, преобразование числового выражения, анализ числовых данных и установление их пропорциональной зависимости и др.

4) *Элементы алгебры.*

Элементы алгебры включают числовые выражения и выражения с переменными, числовые равенства и неравенства, равенства и неравенства с переменными, уравнения, а также функциональную пропедевтику, которая осуществляется на всех перечисленных объектах, при решении и исследовании задач, при работе с величинами. Алгебраический материал представляет собой обобщение основных арифметических вопросов. Условная символика является средством обобщения, удержания общего и отвлечения от частного.

Изучение элементов алгебры позволяет повысить теоретический уровень курса математики, что способствует умственному развитию школьников, лучшей подготовке к обучению в основной школе, овладению более сложными видами деятельности на основе использования различных теоретических знаний, что позволяет применять знания в различных (и новых) условиях, сосредоточиться на сути материала, отвлекаясь от конкретных чисел. В этом случае знания выполняют развивающую функцию.

Работа с обобщенными объектами позволяет реализовать такие задачи обучения математике: развитие словесно-логического мышления, интеллектуальных умений — общих (сравнения, обобщения, планирования) и характерных именно для математической деятельности (абстрагирования, моделирования, обоснования математических операций); развитие творческих способностей и исследовательских умений; овладение элементами математического моделирования, математической речью, общими способами математических действий.

Алгебраический материал вводится как индуктивным путем на основе рассмотрения достаточного количества частных случаев при варьировании несущественных признаков, так и на основе содержательного обобщения признаков и отношений объектов при их глубоком анализе.

Для обобщенных записей применяются сначала различные нестандартные обозначения, затем общепринятые латинские буквы. Виды знакового моделирования зависят от особенностей материала. При введении правила порядка выполнения действий, для которого не важны числа, применяются схемы выражений, отражающие только расположение действий и скобок, например: $-(+)$. Для применения теоретических знаний, учитывающих равенство некоторых чисел, используется обозначение равных элементов одинаковыми значками, например: $(\langle \rangle + \langle \rangle) - \langle \rangle = \langle \rangle$.

При изучении элементов алгебры важно, чтобы ученики осуществляли два противоположных процесса — обобщение конкретного и конкретизацию обобщенного. Умение привести свои конкретные примеры, свою интерпретацию обобщенной математической записи свидетельствует о понимании детьми учебного материала. Использование различных знаковых моделей, переход от одних моделей к другим помогает детям овладеть основами моделирования и способствует пониманию учебного материала.

Математическая деятельность предполагает переход от реальности к модели, работу с моделью и интерпретацию полученных на модели результатов в реальной жизни. При этом важно, особенно для осуществления последнего шага, организовать элементарную исследовательскую деятельность учащихся. Прежде всего, это относится к выявлению влияния изменений математической модели на ее математический и реальный смысл. Выявляется зависимость между структурой выражения и программой вычисления его значения, между структурой выражения и возможностью его тождественного преобразования, между числовыми данными и структурой уравнения и способом его решения на основе различных теоретических знаний; ведется поиск основания классификации алгебраических объектов; способов их упорядочивания и др.

Работа над числовыми выражениями ведется с первого класса. Дети учатся читать, записывать, составлять числовые выражения, вычислять их значение. Правило порядка выполнения действий в выражениях со скобками и без них изучается сначала на схемах выражений, а затем на числовых выражениях, которые позволяют детям выполнять вычисления в неверном порядке, например: $90 - 60 : 15 \times 2$. В этом случае верные вычисления свидетельствуют об осознанности знаний о порядке выполнения действий. Обучение рационализации программы вычислений основано на применении других теоретических знаний об арифметических действиях. Используются два способа рационализации программы: 1) за счет преобразования данного выражения в новое, имеющее другую программу, например: $(490 + 49) : 7 = 490 : 7 + 49 : 7$; 2) за счет возможности не выполнять некоторые действия в исходной программе, например: $87 : 3 - 87 : 3 = 0$.

С первого класса вводятся выражения, в которых переменная представлена в виде «окошка» и «сказочного» числа — значка, за которым могут «прятаться» какие-то числа. Важно показать, что из-

менение значений «спрятанных» чисел, как правило, приводит к изменению значения всего выражения. Числовые равенства и неравенства появляются в первом классе в результате сравнения чисел, числа и выражения, двух выражений. Сравнение числовых выражений выполняется на основе взаимно-однозначного соответствия элементов множеств, сравнения их количества, вычисления значений и, если возможно, на основе теоретических знаний об арифметических действиях. Равенства с переменными используются для обобщенной записи свойств действий, правил, их усвоения и применения.

Уравнения в явном виде вводятся лишь в четвертом классе, но готовят к ним с первого класса (равенства с «окошками»). Сначала поиск неизвестного ведут подбором на основе знания состава числа и теоретических знаний о действиях. Основной способ решения уравнений опирается на знания взаимосвязи результатов и компонентов действий. Решение уравнений, содержащих два действия, основано на двукратном использовании взаимосвязей результатов и компонентов действий или на применении других теоретических знаний (без вычислений).

К элементам алгебры относится и функциональная пропедевтика, включающая две идеи, связанные с функцией, — соответствия и зависимости. Соответствие устанавливают (без использования термина) между набором выражений и их значений, между компонентами и результатами действий при заполнении таблиц и т. д. Функциональная зависимость прослеживается в знаниях об изменении результатов действий при изменении одного из компонентов, в пропорциональной зависимости величин в сюжетных задачах. Для выражений с переменными (с «окошками», «сказочными» числами) в неявном виде рассматриваются вопросы исследования функции: какие значения может принимать переменная, какие — выражение (в сюжетных задачах учитывается и структура

выражения, и соответствие чисел сюжету), при каких значениях переменной значение выражения убывает или возрастает, когда оно будет наибольшим, наименьшим, равным нулю.

Наглядная геометрия

Изучение любого учебного материала, в том числе и геометрического, строится через познание ребенком окружающего пространства. Оно наполнено образами геометрических фигур и отношений. Изначально геометрия формировалась как наука о непосредственно наблюдаемом окружающем пространстве. Трудность заключается в том, что не существует реальных отрезков, квадратов, кубов, так как нет линий и поверхностей без толщины, нет идеально плоских поверхностей и прямых линий. В школе учителя и учащиеся называют фигурами реальные или специально созданные предметы, не всегда понимая, что они выступают в качестве заместителей геометрических объектов, а значит, являются *материальными* моделями (терминология В. А. Штоффа).

Любой предмет характеризуется различными свойствами, поэтому его образ восприятия (перцептивный образ) формируется на основе разных ощущений.

Ребенка необходимо учить *выделять* и *абстрагировать* в предметах их геометрические свойства, видеть в них модели геометрических объектов, т. е. создавать *геометрические* образы как основы геометрических понятий. При этом важными являются следующие вопросы:

- Как выбрать материальную модель геометрического объекта?

В окружающем ребенка мире один и тот же предмет может мыслиться как модель разных геометрических фигур. Так, город воспринимается как точка, когда ищем его местоположение на карте; но как плоская фигура — когда определяем его площадь. То есть все это зависит от ситуации, в которой мы рассматриваем объект, от тех свойств предмета, которые

важны в данной ситуации. Показывая дощечку и называя ее квадратом, необходимо подчеркнуть, что мы не обращаем внимание на толщину. Поэтому в начале процесса обучения целесообразнее показывать плоские фигуры, изобразив их на доске или как поверхности предметов.

- С каких фигур начинать изучение геометрии?

Простейшие геометрические фигуры (точка, отрезок) в науке не являются простыми с точки зрения восприятия ребенка, так как требуют высокого уровня абстрагирования, что недоступно первокласснику (например, точка не имеет размеров). Все окружающие ребенка предметы трехмерны, они являются моделями объемных фигур, изучение которых требует меньшей степени абстрагирования, чем плоских. Поэтому лучше сначала познакомить детей с объемными геометрическими фигурами, затем с плоскими.

Такой подход целесообразен и с точки зрения восприятия. Понятие в своем развитии проходит чувственную и рациональную ступень познания. На чувственной ступени познания человек создает образы восприятия и представления. На рациональной ступени, а точнее, на эмпирической стадии этой ступени формируются обобщенные представления или образы-понятия¹⁰. Фактически в начальной школе у учащихся могут быть сформированы обобщенные представления, т. е. первый (создание образов) и второй (формирование представлений) этапы становления понятия. В начальной школе должен быть сформирован значительный запас образов восприятия и представлений геометрических понятий из систематического курса геометрии. Поэтому младшим школьникам предлагаются не определения, а описания понятий, направленные на создание образов, адекватных понятиям.

Процесс создания первичных и вторичных образов (представлений) имеет определенные закономерности, на их основе мы строим геометрическую линию

курса. Основа формирования образов восприятия — активное осязание. Его особенности положены в основу следующих рекомендаций: **а)** желательна, чтобы активное осязание предваряло или сочеталось со зрительным восприятием геометрического материала через определение формы предмета с помощью активного осязания, с закрытыми глазами; **б)** активное осязание двумя руками — основа создания «воздушной модели» геометрических тел; **в)** при зрительном восприятии модели объемной фигуры необходимо рассмотреть ее с разных сторон; **г)** прежде чем давать в руки ребенку линейку, необходимо помочь ему научиться проводить от руки прямые, кривые, ломаные линии; **д)** организуя измерительную деятельность, необходимо сначала через руки сформировать представления о процессе измерения.

Для создания чувственной основы геометрических знаний нужна большая доля практической работы руками, каждый ребенок должен иметь модели фигур для ощупывания и рассматривания с разных сторон.

Учебная работа в геометрическом пространстве, в первую очередь, обеспечивается деятельностью пространственного мышления (ПМ), направленного на создание пространственных образов (с учетом их положения в пространстве, формы, размеров) и оперирование ими. ПМ — разновидность образного мышления. Наиболее благоприятен для его развития младший школьный возраст. Значимость ПМ определяется следующим: **а)** уровень его развития — один из основных критериев развития личности, **б)** ориентация в реальном и воображаемом пространстве требуется в любой деятельности (бытовой и профессиональной), **в)** представления как результат деятельности образного мышления позволяют прогнозировать, планировать, воображать, **г)** умение действовать в уме, многозначность, целостность восприятия — основные составляющие образного мышления.

Поэтому основная цель геометрической линии в программе — развитие пространственного мышления учащихся как разновидности образного мышления.

В деятельности пространственного мышления выделяют две ступени: 1) создание пространственных представлений (ПП), 2) оперирование ими. ПП развиваются в следующей последовательности: топологические, проективные, метрические. Именно в логике становления ПП и с учетом ступеней деятельности ПМ строится учебный материал (в такой же последовательности человек воспринимает предметы и оперирует их образами в реальной жизни).

Содержание геометрической составляющей включает следующие этапы: 1) развитие топологических представлений через умения выделять объект и фон, определять внутреннюю, внешнюю области, границу фигуры; 2) создание первичных пространственных образов и представлений о взаимном положении объектов (без внимания к их форме); 3) развитие умения менять точку отсчета как основу работы в геометрическом пространстве; развитие пространственных проективных представлений; 4) выход в пространство с постоянно меняющейся точкой отсчета при отсутствии объективных; 5) формирование представлений о конкретных геометрических фигурах и геометрических отношениях в рамках идеи фузионизма (плоскостные фигуры и отношения в плоскости являются как производные от пространственных и изучаются вместе); 6) введение теоретико-множественной символики; 7) уточнение первичных ПП в плане метрики; 8) формирование системы обобщенных представлений на основе умения выделять род и видовые отличия фигуры; 9) знакомство и работа с такими структурными единицами ПМ, как преобразования (симметрии).

Реализация принципа фузионизма позволяет использовать субъектный опыт ребенка, что создает условия для эффективного усвоения учебного материала.

Элементы комбинаторики

Выпускники школы должны иметь представление о двух крупных направлениях математики: о непрерывных и дискретных величинах. Младшие школьники чаще всего имеют дело с множествами из дискретных элементов. Поэтому естественно введение в курс системы комбинаторных задач, что подтверждено мировым опытом. Это расширяет представления учащихся о математике как о науке с широкой сферой применимости.

В программе ставится цель развития у учащихся способности проводить комбинаторные рассуждения через систему специально подобранных задач. В нее включены: а) перечислительные задачи и задачи на выяснение возможности существования комбинаторного соединения с заданными свойствами; задачи на выбор наилучшего варианта по определенным критериям; б) обратные комбинаторные задачи; в) задачи на разные способы упорядочения (слева направо, сверху вниз, по кругу и т. д.); г) задачи с ограничениями на составляемые комбинаторные соединения.

При решении комбинаторных задач способом перебора нужно соединять отдельные элементы, образуя тем самым новые объекты различными способами. Создание соединений может происходить в процессе непосредственного манипулирования предметами или их заместителями, а также с помощью представительства этих манипуляций (деятельности по созданию и оперированию образами). Ставится задача найти все возможные варианты (множество элементов конечное) и выбрать среди них наилучший по определенным критериям. Для этого удобно организовывать целенаправленный перебор всех вариантов, разработав стратегию проведения рассуждения.

Комбинаторные рассуждения позволяют реализовать следующие задачи обучения математике: развитие вари-

тивности и критичности мышления (имеет большое значение для дальнейшего обучения математике и лучшей ориентировки в изменчивой реальной жизни); совершенствование умственных операций (анализа, синтеза, сравнения, планирования, обобщения и абстрагирования); развитие образного, словесно-логического и действенного компонентов мышления в их взаимосвязи. Таким образом, элементы комбинаторики направлены на понимание ребенком мира, на развитие и самопознание личности.

В курс входят три основные группы задач: на нахождение перестановок, размещений и сочетаний. Разнообразие задач достигается варьированием числа и характера элементов, их повторением, дополнительными условиями; способами упорядочения элементов в объекте; характером требования задачи.

Главная цель обучения детей решать комбинаторные задачи — формировать умение проводить комбинаторные рассуждения (а не учить решать задачи определенного типа). Варьирование условий осуществления комбинаторных рассуждений не позволяет ученикам действовать по образцу. В каждой конкретной задаче используются те ее особенности, которые позволяют решить задачу проще. Обобщение способов действия происходит на основе накопленного учащимися большого опыта решения разнообразных задач с учетом того, что детям присуща своя собственная, пусть пока несовершенная, логика рассуждений. Ее нельзя подавлять, навязывая «взрослые» способы решения задач, но нужно помогать ученику исправлять недостатки в его логике. Ученик может действовать в соответствии со своими предпочтениями.

Основное направление работы — это переход учащихся от осуществления случайного перебора вариантов к проведению систематического перебора сначала без использования средств его организации (таблиц и графов), а затем с их помощью. При решении некоторых ком-

бинаторных задач происходит отказ от непосредственного перебора всех возможных вариантов и использование комбинаторных правил (правила суммы, правила произведения).

Содержание комбинаторных задач связано с другими линиями курса, что способствует их лучшему усвоению и разнообразит содержание задач.

Элементы логики

Необходимость *логического развития* учащихся определяется потребностью в логических обоснованиях, понятийном мышлении при изучении математики в основной школе и развитием словесно-логического мышления, которое в сочетании с образным позволяет находить

оптимальные решения проблемных ситуаций в профессиональной и бытовой деятельности. Законы логики, правила вывода лежат в основе построения любой математической теории, поэтому курс включает элементы логики. Длительный процесс логического развития необходимо начинать в младших классах.

Работа с понятиями, простыми и сложными суждениями (высказываниями) ведется на протяжении всего начального курса математики, начиная со второго класса. В четвертом классе дети учатся строить сами не только индуктивные, но и короткие дедуктивные обоснования (умозаключения).

Содержание разработанного начального курса математики соответствует образовательным стандартам.

ПРИМЕЧАНИЯ

¹ Бондаревская Е. В. Гуманистическая парадигма личностно ориентированного образования // Педагогика. 1997. № 4. С. 11–17.

² Кудрявцев В. Т. Психология развития человека. Основания культурно-исторического подхода. Ч. 1. Рига, 1999.

³ Асмолов А. Г. Образование России в эпоху коммуникаций: от культуры полезности — к культуре достоинства: Сб. пленарных докладов Всероссийской научно-практ. конференции «Российская школа и Интернет». СПб., 2001. С. 3–14.

⁴ Пономарев Я. А. Развитие психологической организации интеллектуальной деятельности // Принцип развития в психологии. М., 1978. С. 63–80.

⁵ Якиманская И. С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе. М., 1996.

⁶ Валицкая А. П. Образование в России: Стратегия выбора: Монография. СПб., 1998.

⁷ Бурбаки Н. Архитектура математики. М., 1972.

⁸ Чуприкова Н. И. Умственное развитие и обучение (Психологические основы развивающего обучения). М., 1994.

⁹ Лернер И. Я. Дидактические основы методов обучения. М., 1981.

¹⁰ Веккер Л. М. Психические процессы. Л., 1976.

O. Ivashova, N. Podkhodova

CONCEPTION OF MATHEMATICAL EDUCATION IN PRIMARY SCHOOL ON THE BASIS OF CULTURAL AND CREATIVE APPROACH

The article deals with the problems of the construction of mathematical course in primary school. Authors suggest to organize studying of math in primary school on the basis of cultural and creative approach. This approach is very actual nowadays. It affords to take into consideration modern ideas in education such as humanism, including a child's experience into educational process, development of imaginary thinking, studying of elements of logic and so on. In the article the goals of construction, content and methods of teaching are described.