Е. М. Ложкина

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ПОНЯТИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Работа представлена кафедрой методики обучения математике.
Научный руководитель - доктор педагогических наук, профессор Н. С. Подходова

В статье па основе анализа научной литературы уточнены определения понятий «модель», «математическая модель», выделены критерии модели и математической модели, раскрыто их применение относительно моделей, с которыми сталкивается ученик при решении текстовых задач на уроках алгебры в основной школе.

Ключевые слова: математическая модель, критерии математической модели, виды моделей при решении текстовых задач.

Based on the analysis of the scientific literature, the article provides definitions of the concepts, such as «model», «mathematical model». The notions are detailed, the criteria of model and mathematical model are defined, their use concerning models, which students meet when doing sums at the lessons of algebra in the secondary school, is revealed.

Key words: mathematical model, criterion of mathematical model, types of models while doing text sums.

Внедрение в отечественную систему образования компетентностного подхода потребовало по-новому расставить акценты в системе знаний, умений, навыков, способностей, личностных и других качеств, которыми должен обладать ученик по окончании средней школы. Особую важность сегодня приобретает процесс формирования у учащихся общеучебных умений, позволяющих им активно действовать в реальной обстановке, применяя при этом весь арсенал собственных знаний и опыта. К числу таких умений относится умение моделировать. Все возрастающая математизация современной науки, вызванная потребностью в научных исследованиях обрабатывать все большее количество информации, поставила в один ряд с общеучебным умением моделировать - умение моделировать математически. Возникла потребность в его формировании у школьников.

Проблема поиска путей формирования У учащихся умения математически моделировать уже не раз поднималась и поднимается в педагогических, психологических, методических исследованиях, к числу которых относятся работы В. В. Давыдова, Т. Е. Демидовой, А. Г. Мордковича, Ю. Б. Мельникова, Н. Г. Салминой, А. П. Тонких, Л. М. Фридмана и других авторов. Однако только сегодня она начинает находить свое решение: в учебниках А. Г. Мордковича предлагается знакомить учащихся с понятием математической модели на интуитивном уровне, с видами математических моделей, этапами математического моделирования при решении текстовых задач алгебраическим методом. Цели *овладения* школьниками методом математического моделирования в современном курсе алгебры пока не ставится.

Сложность обучения учащихся одному из основных математических методов познания - методу моделирования - в первую очередь связана с неопределенностью его основных понятий в современной науке:

понятий «модель», «математическая модель», «научно-исследовательская модель».

В данной статье на основе анализа научных исследований мы попытались уточнить определения этих понятий, выделив критерии каждого, а также показать их применение относительно моделей, с которыми сталкивается школьник при решении текстовых задач на уроках алгебры.

В современных научных работах по философии, педагогике, психологии, методике преподавания математике существуют различные трактовки понятия «модель». С целью дальнейшего уточнения мы обратились к самой широкой из них: «Две системы объектов» (отношений) «А и В называются моделями друг друга (или моделирующими одна другую), если можно установить такое гомоморфное отображение системы А на некоторую систему А` и гомоморфное отображение В на некоторую систему В, что А` и В` изоморфны»[1].

Отношение «быть моделью» является отношением эквивалентности. Поэтому любую из попарно изоморфных систем мы можем считать моделью другой. Так, например, для формирования у школьников понятия линии, создания представления об этой геометрической фигуре, мы используем ее различные модели: нить, лежащую на столе, след реактивного самолета и другие, и, наоборот, при решении задач уже изображение линии служит моделью траектории движения пешехода, железнодорожных путей поезда и т. д.

В связи с тем что приведенное нами выше философское определение модели очень широкое и вряд ли доступно для усвоения учащимися, возникла необходимость в его уточнении, переформулировании в удобной для использования и доступной для школьников форме.

С этой целью в результате анализа исследований И. И. Блехмана, В. А. Глинского, Г. И Морозова, Г. И Рузавина, Н. Г. Салминой, Л. М. Фридмана, В. А. Штоффа и других ученых нами выделены критерии модели.

1. Объект М ***должен быть сконструирован (или выбран) в соответствии с определенной целью.*** Для разных целей для одного и того же объекта могут быть сконструированы разные модели.

2. Так как между объектом и его моделью должно быть возможно установление морфизма (это следует из приведенного выше определения), то и объект и модель должны обладать определенным сходством, но не быть тождественными друг другу. Это сходство выражается в том, ***что в модели должны быть представлены все существенные для цели ее конструирования свойства объекта.*** Только при этом условии ***модель*** может (и как отмечается в большинстве проанализированных нами исследований, ***должна) замещать соответствующий объект.***

Следующие два критерия необходимы для того, чтобы разграничить между собой понятия «модель», «абстракция», «идеальный объект».

3. Основные особенности модели по сравнению с идеальным объектом являются предметом специального рассмотрения в работах В. В. Давыдова и Н. Г. Салминой. В книге[2] авторы обращают внимание на то, что в отличие от идеального объекта - продукта идеализации, не имеющего аналога в действительности, ***модель всегда материальна,*** она представляет собой материализацию мысленных конструктов. Абстракция же - родовое понятие по отношению и к понятию модели, и к понятию идеального объекта. И модель, и идеальный объект - ***это абстракции особого рода.*** Ввиду того что в большинстве современных научных исследований общепринят термин «мысленные модели», в качестве одного из видов моделей выделяются мысленные модели, мы смягчили требование Н. Г. Салминой об обязательной материальной форме представленности модели. Модель объекта либо материальна, либо является продуктом мышления и может быть материализована.

4. В отличие от абстрактного объекта, который может существовать самостоятельно, модель всегда связана с другим объектом, оригиналом и существует как модель только при наличии этой связи. Как отмечают Г. И. Рузавин, Н. Г. Салмина, понятие модели объекта *всегда связано с интерпретацией.* Помимо того объекта, для которого она строилась (назовем его естественной интерпретацией), модель может ***допускать иные интерпретации, в том числе и в других отраслях науки.*** Эта способность моделей (в первую очередь математических моделей) объясняет их использование в прикладных целях, при установлении внутри- и межпредметных связей.

Обобщая все сказанное нами выше, мы предлагаем следующее определение:

Моделью некоторого объекта В называется такой объект М, который

• сконструирован (или выбран) в соответствии с определенной целью;

• сходен в некотором отношении с объектом В и способен его замещать;

• содержит все существенные для поставленной цели свойства объекта;

• материализован либо является продуктом мышления и допускает материализацию;

• имеет хотя бы одну интерпретацию.

Модель объекта называется *исследовательской* в том случае, когда цель построения модели предполагает получение новой информации об объекте, его исследование.

В зависимости от того, преследует процесс построения или использования модели дидактическую функцию или нет, выделяют *учебные* и *научные* модели. В работах Н. Г. Салминой, А. А. Егорова, И. П. Лебедевой, М. А. Урбан раскрыта специфика учебных моделей, которая заключается в их наглядности, простоте, доступности, легкости построения и использовании в учебном процессе по сравнению с научными моделями.

Исследовательскую модель некоторого объекта, выраженную посредством языка математики, называют *математической* моделью этого объекта.

По отношению к процессу обучения в целом и процессу обучения математике в частности можно говорить о двух направлениях в использовании моделей:

1) в качестве методического средства, облегчающего восприятие и понимание материала учащимися (план, конспект текста учебника, макеты геометрических тел, используемые для иллюстрации свойств соответствующих геометрических объектов);

2) в качестве основного средства исследовательской деятельности, средства решения задач.

В работах Л. М. Фридмана выделены три основных вида моделей, с которыми работает школьник при решении текстовой задачи:

1) сама текстовая задача;

2) вспомогательные модели: таблицы, схемы, чертежи, диаграммы и другие виды краткой записи текста задачи;

3) решающие модели.

В соответствии с выделенными критериями модели и определением исследовательской модели сделаем в отношении всех трех видов моделей некоторые уточнения.

Текстовая задача является исследовательской моделью некоторой реальной ситуации в том случае, если в ее условии выделены все свойства объектов реальной ситуации, необходимые для выполнения требования. То есть в условии задачи нет недостающих данных.

Краткая запись к текстовой задаче будет являться моделью этой задачи лишь в том случае, когда она, во-первых, нужна ученику для решения задачи, во-вторых, в ней выделены все существенные для решения (получения ответа на вопрос задачи) свойства объектов, связи между этими объектами, речь о которых идет в условии задачи, в-третьих, в краткой записи должно быть отражено требование задачи (главный вопрос), в-четвертых, она помогает решить задачу. Только при таких условиях краткая запись будет полностью замещать текст задачи и способствовать получению

новой информации о соответствующей заданной ситуации.

Решающая модель задачи является исследовательской математической моделью и в соответствии с выделенными критериями должна включать в себя три составляющие:

1. Математический объект, в котором на математическом языке в соответствии с требованием задачи формализованы все существенные для решения связи и отношения, выделенные учеником в ходе анализа условия и вспомогательной модели задачи. Этим математическим объектом чаще всего является уравнение, неравенство, система уравнений, неравенств, система уравнений и неравенств, график функции, числовое или алгебраическое выражение.

2. Описание тех компонентов, которые составляют математический объект (при решении задачи с помощью уравнений, систем уравнений, это та часть решения, которая находится между словами «Пусть...» и «Составим уравнение»).

3. Математический объект, в котором формализовано требование задачи.

Объединяя первую и третью составляющие решающей математической модели задачи в один компонент, в соответствии с терминологией Ю. Б. Мельникова мы называем этот компонент *содержательным (собственно математическим),* а вторую составляющую - *интерпретационным* компонентом решающей математической модели задачи.

Поясним все вышесказанное на примерах.

Задача 1. *В уксусной эссенции содержание уксусной кислоты 70%, в столовом уксусе - 8%. Рассчитайте массы уксусной эссенции и воды, которые необходимо взять для приготовления столового уксуса объемом 0,5 л.*

Задача 1, несмотря на то что описывает некоторую реальную ситуацию, не будет являться ее моделью, так как в задаче нет данных о плотностях уксусной эссенции и столового уксуса.

З а д а ч а 2. *Пирог массой 1 кг разделили на две части так, что одна из них тяжелее другой в три раза. Какова масса большего куска?*

Несмотря на то, что рис. 1, а отражает все объекты, свойства и отношения, описанные в тексте задачи 1, его можно считать лишь моделью условия этой задачи, тогда как рис. 1, б является моделью всей задачи.

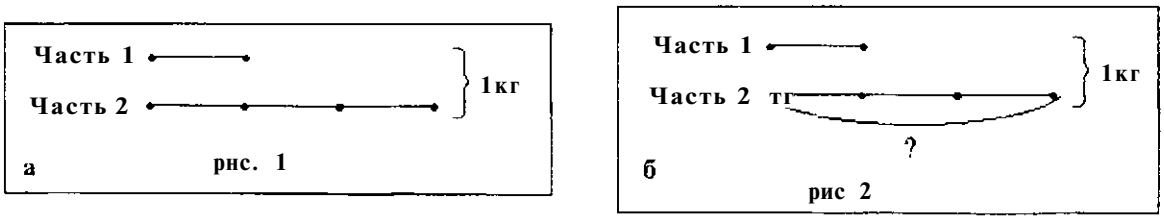

Рис. 1. Краткая запись задачи 2

З а д а ч а **3.** *В уксусной эссенции содержание уксусной кислоты 70%, в столовом уксусе - 8%. Рассчитайте массы уксусной эссенции и воды, которые необходимо взять для приготовления столового уксуса массой 0,5 кг.*

Задача описывает соответствующую ситуацию реальной действительности. В табл. 1 представлена одна из возможных кратких записей задачи.

Таблица 1

Краткая запись задачи 3

	Hip-pat КГ	•	$\omega_{р-ра}$/100%	=	ГПч. вощ-ва, КГ
Уксусная эссенция	Г	•	0,7	=	?
	+				+
Вода	?	•	Ю	=	?
Результат (столовый уксус)	0,5	•	10,08	1 =	?

В краткой записи отражены вес объекты, о которых идет речь в условии задачи, связи между ними, выделено требование задачи, табл. 1 полностью заменяет текстовую задачу, позволяет осуществить поиск ее решения, поэтому ее можно назвать вспомогательной моделью задачи 3.

В ходе анализа текста, краткой записи задачи мы убеждаемся в том, что текст задачи содержит все необходимые для ее решения данные, а, следовательно, сама текстовая задача 3 является моделью описанной в ней реальной ситуации.

Для лучшего понимания школьниками решения задачи перед построением ее математической модели можно преобразовать табл. 1 в табл. 2, отражающую результат поиска решения.

Таблица **2**

Краткая запись задачи 3

	ГПр-ра, КГ	•	$со_{р-ра}$ л00%	=	ГПч вещ-ва, КГ
Уксусная эссенция	**X**	·	0,7	=	0,7х
					+
Вода	**0,5-х**	·	0	=	0
					и
Результат (столовый уксус)	0,5	.	0,08	=	0,5-0,08

На основании определения массовой доли вещества, закона сохранения масс построим решающую математическую модель задачи 3:

Интерпретационный компонент:

х · масса уксусной эссенции, необходимая для приготовления раствора, кг;

0,*5-х* - масса воды, необходимая для приготовления раствора, кг;

0,7.v · масса чистой уксусной кислоты в уксусной эссенции, кг;

0 · масса чистой уксусной кислоты в воде, кг;

0,7х + 0; 0,5 х 0,08 - масса чистой уксусной кислоты в столовом уксусе, кг.

Содержательный компонент:

0,7х- + 0 = 0,5 х 0,08;

л- - ? 0,5-х -?

В задачах, решаемых арифметическим методом, разграничить между собой два компонента их решающей математической модели достаточно сложно, поскольку решение (если оно оформлено по действиям с пояснениями) само составляет решающую математическую модель задачи. **В** этом случае можно считать, что сами действия составляют содержательный, а пояснения - ее интерпретационный компонент.

З а д а ч а 4. *Длина автомобильной трассы, соединяющей города А и В, составляет 360 км. Из этих городов навстречу друг другу выехали два автомобиля, скорость одного из которых 55 км/ч, а скорость второго - 65 км/ч. Через какое время после начала движения они встретятся?*

Можно сказать, что решающую математическую модель задачи 4 составляет запись ее решения по действиям:

J) 55 + 65 = 120 (км/ч) - скорость сближения автомобилей при равномерном движении;

2) 360 : 120 = 3 (ч) - время встречи автомобилистов.

Однако если подходить к процессу выделения компонентов решающей математической модели данной задачи 4 более строго, то, учитывая равномерный характер движения автомобилей, решающую математическую модель задачи можно описать следующим образом:

Интерпретационный компонент:

360 - длина трассы, путь, пройденный двумя автомобилями вместе, км;

55 - скорость первого автомобиля, км/ч;

65 - скорость второго автомобиля км/ч;

55 + 56 - скорость сближения автомобилей, км/ч;

360 : (55 + 56) - время движения автомобилей до встречи, ч.

Содержательный компонент:

360 : (55 + 56) - ?

Мы выделяем два этапа в формировании у учащихся понятий «модель», «математическая модель» на уроках математики в основной школе:

1. Пропедевтический (1 -6-е классы), где понятие модели вводится на интуитивном уровне и учащиеся приобретают простейшие навыки работы и конструирования моделей (конспектов, планов текстов, схем, рисунков, числовых и буквенных выражений, уравнений).

2. Основной (7-9-е классы), когда перед обучением учащихся решению задач с помощью уравнений (7-й класс) вводятся предложенные нами выше определения понятий «модель», «математическая модель» и их усвоение осуществляется посредством упражнений следующих типов:

1)на соотнесение модели и объекта, формулирование цели, при которой один объект является моделью другого;

2) «на множественность интерпретаций модели». Они направлены на усвоение учащимися свойства модели: «иметь не менее одной интерпретации»;

3)«на множественность моделей». Их цель - усвоение учащимися того факта, что для одного и того же объекта даже в соответствии с одной целью исследования можно построить различные модели;

4) «на множественность цели». Их выполнение помогает школьникам понять, что один и тот же объект может быть использован в качестве модели другого объекта при различных целях исследования.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Гостев Ю* Модель // Философская энциклопедия: В 5 т. / Гл. ред. Ф. В. Константинов. М.: Советская энциклопедия, 1964. Т. 3: Коммунизм - Наука. С. 481.

[2] *Сашина Н. Г.* Виды и функции материализации в обучении. М.: МГУ, 1981.

[3] *Мельников Ю. Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Монография / Науч. ред. И. Н. Семенова. Екатеринбург: Урал, изд-во, 2004.

[4] Полужирным подчеркнутым шрифтом в таблицах выделены те неизвестные, которые необходимо найти в соответствии с требованием задачи.