Н. С. Майкова

ВИДЫ ОШИБОК УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, ИХ ПРИЧИНЫ И СПОСОБЫ ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ

Работа представлена кафедрой методики обучения математике. Научный руководитель - кандидат педагогических наук, доцент В. П. Радченко

Цель учебной деятельности учащихся определяется общей целью образования и воспитания, воплощенной в учебных программах по каждому учебному предмету и дидактическими, воспитательными целями конкретного урока. Программы учебных предметов содержат прежде всего объем подлежащих усвоению знаний. В учебном процессе важно обеспечить не только объем, но и качество усвоения знаний учащихся, которое непосредственно связано со снижением количества ошибок учащихся, допускаемых ими в процессе обучения.

Ключевые слова: математическая ошибка, причина ошибки, сущность ошибки, математическая задача, провоцирующая задача.

The purpose of the students' activities is defined by the general purpose of education and upbringing, embodied in the educational curricula for each subject respectively, and didactic, pedagogic goals set for each lesson. The subject curricula contain, first of all, volumes of knowledge to be obtained. But in the educational process, it is necessary to provide not only for the volume, but also for the quality of this knowledge, which is immediately related to decrease in the quantity of errors, made by students in the process of studying.

Key words: mathematical error, cause of error, essence of error, mathematical problem, provocative problem.

В разное время были выделены и проанализированы многие ошибки школьников В. М. Брадисом, Л. П. Доблаевым, А. К. Артемовым, Скобелевым и др. Математическим ошибкам уделяли внимание такие педагоги-математики, как В. Г. Болтянский, М. И. Зайкин, Ю. М. Колягин, Г. И. Саранцев, В. И. Рыжик и др.

В качестве основания для систематизации ошибок в традиционной методике обучения выбирались различные принципы: предметный (сущность ошибки), причинный (причина возникновения ошибки), потемный (тема, при изучении которой появляется ошибка), деятельностный (вид учебной деятельности, при выполнении которой допускаются ошибки), количественный (число учащихся, допустивших ошибку).

При методической работе с ошибками выделяют два основных понятия:

1) сущность математической ошибки - правило, требование, прием решения и т. п., которые нарушены или не соблюдены;

2) причина появления ошибки-субъективное состояние интеллектуальной сферы человека или ситуации его деятельности.

Причину появления ошибки можно назвать побудителем, подталкивающим к выполнению ошибочных действий или выбору неправильного ответа.

Сущность математической ошибки легко установить по внешнему выражению действия учащегося: неправильно произносит или пишет, неверно выполняет какое-то действие и т. д.

Причина ошибки, как правило, внешне не проявляется. Задача учителя определить, что явилось побудителем ошибочных действий. Это позволит правильно организовать работу по предупреждению различного рода ошибок.

Причины многих ошибок школьников с психологической точки зрения раскрывали П. А. Шеварев, А. К. Артемов, 3. И. Слепкань, Н. А. Менчинская, Я. И. Груденов и др. Психологический анализ математических ошибок школьников ставит своей целью вскрыть природу и объяснить причины появления ошибок.

Выяснить ошибку - означает прежде всего довести до сознания учащихся ее причину, а затем противопоставить возникшим у него неверным обобщениям, аналогиям и т. п. то или другое правило.

Именно диагностика действительных причин ошибок у каждого из учащихся позволяет осуществлять успешную адресную коррекцию как сложившихся у учеников умственных действий по решению предметных задач, так и знаний, на основе которых эти действия формируются.

Психологический анализ математических ошибок рассмотрен в работах П. А. Шеварева, В. А. Далингера, Г. И. Саранцева и др. Для формирования прочных умений и навыков учащиеся должны решить достаточное число задач одного и того же типа по изучаемой теме. Однако в психологии установлено, что выполнение однотипных заданий приводит к ряду негативных явлений: учащиеся начинают решать задачи по аналогии с предыдущими, не вдумываясь в условие, опуская отдельные существенные рассуждения. Из-за этого в решениях появляются ошибки. Такие психологические причины ошибок вытекают из следующих недостатков учебных пособий:

• в учебниках преобладает единообразие форм предъявления задачи,

• в системе задач не учитывается оптимальное сочетание задач, решение которых требует репродуктивной и продуктивной деятельности.

Возможны психологические причины математических ошибок, которые связаны:

• с психологическими факторами (ослабление психических функций: внимания, памяти, мышления);

• интерференцией навыков - «это тормозящее взаимодействие навыков, при котором уже сложившиеся навыки затрудняют образование новых навыков либо снижают их эффективность»[1];

• доминированием ассоциативных связей над смысловыми.

Различные виды математических ошибок выделяли в своих работах В. М. Брадис, В. И. Рыжик, В. Литцман и др. В большинстве работ авторы отмечают, что выделенные группы ошибок не охватывают все существующие ошибки, но дают представление об их многообразии. Кроме того, в большинстве случаев мы наблюдаем сочетание ошибок различных типов, при этом нередко ошибка одного типа порождает ошибку другого типа.

Важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой усваивается система математических знаний, умений и навыков, является решение задач. Для того чтобы математические понятия, теоремы, законы, правила стали предметом учебной деятельности школьников, необходимо представить их в виде задач.

В психолого-педагогической и методической литературе существуют различные трактовки понятия «задача». Ряд ученых А. А. Столяр, Р. С. Черкасов, Н. В. Метельский рассматривают понятие «задача» как неопределяемое и в самом широком смысле означающее то, что требует исполнения, решения.

Наиболее распространенным является определение задачи как системы (Г. А. Балл, Ю. М. Колягин, Л. М. Фридман). Авторы по-разному рассматривают объем понятия «задача». А. Н. Леонтьев термин «задача» употребляют для обозначения объектов, относящихся к категории цели действий субъекта, Ю. М. Колягин, П. М. Эрдниев - к категории ситуации, включающей вместе с целью и условия, в которых она должна быть достигнута, Л. М. Фридман - к категории словесной формулировки этой ситуации.

Наиболее распространенным является использование термина «задача» для обозначения ситуации, включающей цель и условия для ее достижения. Для понятия задачи характерны две стороны: объективная и субъективная. К первой относятся предмет действия, требование, место в системе задач, логическая структура решения задачи, определенность или неопределенность условия и т. д., ко второй - способы и средства решения.

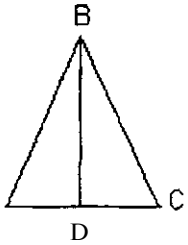
Основные компоненты математической задачи были исследованы в методике преподавания математики Ю. М. Колягиным[2]: начальное состояние характеризует условие конкретной задачи, конечное состояние характеризует частный результат решения задачи, решение задачи характеризует конкретный способ преобразования условия для получения требуемого результата, базис решения характеризует объем теоретических или практических знаний, необходимых для решения задачи.

С компонентами задачи тесно связаны соответствующие этапы деятельности учащихся, которые отражены в методике решения задач, впервые разработанной Д. Пойа[3]: понимание постановки задачи, составление плана решения, осуществление плана, изучение найденного решения.

В соответствии с этапами деятельности учащихся при решении задач на уроках геометрии, рассмотрим ***виды ошибок,*** которые допускают учащиеся при решении задач: ошибки понимания постановки задачи; составления плана решения; осуществления плана решения; изучения полученных результатов.

Ошибки понимания постановки задачи возникают при выделении условия и требования задачи, объектов и отношений между ними, при выполнении рисунка и отметки на нем данных и искомых элементов, при выполнении краткой записи условия и заключения задачи.

Рассмотрим пример ошибки понимания постановки задачи, которая связана с выполнением чертежа. Часто причиной таких ошибок является невольное использование учащимися наглядности чертежа.



Пример 1. Ученик пишет. Дано: ***AD = DC, ZABD = ZDBC.*** Доказать: ***AB = BC.***

Доказательство: треугольники ***ABD*** и ***BDC*** равны как прямоугольные треугольники, имеющие по равной стороне ***(AD = DC)*** и равному углу ***{ZABD = ZDBQ.*** Из равенства треугольников следует, что ***ZA = ZC*** и, значит, ***AB = BC.***

В этом примере ученик посчитал очевидным перпендикулярность ***BD к AC.*** Причина ошибок данного вида также заключается и в том, что в школьном курсе геометрии доказательства теорем не являются строгими и наглядность используется достаточно широко.

Делая чертеж, учащиеся очень часто не соблюдают даже приблизительно соотношение отрезков по величине и размеры углов. Так, например, вместо произвольного треугольника учащиеся склонны чертить равнобедренный треугольник, изображать трапецию с равными боковыми сторонами и т. д.

Желательно, чтобы такие чертежи были предметом обсуждения на уроках геометрии. Учащиеся должны понимать, что назначение чертежа состоит только в том, чтобы облегчить им работу над поиском логических связей между данными и искомыми величинами в задаче.

В качестве средства предупреждения таких ошибок можно использовать провоцирующие задачи, основанные на ошибках в построении, например геометрические софизмы.

Ошибки составления плана решения задачи возникают при анализе условия и требования задачи. Под анализом условия задачи будем понимать выявление такой информации, которая непосредственно не задана условием, но присуща ему. Анализ требования задачи предпола-

гает выяснение возможных путей ответа на вопрос задачи.

Информация, которая является результатом анализа условия задачи, может быть получена следующими способами: выведением следствий непосредственно из условия задачи, переосмысливанием объектов (фигур, отношений между ними) сточки зрения других понятий, заменой термина его определением, использованием характеристических свойств понятия, интерпретацией символических записей, переводом содержания задачи на язык специальной теории[4].

Выполнение анализа требования задачи предполагает наличие ассоциаций:осознание термина, обозначающего понятие, - осознание определения этого понятия термина, обозначающего понятие, - осознание его характеристических свойств.

Продвижение в решении задачи зависит от умения переосмысливать элементы фигуры с точки зрения другого понятия. Частным случаем этого умения является переосмысление элементов чертежа с точки зрения другой фигуры, что, в свою очередь, связано с умением вычленять элементы чертежа, комбинировать их.

К составляющим умения осуществлять поиск способа решения задачи следует отнести также умения: распознавать объекты, соотносить с условием и требованием задачи свои мыслительные действия с чертежом, оценивать свои действия с точки зрения целесообразности, распознавать ситуации, удовлетворяющие условию теоремы.

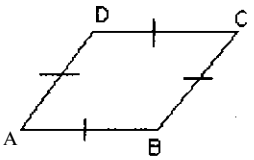
Важнейшим компонентом умения анализировать требование задачи, как отмечает Г. И. Саранцев, является умение преобразовывать требование задачи в равносильное ему. Проблема формирования этого умения непосредственно связана с вооружением учащихся как можно большим числом признаков и свойств понятий.

В. М. Брадисом отмечалось, что для совершенствования речи ученика в смысле ее точности и последовательности необходима повседневная работа учителя математики над формой речевого выражения мысли ученика, как при устных ответах, так и при выполнении письменных работ.

Рассмотрим пример ошибки, которую допускают учащиеся при составлении плана решения задачи, связанную с формулировкой определения, и средство ее предупреждения.

Пример 2. Ученик утверждает, что четырехугольник будет прямоугольником, потому что у него две противоположные стороны параллельны.

Учитель фиксирует ошибку и составляет на ее основе соответствующую провоцирующую задачу с использованием контрпримера.



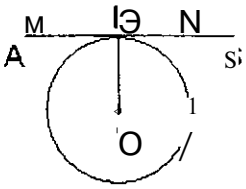
Задача 1. Верно ли, что для того, чтобы четырехугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы противоположные стороны четырехугольника были попарно параллельны?

Ответ. Нет. Контрпример (см. рис.).

На следующем уроке учитель предлагает учащимся эту задачу, и если ошибка повторяется, то на других уроках будет полезно дать еще серию провоцирующих задач, содержащих контрпримеры.

Ошибки осуществления плана решения задачи возникают, если учащиеся не владеют логическими действиями и правилами вывода, которые в школьном курсе явно не изучаются, но подразумеваются.

Рассмотрим пример логической ошибки, состоящей в том, что учащийся при доказательстве в задаче пользуется тем, что требуется доказать.



Пример 3. Ученик, доказывая теорему о том, что прямая перпендикулярна к радиусу в его конце, лежащем на окружности, является касательной, рассуждал так: «Все точки ***A, M, N*** и другие, кроме точки ***D,*** не принадлежат окружности, и, значит, окруж-

ность имеет с прямой только одну общую точку *D*. Значит, *S* касается окружности».

В ответ на вопрос: «Почему ***A, M*** *и* ***N,*** по его мнению, не лежат на окружности?» - ученик ответил, что это следует из того, что *S*- касательная.

В доказательстве задачи различают не только обоснованность рассуждений, но и их последовательность. Конечно, пропуск звеньев делает суждения недостаточно обоснованными. Но иногда ученик знает обоснование, может его дать, вернувшись к пропущенному звену по указанию учителя. В таких случаях мы имеем дело с ошибкой, состоящей в нарушении последовательности рассуждений.

Предупредить ошибки осуществления плана решения задачи можно с помощью софизмов. В таких провоцирующих задачах ученикам предлагается рассуждение с замаскированной ошибкой, из которого следует абсурдный или явно неверный вывод.

Классические примеры таких задач: «доказательство» того, что 2 = 3 с использованием неправильного извлечения корня; превращение прямоугольника 7 х 9 с площадью 63 разрезанием в квадрат 8 х 8 (суть ошибки в том, что на эскизном чертеже не видно узкую щель между фигурами площадью как раз 1).

Отмечая пользу разбора учащимися софизмов и собственных ошибок, В. Литцман отмечает, что сами учащиеся зачастую научатся большему, на примере разъясненной ошибки, чем даже при правильном выполнении по готовым образцам задач и упражнений.

Ошибки изучения полученных результатов возникают у учащихся при исследовании заданной ситуации.

В тестовых заданиях, с которыми сталкиваются учащиеся на разных предметах, обычно используются задания закрытого типа. Эта форма заданий наиболее известна и чаще всего употребляется в практике тестирования. В таких заданиях дается несколько ответов, из которых хотя бы один правильный.

В результате, получая тестовое задание, учащиеся интуитивно выбирают один правильный ответ и не рассматривают все возможные варианты предложенных ответов.

В работах В. И. Рыжика[5] предлагаются следующие формы ответа: «да» (условно «+»), если ученик согласен с утверждением; «нет» (условно «-»), если ученик с ним не согласен; «не знаю» (условно «О»), если он не в состоянии определиться; «задача некорректная», когда фигуры, заданной условием, не существует (условно «!»); «задача неопределенная», когда предложенное утверждение не позволяет однозначно ни опровергнуть его, ни согласиться с ним (условно «?»).

Ответ «не знаю» В. И. Рыжик считает позитивным, поскольку такой ответ демонстрирует способность ученика к рефлексии и позволяет работать в режиме, который не провоцирует на угадывание ответа. В некорректных или неопределенных заданиях проверяется умение ученика анализировать условие задачи. Рассмотрим пример соответствующей провоцирующей задачи.

З а д а ч а 2. Прямая (признак). Прямая - это:

1) непустое пересечение двух плоскостей;

2) множество точек пространства, равноудаленных от двух данных точек;

3) множество точек пространства, равноудаленных от двух параллельных прямых;

4) множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x-1)^2 +>>^2 = 0$;

5) множество точек пространства, равноудаленных от сторон треугольника.

Ответы: 1) +, 2) -, 3) -, 4) +, 5) +.

Главным условием эффективного выполнения учащимися учебных заданий и упражнений является осуществление ими контроля за результатами совершаемых действий на основе личных наблюдений, оценок педагога, его указаний о допущенных ими ошибках.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Рубинштейн С. Л.* Основы общей психологии. СПб.: Питер, 2003. С. 461.

[2] *Саранцев Г. И.* Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. специальностей пед. вузов и ун-тов. М.: Просвещение, 2002.

[1] ***Колягин Ю. М.*** Задачи в обучении математике. М.: Просвещение, 1977.

[4] *ПойаД.* Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1961.

[5] *Рыжик В. И.* Логика в школьном математическом образовании // Математика в школе. 2007. № 4. С. 29-37.