О. Е. Атаманова

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИКИ

Работа представлена кафедрой методики обучения физики.
Научный руководитель – доктор педагогических наук, профессор А. И. Ходанович

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные процессы и явления, основано на изучении методов теории вероятностей статистических данных – результатов наблюдений. Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие задачи.

Ключевые слова: математическая статистика, среднее значение, вероятность, дисперсия, вириал.

The establishment of regularities that subordinate mass stochastic processes and phenomena is based on studying methods of the probability theory of statistical data – results of supervision. The modern mathematical statistics develops ways of defining the number of necessary tests prior to the beginning of research (planning of an experiment), during research (the consecutive analysis) and solves many other problems.

Key words: mathematical statistics, average value, probability, dispersion, virial.

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики – разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся: а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и др.; б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Обычно для измерения некоторой физической величины в эксперименте производят несколько измерений, а затем находят среднее арифметическое полученных чисел, которое принимают за приближенное значение измеряемой величины. Предполагая, что измерения производятся в одних и тех же условиях, можно показать, что среднее арифметическое дает результат более надежный, чем отдельные измерения, и с увеличением числа измерений надежность этого результата возрастает.

Поэтому мы вправе рассматривать возможные результаты отдельных измерений в качестве дискретной случайной величины. В данном случае применима модель дискретных случайных величин с законом распределения $X = \begin{pmatrix} x_1, x_2 \dots x_n \\ p_{1,} p_2 \dots p_n \end{pmatrix}$, причем сумма вероятностей $\sum_i p_i = 1$ и $< X > = \sum_i p_i x_i = 1/n \cdot \sum_i x_i$.

Среднее арифметическое случайных величин имеет меньшее рассеяние, чем каждая отдельная величина. Иначе говоря, среднее арифметическое оказывается более близким к истинному значению измеряемой величины. Действительно, из свойств дисперсии следует, что среднее квадратичное отклонение среднего от взаимно независимых измерений случайной величины в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратичного отклонения каждого измерения в терминах случайных величин, т. е. $\sigma(< X >) = \sigma / \sqrt{n}$. Кроме того, в силу теоремы Чебышева для случайных величин с ограниченной дисперсией различия между средним и неизвестным истинным значением измеряемой величины (математическим ожиданием) сколь угодно малы при неограниченной выборке измерений, т. е. $Lim_{n\to\infty} P(|<X> - M(X)| < \varepsilon) = 1$.

Отметим, что точечной называют оценку, которая определяется одним числом. При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т. е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками. В реальном эксперименте с конечным числом измерений случайная ошибка оценивается методом доверительных интервалов. Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика θ^* служит оценкой неизвестного параметра θ. Будем считать θ постоянным числом (θ может быть и случайной величиной).

Ясно, что θ^* тем точнее определяет параметр, чем меньше абсолютная величина разности $|\theta - \theta^*|$. Другими словами, если $\delta > 0$ и $|\theta - \theta^*| < \delta$, то чем меньше δ, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует точность оценки.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка θ^* удовлетворяет неравенству $|\theta - \theta^*| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки θ по θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берут число, близкое к единице. Таким образом, $P(\theta - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma$. Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\theta - \delta, \theta^* + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ, равна γ.

Рассмотрим доверительные интервалы для оценки математического ожидания распространенного в физике нормального распределения при неизвестном стандартном отклонении. Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратичное отклонение неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительных интервалов.

Оказывается, что по данным выборки можно построить случайную величину (ее возможные значения будем обозначать через t): $T = \dfrac{<X> - a}{S/\sqrt{n}}$, которая имеет распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы; здесь $<X>$ – выборочное среднее, S – «исправленное» среднее квадратичное отклонение, n – объем выборки.

Плотность распределения Стьюдента, $S(t,n) = B_n(1 + \dfrac{t^2}{n-1})^{-n/2}$, где $B_n = \dfrac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma((n-1)/2)}$. Заметим, что $\Gamma(n+1) = n!$, поэтому вводить Γ-функцию в учебном курсе можно, не прибегая к определению спецфункции.

Из предельных соотношений

$$Lim_{n\to\infty} B_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad Lim_{n\to\infty}(1 + \frac{t^2}{n-1})^{-n/2} = e^{-t^2/2}$$

следует, что при неограниченном возрастания объема выборки распределение Стьюдента стремится к нормальному. Таким образом, для оценки случайной ошибки учебного физического эксперимента целесообразно проводить несколько измерений на уровне надежности 0.8, что весьма актуально в условиях дефицита учебного времени.

Мы видим, что распределение Стьюдента определяется параметром n-объемом выборки (или числом степеней свободы $k = n - 1$) и не зависит от неизвестных параметров a и σ; эта особенность является его достоинством. Поскольку $S(t, n)$ – четная функция от t, вероятность осуществления неравенства $\left|\dfrac{<X> - a}{S/\sqrt{n}}\right| < \gamma$ определяется следующим образом:

$$P(\left|\frac{<X> - a}{S/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma) = \int_0^{t_\gamma} S(t,n)dt = \gamma/2$$

Итак, пользуясь распределением Стьюдента, мы нашли доверительный интервал, $(<x>-t_\gamma s/\sqrt{n}<a<<x>+t_\gamma s/\sqrt{n})=\gamma$, покрывающий неизвестный параметр a с надежностью γ. Здесь $s=\sqrt{\dfrac{(x_i-<x>)^2}{n-1}}$ – «исправленное» среднее квадратичное отклонение. На компьютере (например, в среде Maple) по заданным n и γ рассчитываем t_γ.

Однако важно подчеркнуть, что для малых выборок, в особенности для малых значений n, замена распределения нормальным приводит к грубым ошибкам. То обстоятельство, что распределение Стьюдента при малой выборке дает не вполне определенные результаты (широкий доверительный интервал), вовсе не свидетельствует об ограниченности метода Стьюдента, а объясняется тем, что малая выборка, разумеется, содержит малую информацию об интересующем нас признаке.

Понятия «среднего по времени значения функции» $<f(t)>=Lim_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\int\limits_t^T f(t')dt'$ встречаются в общем курсе физики в теореме вириала, в задачах статистических усреднений. Для финитных движений справедлива *теорема вириала*, имеющая многочисленные применения в разных разделах физики. Теорема была сформулирована и доказана немецким физиком Рудольфом Клаузиусом (1822–1888).

В методическом контексте междисциплинарного взаимодействия, формирования статистических понятий и представлений теорема вириала позволяет корректно получить основное уравнение МКТ в общем виде для сосуда произвольной формы.

Согласно теореме вириала средняя кинетическая энергия системы частиц определяется средним вириалом сил, действующих в системе $<T>=-\dfrac{1}{2}<\sum_i \vec{F}_i\vec{r}_i>$. Здесь $\vec{F}_i$ – сила, действующая со стороны стенки сосуда на частицу, $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-й молекулы. Причем $2<T>=2N<e>$; здесь $N = nV$ – общее число молекул во всем объеме сосуда V. Очевидно, что $d\vec{F}_k=\vec{n}_k p_k dS$, где n_k – орт внешней нормали в окрестности точки k стенки, p_k – давление в этой точке.

Тогда $<\sum_i \vec{F}_i\vec{r}_i>=-\iint\limits_S <p>\vec{n}\vec{r}dS$.

По формуле Гаусса–Остроградского $\iint\limits_S \vec{n}\vec{r}dS=\iiint\limits_V div\vec{r}dV=3\iiint\limits_V dV=3V$. Следовательно, $2N<e>=3<p>V$, и окончательно получаем $p=\dfrac{2}{3}n<e>$.

Часто встречающиеся ошибки при изложении кинетической теории особенно неприятны потому, что они приводят к закладыванию неверных знаний и навыков рассуждений на основе представлений о статистических усреднениях, на которых построена современная статистическая физика.

Корректный вывод основного уравнения кинетической теории идеального газа должен удовлетворять следующим условиям:

1. Должна быть четко оговорена используемая модель идеального газа; описан характер движения молекул и их столкновений со стенками сосуда и друг с другом.

2. Следует рассмотреть результат взаимодействия одной молекулы со стенкой и выразить передаваемый стенке импульс через индивидуальные характеристики этой молекулы.

3. Аккуратно и только один раз усреднять результат удара одной молекулы о стенку путем суммирования по всем молекулам газа. Нельзя «собирать» окончательный результат, используя какие-то уже усредненные блоки. Другими словами, усреднение проводится только один раз – нельзя, например, умножать «средний» результат удара одной молекулы на «среднее число молекул, движущихся вдоль данного направления».

4. Нельзя, используя симметрию изотропного пространства, выделять произвольное направление и считать среднее число частиц движущихся в данном направлении, так как все направления в равновесном газе равноправны. В газе не хватит молекул, чтобы на каждое направление отрядить по 1/3 их полного числа. Правильный окончательный результат при таком рассуждении получается случайно.