С. А. Живодробова

ИЕРАРХИЧНОСТЬ КАК ОДНО ИЗ ОСНОВНЫХ ТРЕБОВАНИЙ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫХ К МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ ПРИ ОПИСАНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Работа представлена кафедрой методики обучения физике.
Научный руководитель – академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор А. С. Кондратьев

Подробно рассматривается свойство иерархичности математических моделей, а также ряд других свойств, непосредственно с ним связанных; приводятся примеры, иллюстрирующие эти свойства. Обосновывается возможность и необходимость применения метода моделей на старшей ступени общего образования.

The hierarchy of mathematical models and other properties connected with it are considered in detail. The examples, which illustrate these properties, are given. The possibility and the necessity of studying mathematical modeling at secondary school are substantiated.

В связи с отчетливым пониманием модельного характера всех знаний о природе процесс обучения физике претерпевает определенные изменения. Современная методика обучения физике должна иметь целью ознакомить учащихся с общей теорией моделирования объектов, процессов и систем, привить навыки построения физических и математических моделей разнообразных явлений и процессов, научить анализировать результаты моделирования и оценивать их адекватность.

Учащиеся должны понимать, что ни одна задача в физике относительно реальных явлений не решается точно. Всегда приходится пренебрегать влиянием каких-либо воздействий, которые мало существенны для рассматриваемого явления, т. е. строить его физическую модель. Построение физической модели рассматриваемого явления – необходимый этап решения любой нетривиальной задачи. Затем на основе физической модели составляются соответствующие уравнения, т. е. физическая модель переводится на формальный математический язык, тем самым происходит переход к математической модели рассматриваемого явления.

Но любая модель замещает объект-оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Для более полного исследования объекта необходимо построение нескольких «специализированных» моделей, характеризующих объект или явление с разной степенью детализации, т. е. речь должна идти не об отдельной математической модели, а об определенном классе (наборе) математических моделей. Этот набор моделей должен быть определенным образом структурирован и упорядочен, поэтому следует говорить об иерархии прикладных математических моделей, каждая из которых описывает изучаемое явление глубже, полнее, всестороннее. Отсюда вытекает важнейшее свойство математических моделей – *иерархичность*.

Иерархия математических моделей чаще строится по принципу «снизу-вверх» или, другими словами, «от простого к сложному». Такой принцип позволяет поэтапно изучать все более и более реалистичные модели, которые получаются в результате постепенного уточнения некоторой первоначальной модели. При этом соответственно математическое описание изучаемого объекта усложняется. Усложнение математической модели происходит до тех пор, пока данные по модели не согласуются с экспериментальными данными. Дальнейшее уточнение модели никакого методологического смысла не имеет. Уточнение модели рассматривается как определенный ряд близких математических моделей. При этом каждая новая модель обобщает предыдущие, включает их в качестве частного случая. Следует подчеркнуть, что начальная модель должна строиться так, чтобы ее уточнение не привело к кардинальному изменению физической модели. Уточнение первоначальной модели происходит за счет дополнительных слагаемых, уравнений, которые позволяют учесть в окончательной модели важные и существенные факторы.

Приведем несколько конкретных примеров, иллюстрирующих построение иерархии моделей «от простого к сложному». Модель идеального газа занимает низшее положение в иерархии различных моделей газообразного состояния вещества. Состояние идеального газа описывается уравнением Менделеева–Клайперона:

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Это уравнение можно рассматривать как линейную связь между давлением газа p и его массой m. По мере увеличения концентрации газа и понижения его температуры поведение реального газа все более отличается от идеального, описываемого уравнением Менделеева–Клайперона. Учитывая собственные размеры молекул и качественные особенности межмолекулярного взаимодействия, приходим к уравнению Ван-дер-Ваальса для произвольного числа молей ν газа:

$$(p + \nu^2 \frac{a}{V^2})(V - \nu \cdot b) = \nu RT.$$

Теперь зависимость давления газа от массы газа нелинейная. Вместе с тем область применимости данного уравнения гораздо шире. Действительно, оно предсказывает существование критической температуры и необходимость расслоения вещества на фазы при температурах ниже критической; отражает возможность существования метастабильных состояний – пересыщенного пара и перегретой жидкости; качественно объясняет малую сжимаемость жидкостей; отчетливо демонстрирует отсутствие принципиальной разницы между жидким и газообразным состоянием: из одного состояния в другое можно перейти, минуя фазовый переход. Таким образом, уравнение Ван-дер-Ваальса, стоящее на более высоком уровне иерархии, позволяет существенно расширить границы применимости линейной теории. Другой пример – закон Ома для участка цепи, определяющий линейную зависимость между силой тока I и напряжением U:

$$U=IR.$$

Коэффициент пропорциональности определяется свойствами проводника и зависит, в частности, от температуры:

$$R=R_0+\alpha T,$$

где R_0 и α – постоянные величины. В результате протекания электрического тока температура проводника повышается, что приводит к неявной зависимости $R(I)$. Вольтамперная характеристика проводника становится нелинейной, но более реалистично, с меньшей идеализацией описывает процессы, происходящие в проводнике.

Иногда иерархия математических моделей строится и по противоположному принципу «сверху вниз» т. е. реализуется путь «от сложного к простому». В этом случае, опираясь на общую сложную модель, можно, проводя соответствующие упрощения, последовательно получать и изучать более простые модели, но имеющие, естественно, меньшую область применения. Характерный пример – механика Ньютона, которая получается из релятивистской механики путем предельного перехода при $c=\infty$. Этот подход обладает тем преимуществом, что часто позволяет установить некоторые общие свойства системы, не зависящие от конкретных модельных представлений, а затем конкретизировать их в более частных случаях.

Примечательным обстоятельством является то, что упрощенные математические модели иногда дают ту же качественную картину, что и гораздо более полные и сложные модели[1].

Обратим внимание еще на один существенный момент: при построении и анализе любой конкретной модели всегда желательно понимать ее место в общей иерархии моделей изучаемого объекта, что позволяет в ряде случаев заранее устанавливать границы применимости модели и ориентироваться в возможностях ее обобщения или, наоборот, конкретизации.

Обсуждая требование иерархичности моделей, необходимо выделить также требования адекватности и простоты математических моделей, т. к. именно эти требования вызывают необходимость построения иерархической цепочки моделей.

Под адекватностью модели понимают воспроизведение моделью с необходимой полнотой и точностью всех свойств объекта, существенных для целей данного исследования. Модель, естественно, не может охватить объект во всей полноте его свойств, т. к. в этом случае она становится чрезмерно сложной и громоздкой, и исследовать ее даже на современных быстродействующих ЭВМ будет затруднительно. Поэтому процесс моделирования неизбежно связан с упрощением, идеализацией изучаемого объекта. Модель строится для отражения лишь части свойств исследуемого объекта, и адекватность модели следует рассматривать только по отношению к этим свойствам, принятым в данном исследовании за основные. Иначе неосторожное приписывание реальному объекту свойств его модели может привести к грубым ошибкам или поистине абсурдным результатам.

В качестве примера рассмотрим процесс падения камня на поверхность Земли. Будем считать, что падение происходит с высоты H без начальной скорости, $v_0=0$. Исчерпывающее описание процесса можно получить, построив математическую модель данного физического явления, в результате чего мы придем к выводу, что движение камня равноускоренное, происходит с ускорением $g = 9{,}8$ м/с^2. Пользуясь математической моделью:

$$h(t) = H - \frac{gt^2}{2}, \upsilon = gt,$$

можно найти высоту, на которой находится тело, и скорость в любой момент времени. Натурный эксперимент полностью подтверждает данные, полученные с помощью математической модели. Но это ни в коем случае не означает, что данная математическая модель описывает падение любого тела. Доказательством тому является движение листа, упавшего с дерева, или движение парашютиста в момент приземления. Оба примера противоречат построенной математической модели, но, тем не менее, это не говорит о том, что полученная модель неверна. Она имеет ограниченную область применения, т. е. адекватна по отношению к силе земного притяжения, но является неадекватной, если исследователя интересуют какие-то другие факторы, в частности сила сопротивления воздуха, которая становится заметной в случаях с движением листа или парашютиста. Только та математическая модель, для которой четко оговорены границы ее применимости, может считаться адекватной изучаемому явлению, а иначе модель будет давать абсурдные результаты, вроде падающего камнем парашютиста.

Если ориентироваться только на требование адекватности, то сложные модели следует предпочитать простым. В самом деле, усложняя модель, мы можем учесть большее число факторов, которые могут, так или иначе, повлиять на изучаемые свойства. Так, в примере с падающим камнем можно было бы учесть притяжение Луны, Солнца, планет, убывание плотности атмосферы с высотой, наличие ветра, по-разному дующего на разных высотах, вращение Земли и т. д., но это неизбежно привело бы к громоздким уравнениям, не поддающимся или практически не поддающимся изучению и решению. Следовательно, сложность модели не должна превосходить некоторого предела, определяемого возможностями математического аппарата, которым располагают ученые.

В связи с этим мы приходим к требованию *достаточной простоты модели* по отношению к исследуемой системе ее свойств. Модель считается достаточно простой, если имеющиеся в нашем распоряжении, в частности, вычислительные средства исследования дают возможность провести в приемлемые сроки и экономно по затратам труда и средств, но с разумной точностью качественный или количественный – в зависимости от постановки задачи – анализ исследуемых свойств и осмыслить результат[2].

Конечно, за все приобретения надо расплачиваться: платой за простоту, скорость и дешевизну модельного эксперимента является некоторая потеря точности и надежности получаемых результатов, т. е. снижение адекватности модели. Но бывают и исключения, когда усложнение модели может ухудшить ее адекватность.

Итак, каждая модель из общей иерархии моделей изучаемого объекта должна отвечать требованиям адекватности и простоты, но если необходимо учесть какие-то дополнительные факторы, то приходится использовать более сложную модель, которая является адекватной по отношению к этим новым условиям, описывает явление реалистичнее и, соответственно, занимает более высокое положение в общей иерархии моделей.

Но и перечисленных требований иногда оказывается недостаточно для построения качественной математической модели. Более предпочтительной будет являться та математическая модель, которая отвечает также требованиям потенциальности и универсальности.

Потенциальность модели или, другими словами, предсказательность с позиций возможности получения новых знаний об исследуемом объекте подчеркивает Н. Н. Моисеев: «...модель содержит в себе потенциальное знание, которое человек, исследуя ее может приобрести, сделать наглядными использовать в своих практических жизненных нуждах»[3].В научных исследованиях модели, обладающие данным свойством, бесспорно, считаются более выгодными. Известно немало случаев, когда изучение или использование моделей позволило сделать открытия. Классическим примером здесь может служить открытие французским астрономом У. Леверье в 1846 году новой планеты Солнечной системы Нептун, которое было сделано, так сказать, «на кончике пера».

Под *универсальностью* модели понимают возможность применения одной и той же модели к объектам принципиально различной природы. Универсальность математических моделей отражает единство окружающего мира и способов его описания. В качестве примера рассмотрим функциональную зависимость $y=kx^2$. При соответствующем наполнении данное уравнение может описывать совершенно разные физические закономерности или законы, например:

$$S=\frac{1}{2}at^2;\ E_п=\frac{1}{2}kx^2;\ E_к=\frac{m\upsilon^2}{2};\ h=\frac{1}{2}gt^2;\ a=\frac{\upsilon^2}{R};\ Q=I^2Rt.$$

Следует заметить, что абстрактность математических моделей считают как достоинством модели, так и ее недостатком[4].

Все перечисленные требования необходимо учитывать в процессе математического моделирования, иначе построенная модель окажется неудовлетворительной, а соответственно, непригодной для исследования.

Математическое моделирование – это специфический метод познания, требующий от исследователя определенной подготовки, но метод моделирования совершенно необходим в современном мире, т. к. является универсальной методологией научных исследований. Поэтому уже на старшей ступени общего образования следует обучать учащихся оперировать модельными представлениями и получать с их помощью новые знания. Порой у учащихся возникает недоумение по поводу целесообразности применения метода моделирования. По их мнению, все время что-то приходится упрощать и изучать то, что в природе не встречается. Поэтому очень важно довести до сознания учащихся мысль о том, что метод моделей – это научный метод познания мира.

Таким образом, обучение учащихся методу математического моделирования лежит в логическом русле развития теории обучения физике, а содержание физического образования при таком подходе отвечает запросам современности.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Физические основы математического моделирования: Учеб. пособие для вузов / Г. А. Бордовский, А. С. Кондратьев, А. Д. Р. Чоудери. М.: Издательский центр «Академия», 2005.

[2] *Мышкис А. Д.* Элементы теории математических моделей. М.: Едиториал УРСС, 2004.

[3] *Моисеев Н. Н.* Математика в социальных науках // Математические методы в социологическом исследовании. М., 1981.

[4] *Извозчиков В. А., Слуцкий А. М.* Решение задач по физике на компьютере: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1999.