П. А. Райгородский

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА: ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД И. ПРИГОЖИНА

Работа представлена кафедрой методики обучения физике.
Научный руководитель – академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор А. С. Кондратьев

В статье рассмотрен вопрос сопоставления динамического и статистического подходов к изучению динамического хаоса, что позволяет, во-первых, формировать современные представления о физической картине мира, навыки работы с нелинейными и статистическими моделями физики в вузе, а во-вторых – поставить вопрос о необходимости формирования в школе представлений о нелинейных моделях и категории детерминизма.

The article deals with comparison of the dynamic and statistic approaches towards the dynamic chaos exploration that allows forming a contemporary idea of the physic image of the world, experience in working with nonlinear and statistic physic models in high school. Besides, it permits rising a question of obligatory forming the idea of nonlinear models and a determinism category while studying at school.

За последнее столетие фундаментальная наука претерпела коренной пересмотр законов природы, столкнувшись с естественной тенденцией широкого класса систем к переходу в состояния, в которых обнаруживаются как детерминистическое поведение, так и непредсказуемость. Изучение таких систем приводит к отказу от лапласовского детерминизма и появлению такого понятия, как динамический хаос в нелинейных системах.

Необходимость изучения указанного вопроса требует прежде всего проведения тщательного отбора материала и его адаптирования, так чтобы добиться совмещения научности и доступности для студентов. Кроме того, необходимо выделение основных идейных моментов, доступных на уровне средней школы.

Для достижения полных знаний студентов о механических явлениях, законах, которым они подчиняются, методах научного познания природы и формировании на этой основе представлений о физической картине мира требуется дополнение методики обучения на основе аспектов современных достижений фундаментальной науки при изучении курса теоретической физики.

На примере задачи двух тел с дальнейшим переходом к задаче трех тел можно ввести понятие неинтегрируемой системы и показать основные положения теории возмущения и КАМ-теории, а также качественно познакомить студентов с теорией, разработанной школой И. Пригожина.

Неинтегрируемые системы. А. Пуанкаре разработал современную теорию динамических систем, цель которой – исследовать типы поведения систем, описываемых взаимосвязанными нелинейными уравнениями. Изложим некоторые аспекты этой теории, имеющие отношение к динамическому хаосу.

Рассмотрим движение астероида вокруг Солнца по кеплеровским орбитам без учета действия других планет. Запишем гамильтониан в каноническом виде:

$$H = H(J), \quad \frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J} = \omega(J),$$

$$H = \omega J, \quad J = const, \quad \alpha = \omega t + \delta, \quad p = \sqrt{2\omega J}\sin\alpha, \quad q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}}\cos\alpha.$$

Если существует такое каноническое преобразование S(q, J) к новым переменным (α, J), при переходе к которым гамильтониан будет зависеть только от новой переменной действия J, то гамильтониан будет называться интегрируемым, иначе – неинтегрируемым. Для интегрируемых систем всегда можно найти уравнения движения.

Теория возмущений. В реальности другие планеты всегда оказывают влияние, которое можно рассматривать как малое возмущение к задаче двух тел – подход теории возмущений[1]:

$$H(I,\alpha)=H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\alpha)+\dots \quad (1)$$

где $H_0(I)$ – интегрируемый невозмущенный гамильтониан, $\varepsilon H_1(I, \alpha)$– возмущение.

Основная идея канонической теории возмущений состоит в отыскании для возмущенной системы $H(I, \alpha)$ такого нового набора переменных действие – угол (J, α), для которого возможно каноническое преобразование к новому гамильтониану, зависящему только от J. т. е. $H(I, \alpha)\to K(J)$. Если удается этого достичь, то (1) становится полностью интегрируемой системой, уравнения движения которой интегрируются тривиально.

Цель состоит в отыскании производящей функции $S = S(\alpha, J)$.

$$I=\frac{\partial S(J,\alpha)}{\partial\alpha},\quad \varphi=\frac{\partial S(J,\alpha)}{\partial J},\quad S=\alpha J+\varepsilon S_1+\dots$$

Получаем $$H_0\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)+\varepsilon H_1\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha},\alpha\right)+\dots=K(J)+\varepsilon K_1+\dots$$

$$O(\varepsilon^0):\quad H_0(J)=K_0(J);\qquad O(\varepsilon^1):\quad \frac{\partial S_1}{\partial\alpha}\frac{\partial H_0(J)}{\partial J}+H_1(J,\alpha)=K_1(J)\to$$

$$\omega(J)\frac{\partial S_1(J,\alpha)}{\partial\alpha}=K_1(J)-H_1(J,\alpha). \quad (2)$$

Поправку первого порядка для энергии снова находим, полагая периодичность S_1 по α и проводя усреднение по всем угловым переменным:

$$K_1(I)=\overline{H}_1(J,\alpha),\quad \overline{H}_1(J,\alpha)=\int_0^{2\pi}\alpha_1\dots\int_0^{2\pi}\alpha_n H_1(J,\alpha).$$

Существенные трудности возникают при попытке разрешить (2) относительно S_1. Разлагая S_1 и «периодическую» часть H_1 в ряды Фурье,

$$S_1=\sum_m{}' S_{1m}e^{im\alpha},\quad H_1=\sum_m{}' H_{1m}e^{im\alpha},$$

где $m = m_1, \dots, m_n$ и штрих(/) означает отсутствие в сумме члена m = (0, ..., 0), находим, что

$$S_1=i\sum_m{}'\frac{H_{1m}e^{im\alpha}}{m\omega_0(J)}. \quad (3)$$

На основании результатов, полученных для систем с одной степенью свободы, может показаться, что таким же образом можно продолжать действовать и в случае более высоких порядков по ε. Однако понятно, что если фундаментальные частоты $\omega_0(J)$ соизмеримы (т. е. $m\omega_0(J) = 0$ случай резонанса), то сумма в (3) будет расходиться. При этом даже если $\omega_0(J)$ несоизмерима, всегда можно отыскать такое (большое) m, что произведение $\omega_0 m$ окажется сколь угодно мало.

КАМ – теорема (Колмогоров–Арнольд–Мозер) обеспечивает условия для нарушения регулярности. Сформулируем ее следующим образом[2]:

Если связное движение интегрируемой функции Гамильтона нарушено маленьким возмущением ΔH, которое делает полную функцию Гамильтона $H = H_0 + \Delta H$ неинтегрируемой, и если удовлетворены два условия:

(a) возмущение ΔH является малым, и

(b) частоты $\omega_0(J)$ несоизмеримы,

тогда движение остается ограниченным N-тором, за исключением незначительного набора начальных состояний, которые кончаются блуждающей траекторией на поверхности энергии.

Пример хаотического движения в классической механике. На рис. 1 показано сечение Пуанкаре S для неинтегрируемой системы Хенона — Хейлеса (Henon, Heiles, 1964)[3]:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2\right) + \left[q_1^2 q_2 - \frac{q_2^3}{3}\right]. \quad (4)$$

Интегрируемая часть гамильтониана представляет собой два гармонических осциллятора, а неинтегрируемая – нелинейное взаимодействие между ними (кубические члены в (8)).

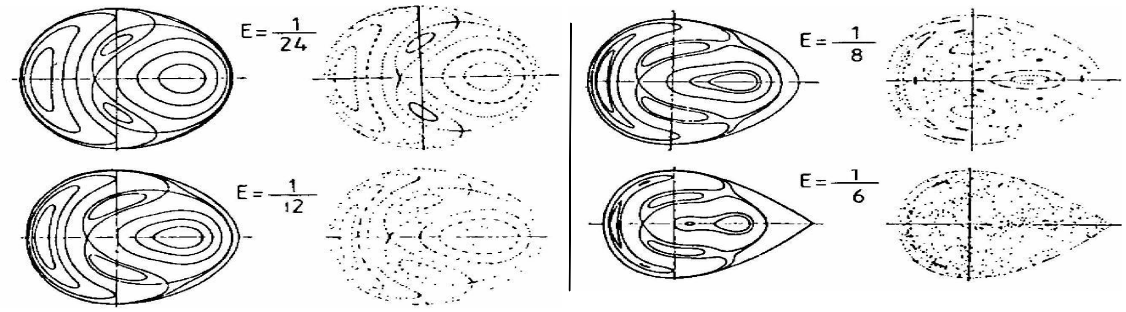

Рис. 1. Отображение системы Хенона – Хейлеса

На левой половине рисунка изображены траектории для различных значений энергии, полученные по теории возмущения с точностью до восьмого порядка. На правой стороне — численные данные пересечения траекторий системы (4) с плоскостью S. Видно, что при энергиях E, равных $^1/_{24}$ и $^1/_{12}$, оба метода дают примерно одинаковый результат: плоскость S заполнена регулярными траекториями, которые представляют собой следы пересечения этой плоскости с деформированными торами. При энергиях, превышающих $E = {}^1/_9$, большинство торов (хотя и не все) оказываются разрушенными. При этом все точки, которые кажутся разбросанными случайным образом, получены при пересечении плоскости S одной единственной траекторией. Приведенные на рис. 1 данные для $E = {}^1/_8$ четко указывают на одновременное существование областей с регулярным и нерегулярным движением.

Рассмотрим неподвижные точки отображения (рис. 2.). Видно, что они образуют чередующуюся последовательность эллиптических и гиперболических точек. Это означает, что исходный тор с рациональным отношением частот под действием возмущения разрушается лишь частично, оставаясь неразрушенным в четном числе неподвижных точек (теорема Пуанкаре – Биркгофа).

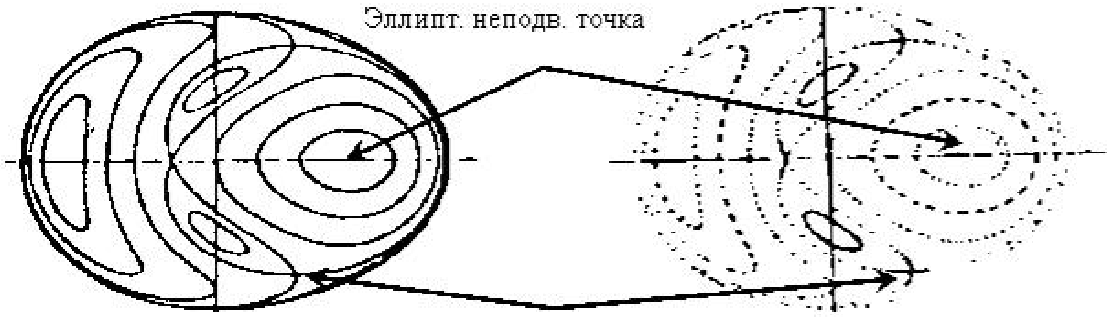

Рис. 2. Неподвижные точки изображения

В окрестности любой такой гиперболической неподвижной точки траектории расходятся и движение становится неустойчивым, тогда как в окрестности эллиптических неподвижных точек происходит устойчивое вращательное движение. Устойчивые (*Ws*) и неустойчивые (*Wu*) кривые, которые подходят к точке *H* или удаляются от нее, ведут себя в высшей степени нерегулярным образом. Причина этого связана с тем, что указанные кривые не могут пересекать сами себя (иначе для каких-то точек фазового пространства нарушится единственность решения). В то же время неустойчивая кривая *Wu* может пресечь *Ws* в так называемой гомоклинической точке.

Возьмем интегрируемую систему с регулярными траекториями, лежащими в фазовом пространстве на торе, и добавим неинтегрируемое возмущение. Тогда в зависимости от начальных условий (различные J, δ) приводят к разным значениям ω_1/ω_2, поскольку $\omega = \omega\ (J)$) движение может быть либо регулярным, либо нерегулярным. И хотя, согласно теореме КАМ, мера начальных условий с регулярным движением не равна нулю, при любом рациональном отношении размеры, образующихся устойчивых торов, все более и более уменьшаются. Между этими торами возникают неподвижные гиперболические точки и, как следствие, нерегулярные траектории. Следовательно, любое малое изменение начальных условий приводит к совершенно различному поведению системы на больших временах.

Альтернативный подход. В работах И. Пригожина и И. Стенгерс[4] изложена следующая идея: для хаотических систем «траектория» есть величина невоспроизводимая, а потому несущественная, а важной и измеримой характеристикой становится вероятность обнаружения траектории в той или иной области.

Решение динамических задач на статистическом уровне с помощью функции распределения ρ включает в себя спектральное представление оператора эволюции (в классической динамике оператор Лиувилля). Незатухающие взаимодействия связаны с делокализованными функциями распределения, что приводит к появлению сингулярных функций. Что требует выхода из гильбертова пространства, ограниченного локализованными «хорошими» функциями.

В результате получаем неприводимое комплексное спектральное представление. *Комплексное* означает, что симметрия во времени нарушена, а *неприводимое*, что мы не можем воспользоваться описанием на уровне траекторий.

Взаимодействие между частицами, например j и n, изменяет соответствующие волновые векторы k_j и k_n $k_j + k_n = k_j' + k_n'$ (из закона сохранения). Проинтегрировав $\rho\ (q, p, t)$ по координатам, мы теряем информацию относительно положения и корреляций в пространстве, получившуюся функцию $\rho_0(p, t)$ называют вакуумом корреляций. Функцию парной корреляцией ρ_2 получим, проинтегрировав $\rho\ (q, p, t)$ по координатам, кроме координат q_j и q_n. Построим фрагмент рождения: из точки $\rho_0(p, t)$ с $k_j = k_n = 0$, построим парную корреляцию ρ_2 с $k_n + k_j = 0$. Тогда фрагмент гибели преобразует ρ_2 в ρ_0.

Резонансы Пуанкаре связывают фрагменты рождения и гибели, что приводит к *новым* динамическим процессам, которые начинаются из данного состояния корреляции и в конце концов возвращается в *то же самое* состояние.

Пригожин предлагает решение проблемы с малыми знаменателями: если мы интерпретируем их как распределения, например,

$$\frac{1}{\omega} \Rightarrow \frac{1}{\omega \pm i\varepsilon} = P\frac{1}{\omega} \mp \pi i \delta(\omega),$$

где ε > 0 бесконечно мало. Для таких ситуаций неунитарное преобразование Λ ведет к новым наборам систем, которые не могут быть уменьшены до траектории или сведены к волновым функциям.

Таким образом, современное развитие физики ставит задачу перед методикой обучения физике

1. В вузе:

• формирование умений и навыков работы с нелинейными и статистическими моделями физики (классической механики).

2. В школе:

• формирование представлений о нелинейных моделях, понимания категории детерминизма (жесткий и мягкий (вероятностный) детерминизм).

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, М.: Эдиториал УРСС, 2001.

[2] *Goldstein H., Poole C., Safko J.* Classical mechanics. Pearson Ed., 2002. Sixth Indian Reprint, 2004.

[3] *Шустер Г.* Детерминированный хаос: введение. М.: Мир, 1988.

[4] *Пригожин И., Стенгерс И.* Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. 3-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2001; *Пригожин И.* Конец определенности. Время, Хаос и новые законы природы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» , 2000.