УДК 517

А. В. Копыльцов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ СТЕНКИ АРТЕРИОЛЫ

Построена математическая модель, имитирующая колебания стенки артериолы под воздействием потока крови. Рассмотрены различные режимы колебаний стенки артериолы, в частности, затухающие и незатухающие колебания. Модельные расчеты качественно подтверждают экспериментальные данные. Для количественной оценки необходимы дополнительные экспериментальные данные.

1. Колебания стенок кровеносных сосудов

В соответствии с классификацией, принятой в 1970 году на IX Международном конгрессе анатомов в Ленинграде, микрососуды подразделяются на артериолы, прекапиллярные артериолы, капилляры, посткапиллярные венулы, венулы и артерио-венулярные анастамозы. Внутренний диаметр артериолы составляет несколько десятков микрометров (~30 мкм), а толщина стенки артериолы составляет примерно 2/3 ее внутреннего диаметра (~20 мкм). Такая большая относительно просвета сосуда толщина стенок артериол обусловлена толстой мышечной оболочкой в стенке артериолы, необходимой для эффективной локальной регуляции кровотока. Стенка артериолы состоит из нескольких слоев. Ближайший к просвету слой — эндотелий. К эндотелию прилегает эластическая оболочка, после которой расположен слой гладких мышц и фиброзная оболочка [5].

Из экспериментальных исследований известно, что кровеносные сосуды под воздействием внешних и внутренних причин (например, кровотока в них) могут колебаться как единое целое (относительно своей оси симметрии). При определенных условиях наблюдаются не только колебания сосудов как единого целого, но также и стенок сосудов [1, 2, 4]. Согласно экспериментальным данным эти колебания кратковременны и наблюдаются во всех артериолах. Вследствие своей кратковременности эти колебания плохо поддаются непосредственному анализу. Влияние колебаний стенок артериол на кровоток и транспорт респираторных газов разные авторы оценивают по-разному (одни считают их существенными, а другие — нет) [1, 2, 4]. Поэтому для более глубокого исследования этого явления и выяснения степени его влияния на кровоток и транспорт респираторных газов к тканям наряду с экспериментальными исследованиями необходимо строить математические модели колебаний стенок артериол, которые могли бы объяснить наблюдаемые в экспериментах эффекты и предсказывать новые, которые можно было бы обнаружить в будущих экспериментах.

2. Математическая модель.

Уравнение колебаний стенки артериолы можно представить в виде [3, 6]

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+r\frac{dy}{dt}+cy=F, \qquad (1)$$

где y — смещение, t — время, F — вынуждающая сила, a, r, c — коэффициенты.

Силу F можно определить из интеграла Бернулли

$$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\frac{P_0}{\rho}+\frac{V_0^2}{2},$$

где P — давление, ρ — плотность, V — скорость жидкости в кровеносном сосуде.

Если $V_0=0,$ то $P_0=0$ и $\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}=0.$ Последнее выражение можно переписать в виде $P=0{,}5V^2\rho.$ Тогда

$$F=0{,}5V^2\rho SC(\alpha),$$

где S — площадь поверхности сосуда, на которую воздействует жидкость с силой F, а $C(\alpha)$ — функция угла, который зависит от $\frac{dy}{dt}$. Таким образом, уравнение (1) можно переписать в виде

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+r\frac{dy}{dt}+cy=0{,}5V^2\rho SC(\alpha). \qquad (2)$$

Поскольку $\frac{dy}{dt}\frac{1}{V} = tg(\alpha)$, то коэффициент $C(\alpha)$ можно представить в виде степенного ряда по α [6]. Поэтому уравнение (2) можно переписать в виде

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + r\frac{dy}{dt} + cy = 0{,}5V^2\rho S\,[A1(\frac{dy}{dt}\frac{1}{V}) + A2(\frac{dy}{dt}\frac{1}{V})^2 + A3(\frac{dy}{dt}\frac{1}{V})^3 + ...]$$

Если линеаризировать это уравнение, то получим

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + r\frac{dy}{dt} + cy = 0{,}5V^2\rho SA1\frac{dy}{dt}\frac{1}{V},$$

или $a\frac{d^2y}{dt^2} + (r - 0{,}5\rho VSA1)\frac{dy}{dt} + cy = 0$, или

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0, \qquad (3)$$

где $b = r - 0{,}5\rho VSA1$.

При решении уравнения (3) возможны случаи: отсутствие колебаний, затухающие колебания, незатухающие колебания [3]. Рассмотрим эти случаи:

(I) При $b^2 < 4ac$ (b > 0) общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y = e^{-ht}[C1\sin(K1t) + C2\cos(K1t)], \qquad (4)$$

где $h = \frac{b}{2a},\ K1 = (K^2 - h^2)^{0,5},\ K^2 = \frac{c}{a}. \qquad (5)$

Постоянные C1 и C2 определяются из начальных условий

$y = y_0,\ \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ при $t = 0$

и имеют вид $C1 = \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + hy_0\right)\frac{1}{K1},\ C2 = y_0$.

Решение уравнения (3) можно записать в другом виде:

$$y = Ae^{-ht}\sin(K1t + \alpha),$$

где $A = \left(\frac{\left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + hy_0\right)^2}{K^2 - h^2} + y_0^2\right)^{0,5},\ tg(\alpha) = \frac{y_0(K^2 - h^2)^{0,5}}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + hy_0}$.

Таким образом, из решений уравнения (3) видно, что колебания являются затухающими колебаниями с постоянной частотой и постепенно убывающими амплитудами. Угловая частота свободных затухающих колебаний

$$K1 = (K^2 - h^2)^{0,5} = (4ac - b^2)^{0,5}\frac{1}{2a}.$$

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{K1} = \dfrac{4\pi a}{(4ac - b^2)^{0,5}}$. Амплитуда колебаний

$$A = \left(\frac{\left(\left(\frac{dy}{dt} \right)_0 + hy_0 \right)^2}{K^2 - h^2} + y_0^2 \right)^{0,5} e^{-ht} / .$$

(II) При $b^2 > 4ac$ ($b > 0$) общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y = C1e^{s1t} + C2e^{s2t}, \tag{6}$$

где $s1 = \dfrac{-b + (b^2 - 4ac)^{0,5}}{2a}$, $s2 = \dfrac{-b - (b^2 - 4ac)^{0,5}}{2a}$,

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий следующими выражениями:

$$C1 = \frac{-s2y_0 + \left(\frac{dy}{dt} \right)_0}{s1 - s2}, \; C2 = \frac{-s1y_0 + \left(\frac{dy}{dt} \right)_0}{s2 - s1}.$$

Движение, описываемое выражением (6), не является колебательным и при любых начальных условиях величины y и $\dfrac{dy}{dt}$ асимптотически стремятся к нулю.

(III) При $b^2 = 4ac$ ($b > 0$) решение уравнения (3) имеет вид

$$y = e^{-ht} \left(y_0 + \left(Ky_0 + \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 t \right) \right).$$

В этом случае движение не является колебательным.

(IV) Если $b<0$, то уравнение (3) имеет вид

$$a\frac{d^2y}{dt^2} - b\frac{dy}{dt} + cy = 0,$$

а его решение $y = e^{-ht} \left(\dfrac{\left(\frac{dy}{dt} \right)_0 + hy_0}{K1} \sin(K1t) + y_0 \cos(K1t) \right)$,

амплитуда колебаний $A = \left(\dfrac{\left(\left(\frac{dy}{dt} \right)_0 + hy_0 \right)^2}{K^2 - h^2} + y_0^2 \right)^{0,5} e^{ht}$.

В этом случае, при сколь угодно малых начальных возмущениях y_0 и $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$, возникают колебания, амплитуда которых увеличивается по показательному закону. Это означает, что состояние равновесия системы неустойчивое.

Поскольку $b = r - 0{,}5\rho VSA1$, то $b = 0$ при $V = \frac{2r}{\rho SA1} \equiv VC$.

Таким образом, для небольших начальных отклонений любое начальное возмущение будет затухающим при $V < VC$, а при $V > VC$ малые возмущения будут расти. Итак, тривиальное равновесное решение $y=0$, верное при любых V, неустойчиво при скорости $V = VC$. Если $V > VC$, то, согласно линейной теории, имеем неограниченный экспоненциальный рост колебаний. Если же учитывать высшие члены в разложении $C(\alpha)$, то, согласно [6], получим предельный цикл конечной амплитуды.

3. Модельные расчеты и их сравнение с экспериментальными данными.

Согласно экспериментальным данным, полученным на анестезированных кроликах, при уменьшении артериального давления (*P*), средний артериальный диаметр (*D*), длина цикла (*T*) и амплитуда (*A*) вазомоций увеличиваются [4]. То есть при $P_C > P_{LVP}$ имеем $D_C < D_{LVP}$, $T_C < T_{LVP}$, $A_C < A_{LVP}$, где *P, D, T* и *A* — гемодинамические параметры в норме (индекс C) и при условиях LVP (индекс *LVP*), т. е. при наименьшем артериальном давлении, при котором еще вазомоции наблюдаются. Этому факту можно дать объяснения в рамках изложенной выше математической модели. Поскольку колебания, наблюдаемые в экспериментах [4], кратковременные, то они либо затухающие ($b^2 < 4ac$), либо — с возрастающей амплитудой ($b < 0$) и выходят на предельный цикл за счет высших членов в разложении $C(\alpha)$.

Если $b^2 < 4ac$, то имеем следующее. Поскольку *P* пропорционально *V*, то из условия $P_C > P_{LVP}$ следует, что $V_C > V_{LVP}$ и, согласно выражению (4), $h = \frac{b}{2a} = \frac{r - 0{,}5\rho VSA1}{2a}$, имеем $h_C < h_{LVP}$

Поскольку амплитуда $A = \left(\frac{\left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + hy_0\right)^2}{K^2 - h^2} + y_0^2\right)^{0,5} e^{-ht}$ для $0 < h < K$, то для h_{LVP}, которые близки по величине к *K*, имеем $A_C < A_{LVP}$.

Поскольку $T = \frac{2\pi}{K1} = \frac{2\pi}{\left(K^2 - h^2\right)^{0,5}}$, то $T_C < T_{LVP}$.

Известно, что $V = \frac{Q}{SA}$, где *Q* — объемный кровоток, *SA* — площадь поперечного сечения артериолы. Если предположить, что, вследствие кратковременности рассматриваемых процессов, объемный кровоток *Q* является практически постоянным, то из условия $V_C > V_{LVP}$ получаем $SA_C < SA_{LVP}$ и, следовательно, $D_C < D_{LVP}$.

Таким образом, экспериментальные данные находят качественное подтверждение в рамках изложенной математической модели. Для того чтобы дать количественную оценку, нужно определить на основе экспериментальных данных коэффициенты в разложении $C(\alpha)$. Этого можно достичь путем сравнения экспериментальных данных с модельными расчетами. Коэффициенты в разложении $C(\alpha)$ можно подобрать простым перебором. В итоге получим модель колебаний стенки для любой конкретной артериолы. Зная коэффициенты в разложении функции $C(\alpha)$, можно определить условия, при которых возможен переход к истинно хаотическим колебаниям стенок артериолы, которые наблюдаются в экспериментах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Lindbom L., Arfors K. E., Intaglietta M.* Vazomotion in skeletal muscle // Microvasc. Res. 1985. V. 29. P. 87.

2. *Mahler F., Muheim M. H., Intaglietta M., Boglinger A., Anliker M.* Blood pressure fluctuations in human nailfold capillaries // Amer. J. Physiol., 1979. V. 236. № 8. P. H888–H893.

3. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. М., 1991.

4. *Slaaf W. W., Huub H. E., Vrielink O., Tangelder G. J., Reneman R. S.* Vasomotion and stepwise reduction of arterial pressure in rabbit tenussimus muscle // Microcirculation — an update. (M.Tsuchiya et al. editors). 1987. V. 2. P. 527–528.

5. *Sturkie P. D.* Basic physiology. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1981.

6. *Томпсон Дж. М. Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М., 1985.

A. Kopyltsov

MATHEMATICAL MODEL OF FLUCTUATIONS OF ARTERIOLAR WALL

The mathematical model simulating fluctuations of arterial wall under influence of a flow of blood is developed. The various modes of fluctuations of arteriolar wall, in particular, fading and not fading fluctuations, are considered. The modeling accounts qualitatively confirm experimental data. The additional experimental data are necessary for a quantitative estimation.