

## ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ В БАЛКАХ И ПЛАСТИНКАХ

*В статье изложен динамический волновой метод определения статического напряженного состояния однопролетных балок и пластинок. Метод позволяет находить местные напряжения в районе приложения внешних нагрузок. Рассмотрены вопросы распространения волн напряжений в конечных конструкциях и отражения их от свободных кромок. Рекомендованы зависимости для нахождения напряжений в падающих и отраженных волнах. Указаны условия, которые могут привести к ошибочным результатам. Выполнен расчет напряженного состояния балок и пластинок волновым методом.*

Элементарные методы сопротивления материалов широко используются в инженерных расчетах, хотя эти методы во многих случаях являются приближенными. Так элементарная теория не учитывает местные напряжения вблизи зон приложения нагрузок и опор балок.

Точные методы теории упругости не всегда применяются в инженерной практике. Только в бесконечных и полубесконечных телах можно определить местные напряжения точными методами.

Все конструкции имеют конечные размеры. Напряженное состояние их можно найти, исследуя распространение волн напряжений в реальных конструкциях.

Теория распространения упругих волн в твердых телах создавалась в XIX веке Стоксом, Пуассоном, Релеем и другими [1], но до сих пор нет методов расчета инженерных сооружений, основанных на использовании волны напряжений.

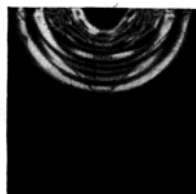
Проведено много экспериментальных исследований распространения волн напряжений при динамическом нагружении твердого тела.

Так под действием импульсов силы в образцах из прозрачных материалов исследовались волны напряжения [1]. На верхнюю кромку прямоугольной пластинки из perspexa (пластицированного полиметилметакрилата) размерами  $140 \times 140 \times 6$  мм наклеивался маленький заряд азида свинца весом 0,12 г. Крупинка гремучего серебра помещалась наверху заряда, чтобы обеспечить быструю детонацию. Заряд поджигался с помощью проволоки, нагреваемой электрическим током. От точки взрыва распространялась волна напряжения с цилиндрической симметрией (рис. 1 и 2). Подходя к боковым торцам и нижней кромке, волна напряжения от-

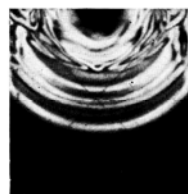
ражается от них. Отраженные волны напряжений накладываются на падающую волну (рис. 3 и 4).



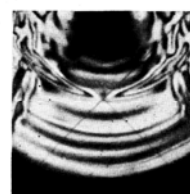
*Рис. 1.*  
Момент времени  
 $t = 10,5$  мкс



*Рис. 2.*  
Момент времени  
 $t = 21,7$  мкс



*Рис. 3.*  
Момент времени  
 $t = 34,3$  мкс



*Рис. 4.*  
Момент времени  
 $t = 47,3$  мкс

Как известно, в безграничных изотропных твердых телах могут распространяться два типа упругих волн: безвихревые волны и эквиволуномиальные. Иногда эти волны называют волнами расширения и волнами искажения соответственно.

Производимые волной расширения деформации не сопровождаются вращением и состоят из объемного расширения и формоизменений, которые связаны со сдвигом. Деформация является безвихревой и называется чистой деформацией.

Волны искажения не связаны с объемным расширением и возникают при вихревом движении.

Частицы в волне расширения движутся параллельно направлению распространения волны, а в волне искажения — перпендикулярно направлению распространения волны.

Скорости распространения волн расширения  $c_1$  и волн искажения  $c_2$  выражаются зависимостями [1] и [2]

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2 \cdot \mu}{\rho}}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — упругие постоянные, называемые константами Ламе;  $\rho$  — плотность материала.

В стальных бесконечных телах скорости распространения волны расширения  $c_1 = 5940$  м/с и волны искажения  $c_2 = 3220$  м/с [1].

Примером волны искажения является волна кручения, распространяющаяся вдоль цилиндрического стержня.

В элементарной теории изгиба балки постоянного поперечного сечения предполагается, что движение каждого элемента балки представляет собой чистый перенос его в направлении, перпендикулярном оси балки. Тогда уравнение движения элемента балки в направлении вертикальной оси  $y$  имеет вид

$$(\rho \cdot S \cdot \Delta x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} dx, \quad (2)$$

где  $v$  — перемещение в направлении оси  $y$ ;  $Q$  — перерезывающая сила в рассматриваемом сечении балки;  $S$  — площадь поперечного сечения.

Используя дифференциальную зависимость между перерезывающей силой  $Q$  на данном участке и изгибающим моментом  $M$  на том же участке  $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ , а также зависимость изгибающего момента  $M$  от радиуса кривизны изогнутой оси балки  $R \left( M = -\frac{EI}{R} = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$ , волновое уравнение изгиба балки может быть записано так:

$$\rho \cdot S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \text{ или } \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -c_0^2 K^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}, \quad (3)$$

где  $E$  — модуль продольной упругости;  $I$  — момент инерции поперечного сечения;  $K = \sqrt{\frac{I}{S}}$  — радиус инерции поперечного сечения;  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  — скорость распространения волны вдоль балки.

Решение в форме

$$v = \varphi_1(c_0 t - x) + \varphi_2(c_0 t + x), \quad (4)$$

вообще говоря, не удовлетворяет волновому уравнению (3) [1].

Общее решение (4) представляет две волны, которые движутся вдоль оси  $x$  в двух противоположных направлениях с постоянной скоростью  $c_0$ .

Для стальных тел скорость  $c_0 = \frac{c_l}{1,14} = 5210$  м/с.

### Изложение волнового метода

Если рассматривать балку или пластинку прямоугольного сечения единичной ширины, изгибаемую мгновенно приложенной к верхней кромке сосредоточенной силой  $P$ , то от точки приложения силы будет распространяться падающая волна напряжений сжатия с цилиндрической симметрией (рис. 1 и 2).

До подхода падающей волны к свободным кромкам распространение волны в балке или в пластинке ничем не отличается от распространения волны сжатия в полубесконечной пластинке, к кромке которой приложена сосредоточенная сила (рис. 5). Напряженное состояние в балке или в пластинке в этом случае определяется зависимостями [3]

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}, \quad \sigma_\theta = \tau_{r,\theta} = 0, \quad (5)$$

Из зависимости (5) следует, что напряжение является функцией радиуса-вектора  $r$  и полярного угла  $\theta$  (рис. 10).

Эта волна напряжения будет волной расширения, так как деформации состоят лишь из объемного расширения. Производимые волной деформации не сопровождаются вращениями. Волна распространяется со скоростью  $c_1$ .

Вдоль каждого радиуса-вектора действуют главные нормальные напряжения  $\sigma_r$ , а касательные напряжения  $\tau_{r,\theta}$  отсутствуют.

Падающая волна, взаимодействуя с нижней кромкой и торцом балки, вызовет отраженные волны. Каждая точка свободных кромок в этом случае может рассматриваться как элементарный источник волновых возмущений согласно принципу Гюйгенса [4] и [2]. Огибающая отраженных волн от элементарных источников волновых возмущений будет суммарной отраженной волной (рис. 9).

При отражении волн на свободных кромках следует соблюдать граничные условия: нормальные напряжения и касательные напряжения должны быть равны нулю. Это можно обеспечить следующим образом.

Напряженное состояние в балке может быть получено, если на полубесконечную пластинку, совмещенную с верхней кромкой балки (рис. 5), наложить полубесконечные пластинки, кромки которых совмещены с нижней кромкой балки (рис. 6) и с правым торцом (рис. 7), а также с левым торцом балки (рис. 8). К кромкам накладываемых полубесконечных пластинок следует приложить силы, равные и противоположно направленные напряжениям, действующим на линиях АВ, ВС и CD в полубесконечной пластинке, совмещенной с верхней кромкой балки. Тогда граничные условия будут соблюдены и напряжения на свободных кромках компенсированы.

Напряжения в полубесконечных пластинках от нормальных и касательных сил (элементарных источников волновых возмущений) определяются по зависимостям (5). Угол  $\theta$  измеряется от направления действия силы, как показано на рис. 10 и 11.

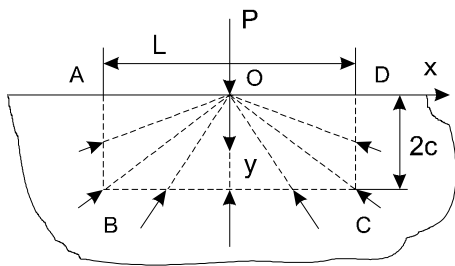


Рис. 5. Полубесконечная пластинка, совмещенная с верхней кромкой балки

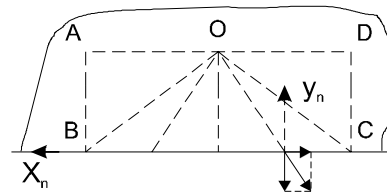


Рис. 6. Полубесконечная пластинка, совмещенная с нижней кромкой балки

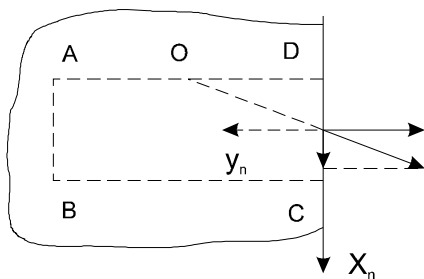


Рис. 7. Полубесконечная пластинка, совмещенная с правым торцом

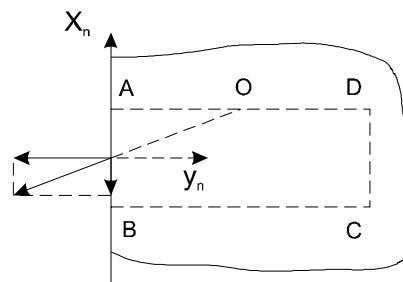


Рис. 8. Полубесконечная пластинка, совмещенная с левым торцом

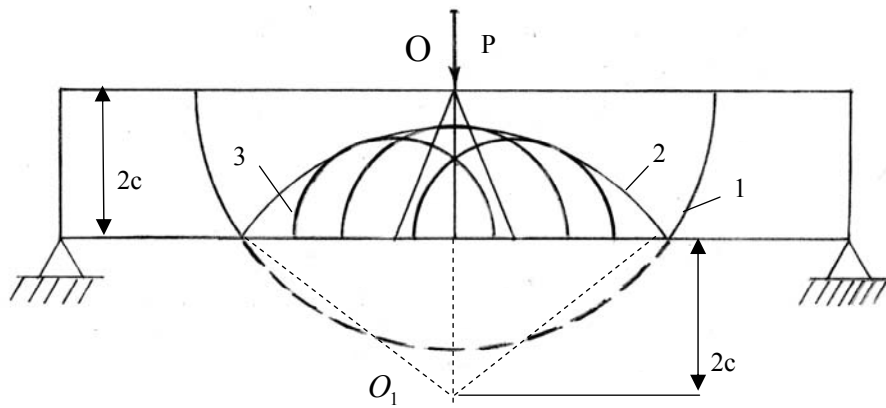


Рис. 9. Отражение падающей волны от нижней кромки:  
 1 — падающая волна, 2 — огибающая отраженных волн от нижней кромки,  
 3 — отраженная волна от элементарного источника волновых возмущений  
 на нижней кромке балки

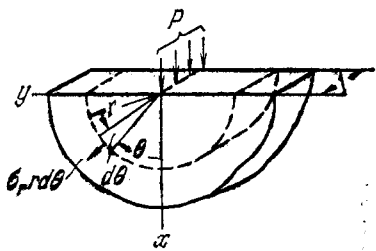


Рис. 10. Нормальная сосредоточенная сила P на кромке полубесконечной пластинки

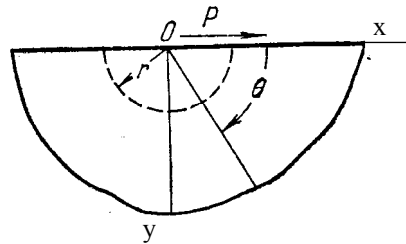


Рис. 11. Касательная сосредоточенная сила P на кромке полубесконечной пластинки

Отраженные волны также будут волнами расширения, так как они связаны с объемным расширением. Поэтому они будут распространяться со скоростью  $c_l$ .

Для определения напряжений в отраженных волнах целесообразно перейти от полярной системы координат к прямоугольной системе координат. Тогда получим следующие зависимости для напряжений в полубесконечной пластинке (рис. 10 и 11):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta, \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta, \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив в формулы (6) зависимости  $x = r \cdot \cos \theta$ ,  $y = r \cdot \sin \theta$  и  $r^2 = x^2 + y^2$ , получим

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (7)$$

Силы, вызывающие отраженные волны от нижней кромки и от торцов, направлены к точке приложения силы  $P$  (рис. 6, 7 и 8). Угол отражения  $\alpha_{\text{од}}$  не равен углу падения падающей волны  $\alpha_{\text{пад}}$ .

$$\alpha_{\text{отр}} = 180^\circ - \alpha_{\text{пад}}$$

Это можно объяснить только тем, что отражаются две волны. Радиальная сила  $R$ , прикладываемая к свободной кромке полубесконечной пластинки для компенсации напряжений на кромке, является равнодействующей силой двух сил: отраженной силы  $G$  и касательной силы  $F = 2 \cdot \delta \cdot \tau_{xy}$  (рис. 12), где  $\delta$  — длина ячейки сетки, наносимая на боковую поверхность балки.

Отраженная сила  $G$  и касательная сила  $F$  вызовут волны расширения в балке.

Навстречу цилиндрической волне напряжения, расходящейся из точки приложения силы  $P$ , по каждому радиусу-вектору будут двигаться «сходящиеся» отраженные волны, вызванные радиальными силами  $R$ . Максимальное радиальное напряжение  $(\sigma_r)^{\text{max}}$  в каждой отраженной волне от элементарного источника волновых возмущений будет находиться на радиусе-векторе к точке приложения силы  $P$ .

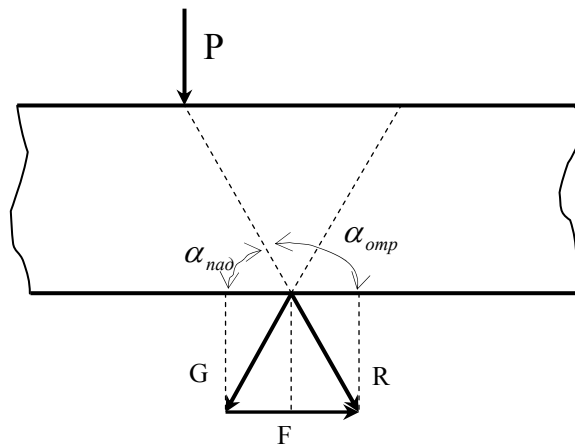


Рис. 12. Отражение падающей волны от свободной кромки балки

Некоторые исследователи допускают, что при отражении плоской волны расширения отражается волна расширения и волна искажения. Последняя распространяется со скоростью  $c_2$ . Такое допущение вводится, чтобы удовлетворить граничным условиям [1].

Отражение от свободных кромок падающих и отраженных волн, вызванных реакциями, будет происходить аналогично отражению падающей волны от внешней нагрузки.

Следует иметь в виду, что до подхода к опорам балки или пластинки падающей волны от внешней нагрузки реакции отсутствуют (рис. 9). Сосредоточенная сила  $P$  уравнивается результирующей усилий  $\sigma_r \cdot r \cdot d\theta$ , дейст-

вующих на фронте падающей волны напряжений с цилиндрической симметрией (рис. 10) [3]:

$$2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r \cdot r \cos \theta \cdot d\theta = -\frac{4P}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot d\theta = -P.$$

Влияние сил инерции на параметры движения балки будет рассмотрено в дальнейшем.

### Статический изгиб балок и пластинок.

Если сосредоточенная сила  $P$  мгновенно приложена и в дальнейшем не меняет своего значения, то после прекращения движения балки мы получим ее статический изгиб под действием силы  $P$ . Волны от сил инерции влияют только на параметры движения балки. Когда движение балки прекратится, ускорения всех точек балки и силы инерции будут равны нулю.

Таким образом, при решении задач статического изгиба балок или пластинок следует рассматривать только распространение волн, вызванных внешними силами и реакциями. При этом нас будет интересовать не время распространения волн, а напряженное состояние балки от всех падающих и отраженных волн, возникающих в балке.

Это облегчает задачу. Будем считать, что от всех источников волновых возмущений, расположенных на одной свободной кромке балки, волны напряжений достигают одновременно всех точек других свободных кромок. Поэтому рассматриваем последовательное излучение волн напряжений сначала от верхней кромки балки  $AD$  (рис.5), потом от нижней кромки  $BC$  (рис.6) и от торцов  $CD$  и  $AB$  (рис.7 и 8). И цикл повторяется: снова излучение волн напряжений от верхней кромки и т.д.

Так как напряжения  $\sigma_r$  обратно пропорциональны радиусу  $r$ , они будут уменьшаться по мере распространения волн. Процесс продолжается до тех пор, пока величины напряжений в волнах не станут бесконечно малыми.

Следовательно, мы должны просуммировать напряженные состояния в полубесконечных пластинках, кромки которых совмещены последовательно с верхней кромкой, с нижней кромкой и с торцами балки.

### Суммирование напряженных состояний в полубесконечных пластинках

При совмещении полубесконечных пластинок с верхней и нижней кромками происходит поворот координатных осей на  $\alpha = 180^\circ$  (рис. 5 и 6). За исходное положение координатных осей принимаем положение координатных осей на рис. 5.

Координатные оси полубесконечных пластинок, кромки которых совмещены с торцами, повернуты по отношению к исходному положению соответственно на  $\alpha = 90^\circ$  и  $\alpha = 270^\circ$  (рис. 7 и 8).

Чтобы просуммировать напряжения в полубесконечных пластинках, кромки которых совмещены с нижней кромкой балки и ее торцами, с напряжениями в исходной координатной системе (рис. 5), следует воспользоваться зависимостями [3]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\sigma_x)_\alpha \cos^2 \alpha + (\sigma_y)_\alpha \sin^2 \alpha - 2(\tau_{xy})_\alpha \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\ \sigma_y &= (\sigma_x)_\alpha \sin^2 \alpha + (\sigma_y)_\alpha \cos^2 \alpha + 2(\tau_{xy})_\alpha \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\ \tau_{xy} &= [(\sigma_y)_\alpha - (\sigma_x)_\alpha] \sin \alpha \cdot \cos \alpha + (\tau_{xy})_\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда при  $\alpha = 90^\circ$  или  $\alpha = 270^\circ$  напряжения  $\sigma_x = (\sigma_y)_\alpha$ ,  $\sigma_y = (\sigma_x)_\alpha$  и  $\tau_{xy} = -(\tau_{yx})_\alpha$ , а при  $\alpha = 180^\circ$  напряжения  $\sigma_x = (\sigma_x)_\alpha$ ,  $\sigma_y = (\sigma_y)_\alpha$  и  $\tau_{xy} = (\tau_{yx})_\alpha$ .

Будем руководствоваться следующими правилами знаков для нормальных и касательных напряжений. Нормальное напряжение считается положительным, когда оно вызывает растяжение элемента, и отрицательным — когда оно вызывает сжатие.

За положительное направление касательных напряжений на гранях выделенного элемента принимаются касательные напряжения, совпадающие с положительными направлениями координатных осей, если растягивающие напряжения для той же грани совпадают с положительным направлением соответствующей оси. Если растягивающее напряжение имеет направление, противоположное положительному направлению оси, то положительное направление касательного напряжения совпадает с отрицательным направлением соответствующей оси.

Если балка статически определима и величины реакций известны, то их воздействие надо учитывать вместе с внешними силами. Для статически неопределимых балок и многопролетных балок порядок определения величин реакций будет рассмотрен в дальнейшем.

### Квадратные и прямоугольные сетки

Для определения напряженного состояния изгиба балки наносим сетку на боковую поверхность балки. Ячейки сетки будут иметь длину  $\delta$  и высоту  $\delta_1$ . В углах ячеек располагаются узловые точки, в которых будем определять напряжения и перемещения. Узловые точки и будут элементарными источниками волновых возмущений.

Размер ячеек сетки влияет на результаты расчета.

Рассмотрим балку прямоугольного сечения единичной ширины, изгибаемую сосредоточенной силой  $P$  в середине пролета (рис. 13). Длина балки  $L = 18,5$  с а размеры ячеек сетки  $\delta = 0,5$  с и  $\delta_1 = 0,25$  с.

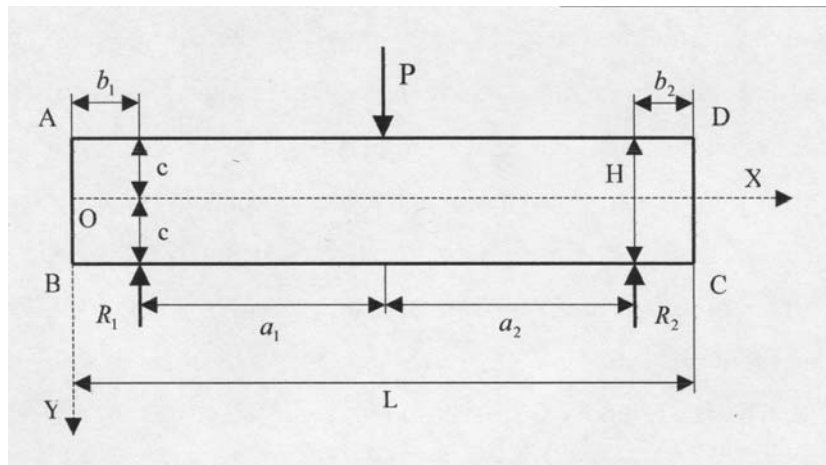


Рис. 13. Балка, нагруженная сосредоточенной силой



Результаты расчета показывают, что напряжения  $\sigma_x$  в балке на 30% меньше, чем напряжения  $\sigma_x$ , определенные методами элементарной теории изгиба. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  вдоль балки происходит по линейному закону в обоих случаях (рис. 14).

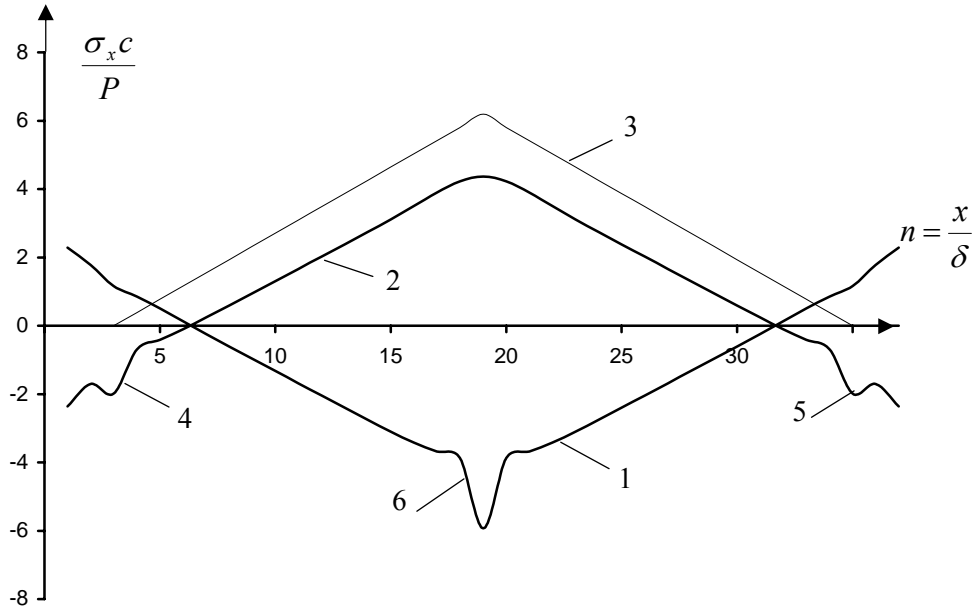


Рис. 14. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  на нижней и верхней кромках ( $y=+1c$  и  $y=-1c$ ) балки, нагруженной силой  $P_{n=19} = 1$  в середине пролета:

1 — эпюра напряжений  $\sigma_x$ , рассчитанная волновым методом (3000 циклов), в сечении  $y = -1c$ ; 2 — эпюра напряжений  $\sigma_x$ , рассчитанная волновым методом (3000 циклов), в сечении  $y = +1c$ ;  $(\sigma_x)_{n=19} = 4,36 \frac{P}{c}$  (с местными напряжениями);

3 — эпюра напряжений согласно элементарной теории изгиба  $(\sigma_x)_{n=19} = 6,19 \frac{P}{c}$ ;

4 — местные напряжения от левой реакции  $R_1 = 0,5P$  ( $n = 3$ );

5 — местные напряжения от правой реакции  $R_2 = 0,5P$  ( $n = 35$ );

6 — местные напряжения от внешней силы  $P = 1$  ( $n = 19$ );

$L = 18,5c$  ( $n = 1 \div 37$ );  $b_1 = b_2 = 1c$  ( $n = 1 \div 2, n = 36 \div 37$ );

$H = 2c$  ( $n_1 = 1 \div 9$ );  $\delta = 0,5c$ ;  $\delta_1 = 0,25c$ ;  $d_1 = d_2 = 0$

$18,5c = [1c + 16,5c + 1c]$

Такое несовпадение результатов объясняется тем, что длина ячеек сетки очень большая. Если сократить длину ячеек сетки в два раза ( $\delta = 0,25c$ ,  $\delta_1 = 0,25c$ ), то напряжения  $\sigma_x$ , рассчитанные двумя методами, практически совпадут (рис. 15).

Одновременно с определением изгибных напряжений волновой метод позволяет определить и местные напряжения вблизи точек приложения внешних сил и реакций.

Чтобы получить более точные значения напряжений, целесообразно размеры ячеек сетки принимать меньше  $0,25c$ .

В приведенных примерах использовались квадратная и прямоугольная сетки.

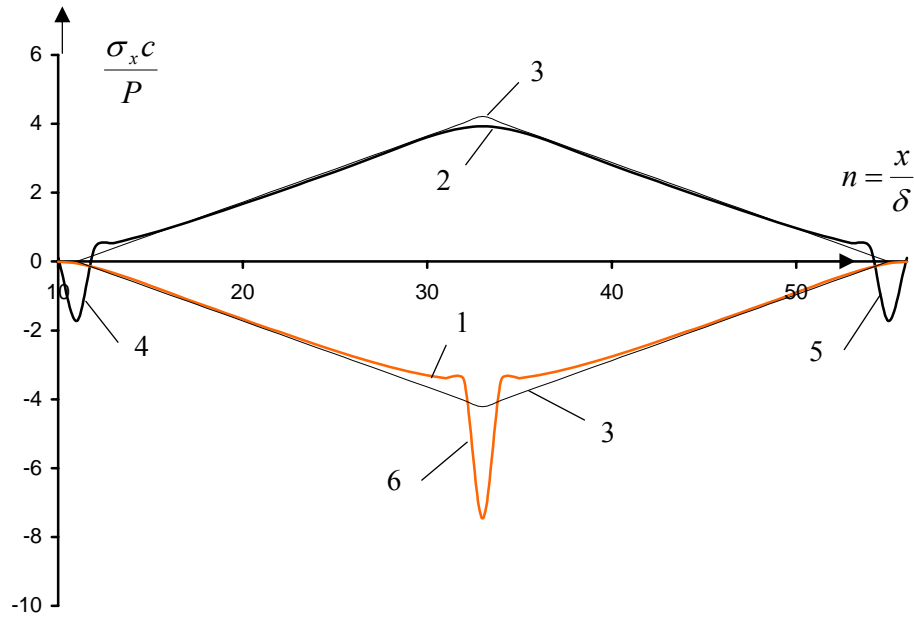


Рис. 15. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  в сечениях  $y = -1$  c,  $y = +1$  c балки длиной  $L = 12,25$  c, нагруженной силой  $P_{n=33} = 1$  в середине пролета:

1 — эпюра напряжений  $\sigma_x$ , рассчитанная волновым методом (500 циклов), в сечении  $y = -1$  c ( $\sigma_x)_{n=25} = -2,5865 \cdot \frac{P}{c}$ ; 2 — эпюра напряжений  $\sigma_x$ , рассчитанная

волновым методом (500 циклов), в сечении  $y = +1$  c ( $\sigma_x)_{n=25} = 2,6087 \cdot \frac{P}{c}$ ;

3 — эпюра напряжений  $\sigma_x$  согласно элементарной теории изгиба ( $\sigma_x)_{n=25} = 2,685 \frac{P}{c}$

при  $y = 1$  c; 4 — местные напряжения от левой реакции  $R_1 = 0,5P = q_1 \cdot 0,25$  c ( $n = 11$ );

5 — местные напряжения от правой реакции  $R_2 = 0,5P = q_1 \cdot 0,25$  c ( $n = 55$ );

реакции в виде равномерно распределенных нагрузок интенсивностью  $q_1 = 2 \frac{P}{c}$ ;

6 — местные напряжения от внешней силы  $P$  ( $n = 33$ ).  $L = 12,25$  c ( $n = 9 \div 57$ );

$b_1 = b_2 = 0,5$  c ( $n = 9 \div 10, n = 56 \div 57$ );  $H = 2$  c ( $n_1 = 1 \div 9$ );

$\delta = 0,25$  c;  $\delta_1 = 0,25$  c;  $d_1 = d_2 = 0$ .  $12,25$  c =  $[0,5$  c +  $11,25$  c +  $0,5$  c]

Для сравнения волнового метода с численным методом конечных разностей выполнен расчет квадратной пластинки, изгибаемой равномерно распределенной нагрузкой (рис. 16), в трех вариантах: с квадратной сеткой  $\delta = \delta_1 = 0,0125$  c и с прямоугольными сетками  $\delta = 0,025$  c,  $\delta_1 = 0,0125$  c и  $\delta = 0,0125$  c,  $\delta_1 = 0,025$  c. Полученные значения напряжений  $\sigma_x$  близки между собой и со значениями напряжений  $\sigma_x$ , рассчитанными методом конечных разностей. Следовательно, допустимо использовать как квадратные, так и прямоугольные сетки соответствующего размера.

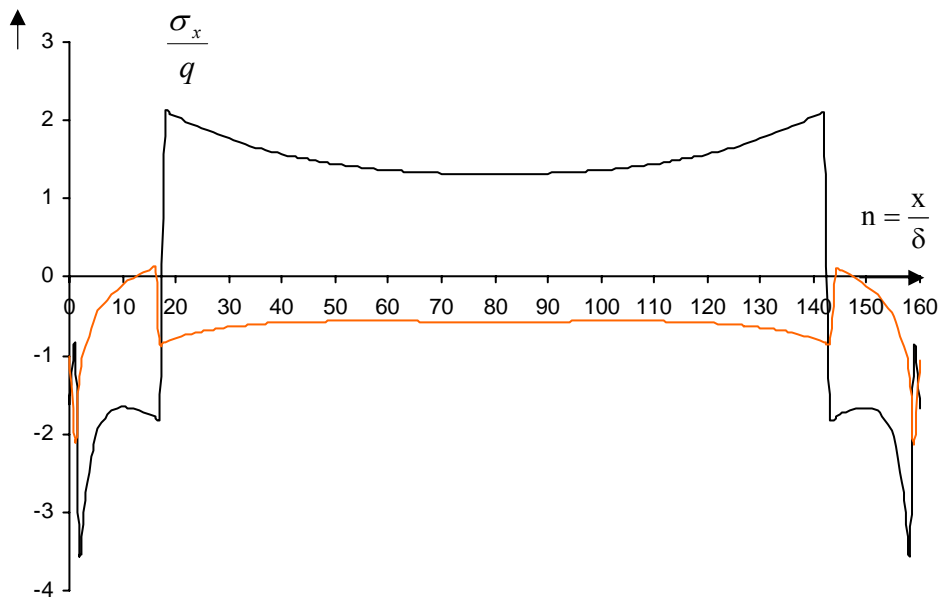


Рис. 16. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  в сечениях  $y = -1$  с,  $y = +1$  с квадратной пластинки длиной  $L = 2$  с, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 1$ :  $L = 2$  с;  $b_1 = b_2 = 0,025$  с;  $H = 2$  с. Левая реакция  $R_1 = q_1 \cdot 0,2$  с, правая реакция  $R_2 = q_1 \cdot 0,2$  с.  $2$  с =  $[0,025$  с +  $1,95$  с +  $0,025$  с]:

1. Квадратная сетка  $\delta = \delta_1 = 0,0125$  с. Эпюра напряжений  $\sigma_x$ , рассчитанная волновым методом (500 циклов), в середине пролета в сечении  $y = -1$  с ( $\sigma_x = -0,568 \cdot q$ , в сечении  $y = +1$  с ( $\sigma_x = 1,31 \cdot q$ ).
2. Прямоугольная сетка  $\delta = 0,025$  с,  $\delta_1 = 0,0125$  с. Эпюра напряжений  $\sigma_x$ , рассчитанная волновым методом (500 циклов), в середине пролета в сечении  $y = -1$  с ( $\sigma_x = -0,5602 \cdot q$ , в сечении  $y = +1$  с ( $\sigma_x = 1,3034 \cdot q$ ).
3. Прямоугольная сетка  $\delta = 0,0125$  с,  $\delta_1 = 0,025$  с. Эпюра напряжений  $\sigma_x$ , рассчитанная волновым методом (500 циклов), в середине пролета в сечении  $y = -1$  с ( $\sigma_x = -0,59 \cdot q$ , в сечении  $y = +1$  с ( $\sigma_x = 1,28 \cdot q$ ).

Напряжения  $\sigma_x$  в середине пролета пластинки с квадратной сеткой  $\delta = \delta_1 = 0,333$  с определены с помощью конечно-разностных уравнений [3]: в сечении  $y = -1$  с ( $\sigma_x = -0,488 \cdot q$ , в сечении  $y = +1$  с ( $\sigma_x = 1,268 \cdot q$

### Условия, исключющие неограниченное возрастание напряжений

Зависимость (5) не позволяет определять напряжения вблизи точки приложения нормальной или касательной силы, так как напряжения неограниченно возрастают (расстояние  $r$  стремится к нулю). Чтобы исключить этот недостаток, следует заменить сосредоточенные силы равномерно распределенными нагрузками.

Используя зависимости для полубесконечных равномерных нормальных или касательных нагрузок, приложенных к краям полубесконечных пластинок [3], можно получить с помощью суперпозиции следующие распределения напряжений для равномерных нагрузок конечной длины  $\delta$  интенсивностью соответственно  $q_n$  и  $s_n$  (рис. 17 и 18):

$$\sigma_x = -\frac{q_n}{\pi} \left\{ \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x_1} + \frac{x_1 y}{x_1^2 + y^2} \right) - \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x_2} + \frac{x_2 y}{x_2^2 + y^2} \right) \right\};$$

$$\sigma_y = -\frac{q_n}{\pi} \left\{ \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x_1} - \frac{x_1 y}{x_1^2 + y^2} \right) - \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x_2} - \frac{x_2 y}{x_2^2 + y^2} \right) \right\};$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q_n}{\pi} \left( \frac{y^2}{x_1^2 + y^2} - \frac{y^2}{x_2^2 + y^2} \right); \quad (9)$$

$$\sigma_x = \frac{s_n}{\pi} \left\{ \left( \ln(x_1^2 + y^2) + \frac{y^2}{x_1^2 + y^2} \right) - \left( \ln(x_2^2 + y^2) + \frac{y^2}{x_2^2 + y^2} \right) \right\};$$

$$\sigma_y = -\frac{s_n}{\pi} \left( \frac{y^2}{x_1^2 + y^2} - \frac{y^2}{x_2^2 + y^2} \right);$$

$$\tau_{xy} = -\frac{s_n}{\pi} \left\{ \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x_1} + \frac{x_1 y}{x_1^2 + y^2} \right) - \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x_2} + \frac{x_2 y}{x_2^2 + y^2} \right) \right\};$$

где  $x_1 = x - 0,5 \cdot \delta$  и  $x_2 = x + 0,5 \cdot \delta$ .

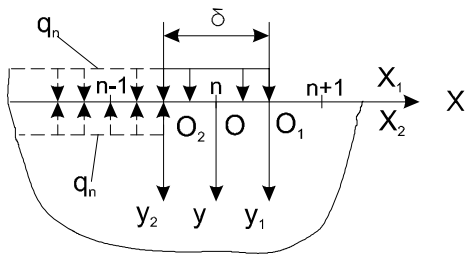


Рис. 17. Нормальная распределенная нагрузка на кромке полубесконечной пластинки

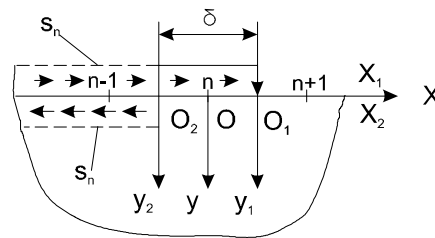


Рис. 18. Касательная распределенная нагрузка на кромке полубесконечной пластинки

Начало координат системы  $XOY$  (рис. 17 и 18) размещено в узловой точке сетки  $n$ .

Напряжение будет неограниченно возрастать и в том случае, если не исключить из рассмотрения угловые точки, которые являются общими для верхней кромки и торцов, а также для нижней кромки и торцов. В случае применения зависимостей (9) для распределенных нагрузок этот недостаток остается.

Общие угловые точки не позволяют напряжениям убывать, так как в точках под распределенной нагрузкой напряжения  $\sigma_x = \sigma_y = q_n$  [3]. Напряжение в угловых точках будет постоянным, а оно должно убывать.

**Возможные варианты расчета.** Поменяем последовательность излучения волн напряжений от кромок и торцов и рассмотрим следующий цикл:

- верхняя кромка, правый торец, левый торец,
- нижняя кромка, правый торец, левый торец.

Величины напряжений от изменения цикла не меняются. Увеличивается только время расчета.

Рассмотрим третий вариант цикла. Так как мы выделяем в полубесконечных пластинках прямоугольную область, являющуюся боковой поверхностью балки или пластинки, целесообразно вначале заменить балку конечной длины на бесконечную полосу высотой  $H = 2c$  и определить напряженное состояние от всех падающих волн, вызванных внешней нагрузкой и реакциями, и отраженных волн от нижней и верхней кромок. При этом находятся напряжения на торцах. Последние компенсируются наложением полубесконечных пластинок, кромки которых совмещены с торцами (рис. 7 и 8)

Известно, что напряжения убывают обратно пропорционально расстоянию  $r$ , и малыми величинами напряжений на определенном расстоянии от торцов балки можно пренебречь. В этом случае можно вместо бесконечной полосы рассматривать балку с фиктивными консолями (рис. 19 и 20).

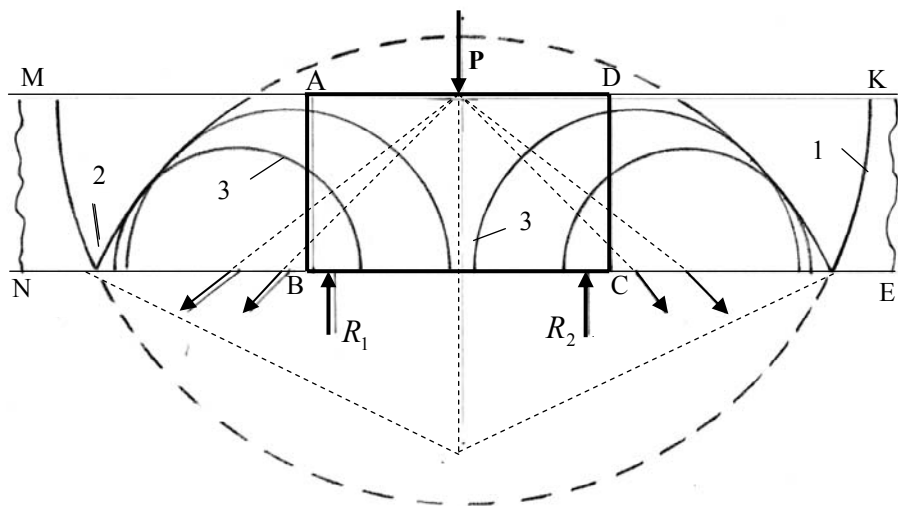


Рис. 19. Отражение от нижней кромки и фиктивных консолей падающей волны, исходящей из точки приложения силы  $P$ :

1 — падающая волна; 2 — огибающая отраженных волн от нижней кромки и фиктивных консолей; 3 — отраженные волны от элементарных источников волновых возмущений на фиктивных консолях

Тогда имеем следующий цикл:

- верхняя кромка с фиктивными консолями МА и ДК,
- нижняя кромка с фиктивными консолями NB и CE,
- правый торец DC,
- левый торец АВ.

Волны расширения от элементарных источников волновых возмущений на кромках фиктивных консолей достигнут различных частей балки позже, чем падающие и отраженные волны от кромок балки.

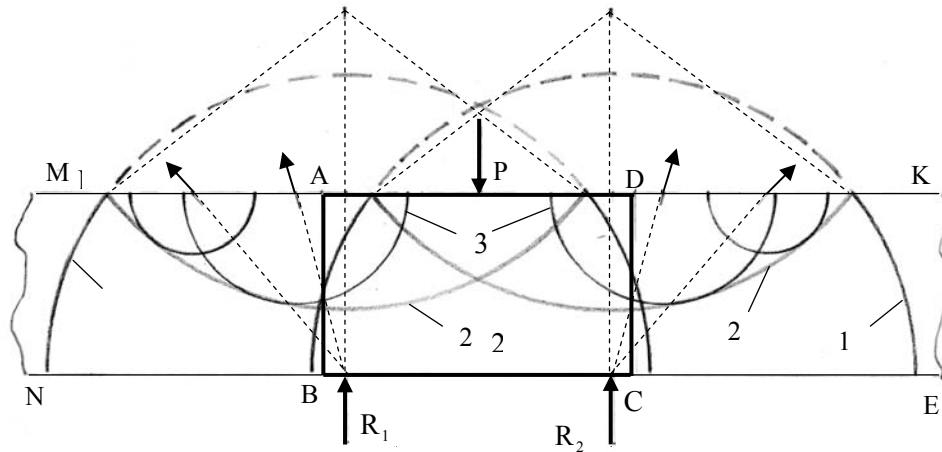


Рис. 20. Отражение от верхней кромки и фиктивных консолей падающих волн, исходящих из точек приложения реакций: 1 — падающая волна, 2 — огибающая отраженных волн от верхней кромки и фиктивных консолей, 3 — отраженные волны от элементарных источников волновых возмущений на фиктивных консолях

Применение этого цикла показывает, что напряженное состояние балки или пластинки (рис. 21) мало меняется по сравнению с расчетом, в котором использовался первый цикл, поэтому рекомендуется использовать для расчета первый цикл (верхняя кромка, нижняя кромка, правый торец, левый торец).

#### О количестве циклов

Количество циклов зависит от размеров балки или пластинки и определяется опытным путем в результате расчетов. Так, определив касательные напряжения в балке длиной  $L = 32$  с и задав 500 циклов, мы получим другой вид эпюры касательных напряжений, и величины напряжений будут меньше значений, вычисленных согласно элементарной теории изгиба. Только после 3000 циклов результаты расчетов практически совпадают, кроме зон действия местных напряжений (рис. 22).

#### Местные напряжения

Величины местных нормальных напряжений  $\sigma_y$  и касательных напряжений  $\tau_{xy}$  в районе действия сосредоточенной силы, приложенной к балке конечной длины  $L = 12$  с, приведены в табл. 1 и 2. Местные напряжения рассчитывались волновым методом. Для сравнения в таблицы помещены величины местных напряжений в бесконечно длинной полосе, которые определил Зеевальд [3].

По этим данным построены графики (рис. 23, а–е). Анализ графиков показывает хорошее совпадение результатов расчета по двум методам.

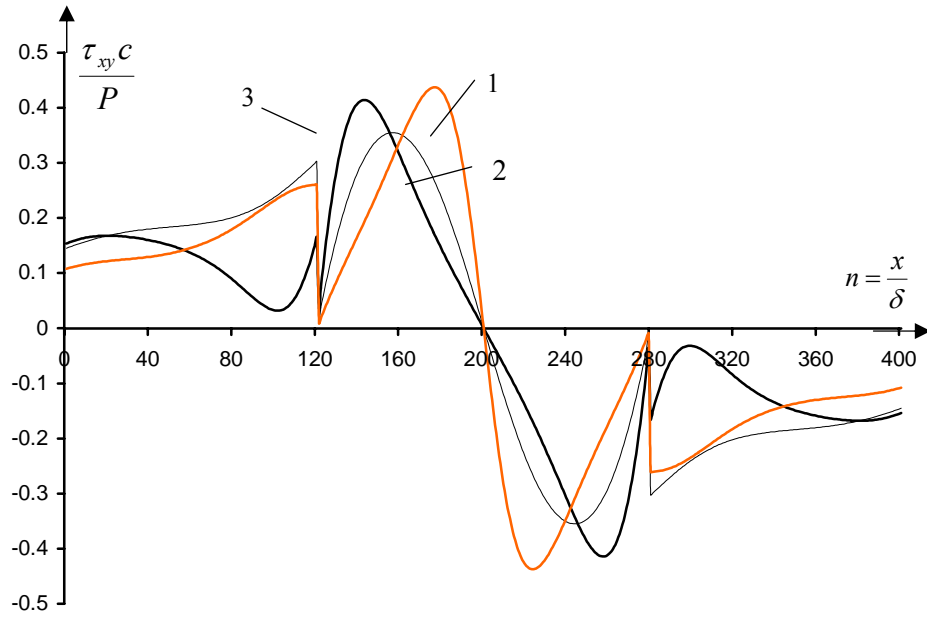


Рис. 21. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}$  в сечениях  $y = -0,5c$ ,  $y = 0$ ,  $y = +0,5c$  с квадратной пластинки длиной  $L = 2,0125c$ , нагруженной силой  $P_{n=200} = 1$  в середине пролета с фиктивными консолями длиной  $d_1 = d_2 = 1,5c$ :

1 — эпюра напряжений  $\tau_{xy}$ , рассчитанная волновым методом (500 циклов), в сечении  $y = -0,5c$   $(\tau_{xy})_{n=176}^{max} = 0,4372 \frac{P}{c}$  и без фиктивных консолей  $(\tau_{xy})_{n=176}^{max} = 0,4385 \frac{P}{c}$ ;

2 — эпюра напряжений  $\tau_{xy}$ , рассчитанная волновым методом (500 циклов), в сечении  $y = 0$   $(\tau_{xy})_{n=156}^{max} = 0,3549 \frac{P}{c}$  и без фиктивных консолей  $(\tau_{xy})_{n=156}^{max} = 0,3611 \frac{P}{c}$ ;

3 — эпюра напряжений  $\tau_{xy}$ , рассчитанная волновым методом (500 циклов), в сечении  $y = +0,5c$   $(\tau_{xy})_{n=143}^{max} = 0,4141 \frac{P}{c}$  и без фиктивных консолей  $(\tau_{xy})_{n=143}^{max} = 0,4329 \frac{P}{c}$ .

$$L = 2,0125c \quad (n = 120 \div 280); \quad b = b_1 = 0,075c \quad (n = 120 \div 125, n = 275 \div 280);$$

$$H = 2c \quad (n_1 = 0 \div 80); \quad \delta = 0,0125c; \quad \delta_1 = 0,025c; \quad d_1 = d_2 = 1,5c \quad (n = 0 \div 119,$$

$$n = 281 \div 400) \quad \underline{s} = 1,5c + [0,075c + 1,85c + 0,075c] + 1,5c.$$

$$\text{Левая реакция } R_1 = 0,5P = q_1 \cdot 0,0375c \quad (n = 126 \div 128).$$

$$\text{Правая реакция } R_2 = 0,5P = q_1 \cdot 0,0375c \cdot (n = 272 \div 274).$$

Реакции в виде равномерно распределенных нагрузок интенсивностью  $q_1 = 13,33 \frac{P}{c}$

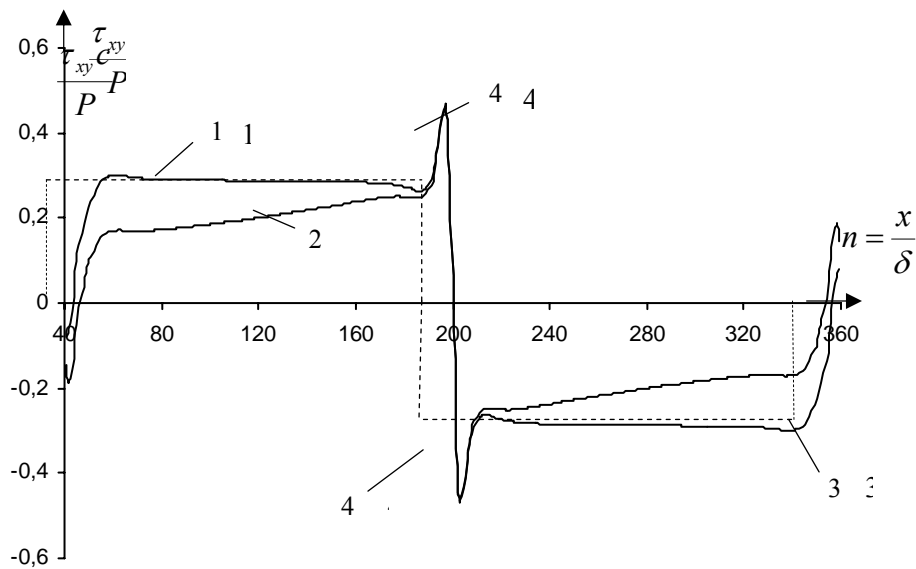


Рис. 22. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}$ , в сечении балки  $y = -0,5 c$ , нагруженной силой  $P_{n=200} = 1$  в середине пролета {без  $(\tau_{xy})_{n=40}$  и  $(\tau_{xy})_{n=360}$ }:  
 1 — эпюра напряжений  $\tau_{xy}$ , рассчитанная волновым методом (3000 циклов), в сечении  $y = -0,5 c$  ( $\tau_{xy})_{n=120} = 0,2872 \frac{P}{c}$ ; 2 — эпюра напряжений  $\tau_{xy}$ , рассчитанная волновым методом (500 циклов), в сечении  $y = -0,5 c$  ( $\tau_{xy})_{n=120} = 0,2002 \frac{P}{c}$ ; 3 — эпюра напряжений  $\tau_{xy}$  согласно элементарной теории изгиба ( $\tau_{xy})_{n=120} = 0,281 \frac{P}{c}$ ;  
 4 — местные напряжения от внешней силы  $P = 1 \cdot (n = 200)$ .  $L = 32,1 c$  ( $n = 40 \div 360$ );  $b_1 = b_2 = 0,5 c$  ( $n = 351 \div 355$ ) ( $n = 40 \div 44$ ,  $n = 356 \div 360$ );  $H = 2 c$  ( $n_1 = 0 \div 80$ );  $\delta = 0,1 c$ ;  $\delta_1 = 0,025 c$ ;  $d_1 = d_2 = 0,32 c = [0,5 c + 31 c + 0,5 c]$ . Левая реакция  $R_1 = 0,5 P = q_1 \cdot 0,5 c$  ( $n = 45 \div 49$ ). Правая реакция  $R_2 = 0,5 P = q_1 \cdot 0,5 c$  ( $n = 351 \div 355$ ).  
 Реакции в виде равномерно распределенных нагрузок интенсивностью  $q_1 = 1 \frac{P}{c}$

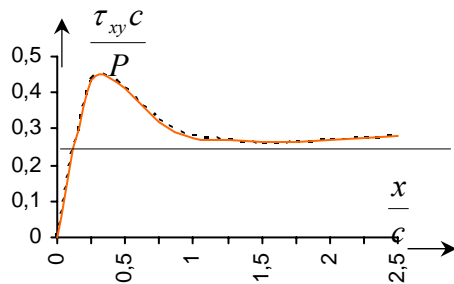
Таблица 1

$\frac{x}{c}$	$\frac{\sigma_y c}{P}$ при $y = -0,5 c$		$\frac{\sigma_y c}{P}$ при $y = 0$		$\frac{\sigma_y c}{P}$ при $y = +0,5 c$	
	Волновой метод	Решение Зеевальда	Волновой метод	Решение Зеевальда	Волновой метод	Решение Зеевальда
0	-1,166	-1,23	-0,4539	-0,456	-0,1298	-0,145
0,25	-0,7634	-0,825	-0,3892	-0,392	-0,1167	-0,1194
0,5	-0,2802	-0,260	-0,2507	-0,250	-0,0847	-0,0858
0,75	-0,0807	-0,0462	-0,1256	-0,121	-0,049	-0,0405
1	-0,0154	-0,0135	-0,0472	-0,039	-0,0211	-0,0212
1,5	0,0092	0,0353	0,0075	0,01595	0,0033	0,00655
2	0,0067	0,0254	0,0101	0,01136	0,0051	0,00528
2,5	0,00031	0,00031	0,00149	0,00149	0,002	0,002

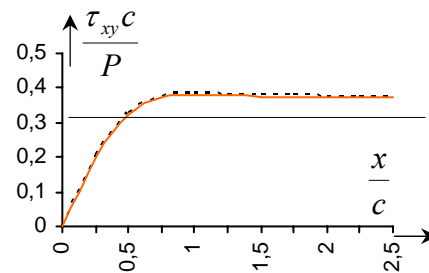


Таблица 2

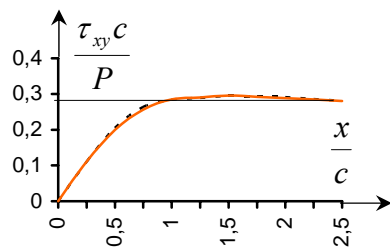
$\frac{x}{c}$	$\frac{\tau_{xy}c}{P}$ при $y = -0,5c$		$\frac{\tau_{xy}c}{P}$ при $y = 0$		$\frac{\tau_{xy}c}{P}$ при $y = +0,5c$	
	Волновой метод	Решение Зеевальда	Волновой метод	Решение Зеевальда	Волновой метод	Решение Зеевальда
0	0	0	0	0	0	0
0,25	0,4325	0,4315	0,2011	0,2055	0,1108	0,1105
0,5	0,4134	0,412	0,3243	0,330	0,1992	0,2045
0,75	0,3205	0,326	0,3713	0,372	0,2557	0,263
1	0,276	0,278	0,3807	0,3839	0,2843	0,2835
1,5	0,2625	0,260	0,3762	0,3782	0,2953	0,294
2	0,2704	0,2715	0,3733	0,3755	0,2884	0,2905
2,5	0,281	0,281	0,375	0,375	0,2805	0,2805



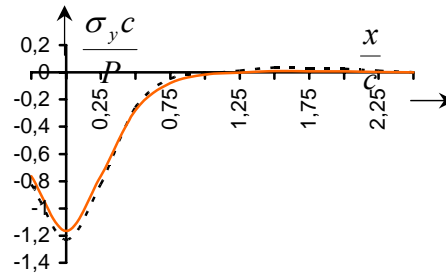
а) Местные напряжения  $\tau_{xy}$  при  $y = -0,5c$



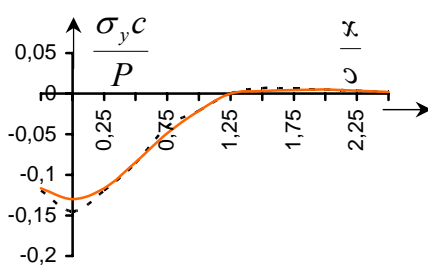
б) Местные напряжения  $\tau_{xy}$  при  $y = 0$



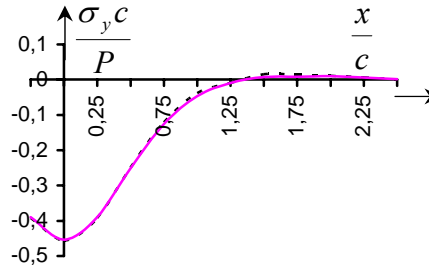
в) Местные напряжения  $\tau_{xy}$  при  $y = +0,5c$



г) Местные напряжения  $\sigma_y$  при  $y = -0,5c$



д) Местные напряжения  $\sigma_y$  при  $y = +0,5c$



е) Местные напряжения  $\sigma_y$  при  $y = 0$

Рис. 23. Местные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\sigma_y$  в районе приложения силы  $P_{n=33} = 1$ , в середине пролета балки (500 циклов). Пунктиром показано распределение местных напряжений, определенных Зеевальдом [3].  $L = 12c$  ( $n = 9 \div 57$ );  $b_1 = b_2 = 0$ ;  $H = 2c$  ( $n_1 = 1 \div 9$ );  $\delta = 0,25c$ ;  $\delta_1 = 0,25c$ ;  $d_1 = d_2 = 2c$ , ( $n = 1 \div 8$ ) и ( $n = 58 \div 65$ );  $16c = 2c + [12c] + 2c$ . Реакция  $R_1$  на левом торце ( $n = 9$ ). Реакция  $R_2$  на правом торце ( $n = 57$ )

\* \* \*

Используя динамический волновой метод, можно решать задачи статического изгиба балок и пластинок, так как статика есть предельный случай динамики.

Сравнение результатов расчета статического изгиба балок, полученных при использовании предложенного волнового метода, с результатами элементарной теории изгиба показывает, что в волновом методе правильно учитывается распространение падающих и отраженных волн от свободных кромок балок, и моделирование динамических процессов нагружения балок и пластинок соответствует реальности. При изгибе балок и пластинок в них распространяются только волны расширения. Напряженное состояние балок и пластинок находится путем суммирования напряженных состояний большого количества полубесконечных пластинок, в которых деформации не сопровождаются вращением и состоят из объемного расширения.

Волновой метод позволяет найти напряженное состояние длинных и коротких балок, а также пластинок. При этом определяются местные напряжения в районе приложения нагрузок. Для определения напряженного состояния балок и пластинок может быть использована одна типовая программа расчета на ЭВМ. Переход от расчета балок к пластинкам и наоборот связан с изменением размеров ячеек сетки в программе для ЭВМ, а также, если есть необходимость, — с изменением расположения внешних сил и реакций. Эта типовая программа для ЭВМ применима и для многопролетных балок.

С помощью волнового метода решаются задачи с симметричным и несимметричным нагружением балок и пластинок. Найденные величины местных напряжений в середине пролета балок конечной длины практически равны величинам местных напряжений в бесконечно длинной полосе, которые определил Зеевальд [3]. Получено хорошее совпадение результатов расчетов напряжений в квадратной пластинке, выполненных методом конечных разностей и волновым методом.

Динамический волновой метод может быть использован для раскрытия статической неопределимости многопролетных балок при любом их нагружении и позволяет определять величины реакций. Статический метод конечных разностей можно применять только тогда, когда известны величины внешних сил и реакций.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М., 1955.
2. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л., 1967.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., 1979.
4. Яковлев Ю. С. Гидродинамика взрыва. Л., 1961.

*A. Napitukhin*

#### STRESS WAVES IN GIRDERS AND PLATES

*The present article describes the dynamic wave method of the estimation of stress static state of single-span girders and plates. The method allows to find local stresses in the field of external loading application. The problems of stress wave propagation in the final designs and their reflection from free edges are reviewed. The relationships for finding out the stresses in the incident waves and reflected waves are recommended. The conditions which can result in errors are indicated. The calculation of stress static state of single-span girders and plates by the wave method is made.*